V.A.KISELIOV

MECANICA de CONSTRUCCIÓN

Curso especial

Editorial Mir
Moscú

MECANICA DE CONSTRUCCION

Curso especial

В. А. КИСЕЛЕВ

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

СТРОЙИЗДАТ
Москва

V. A. KISELIOV

MECANICA DE CONSTRUCCION

Curso especial

de la dinámica y estabilidad
de las estructuras (obras)

Editorial Mir . Moscú

Primera edición, 1983
Primera reimpresión, 1989

Traducido del ruso por MIRCHEVSKI B. A.

Impreso en la URSS

На испанском языке

ISBN 5-03-001720-8

©Стройиздат, 1980
©traducción al español, editorial Mir, 1983

INDICE

PREFACIO 11

DINÁMICA DE LAS OBRAS

CAPÍTULO 1 * INTRODUCCIÓN 13

§ 1. Objeto y propósito de la dinámica de las obras 13
§ 2. Grados de libertad de los sistemas 14
§ 3. Métodos de la dinámica de las obras 18
§ 4. Movimientos libres y forzados del sistema 20

CAPÍTULO 2 * SISTEMAS CON UN GRADO DE LIBERTAD 21

§ 5. Ecuaciones diferenciales de movimientos 21
§ 6. Oscilaciones libres del sistema sin considerar las fuerzas de resistencia 25
§ 7. Oscilaciones libres del sistema considerando las fuerzas de resistencia 32
§ 8. Oscilaciones forzadas debido al impulso, considerando la resistencia y sin considerarla 38
§ 9. Acción de los impulsos periódicos sin considerar la resistencia 39
§ 10. Acción de la fuerza $P(t)$ que varía según cualesquiera de las leyes 40
§ 11. Analogía de ecuaciones diferenciales de movimiento sin considerar la resistencia y la flexión estática longitudinal y transversal 43
§ 12. Aplicación repentina de la fuerza P_i para $t = t_i^{in}$ y su desaparición repentina para $t = t_i^{fin}$ 44
§ 13. Acción de una fuerza aplicada repentinamente 46
§ 14. Fuerza que aumenta según la ley lineal hasta el valor P y que se mantiene luego constante 49
§ 15. Acción de la carga vibratoria 51
§ 16. Investigación de los coeficientes dinámicos debidos a la carga vibratoria 60
§ 17. Desarrollo de la fuerza actuante $P(t)$ en serie Fourier 64
§ 18. Desplazamientos forzados de los apoyos del sistema (perturbación cinemática) 66
§ 19. Algunas aplicaciones técnicas de la teoría de oscilaciones 71

CAPÍTULO 3 * SISTEMAS CON VARIOS GRADOS DE LIBERTAD 73

§ 20. Ecuaciones diferenciales de movimiento 73
§ 21. Oscilaciones libres de sistemas 76
§ 22. Formas principales de oscilaciones propias 87
§ 23. Ortogonalidad de las formas principales de oscilaciones 88
§ 24. Descomposición de la carga y de los desplazamientos respecto a las formas principales de oscilaciones 90

§ 25. Movimientos forzados permanentes del sistema sin considerar las resistencias 94
§ 26. Oscilaciones forzadas de los sistemas con carga vibratoria P sen θt 99
§ 27. Utilización de la simetría del sistema 105

CAPÍTULO 4 * SISTEMAS CON DOS Y TRES GRADOS DE LIBERTAD 108

§ 28. Osclaciones libres de sistemas con dos grados de libertad . . . 108
§ 29. Oscilaciones forzadas del sistema con dos grados de libertad debidas a la acción sobre las masas de los impulsos aplicados simultáneamente 115
§ 30. Caso general de acción de las fuerzas sobre las masas en el sistema con dos grados de libertad 116
§ 31. Caso de aplicación repentina de las fuerzas 117
§ 32. Acción de la carga vibratoria P sen θt sobre el sistema con dos grados de libertad 117
§ 33. Oscilaciones libres de sistemas con tres grados de libertad 119
§ 34. Caso general de acción de las fuerzas sobre el sistema con tres grados de libertad 125
§ 35. Aplicación repentina de las fuerzas a las tres masas 127
§ 36. Aplicación repentina de las fuerzas a las masas para $t = 0$ y su desaparición repentina para $t = \Delta t$ 128
§ 37. Acción de la carga vibratoria P sen θt sobre el sistema con tres grados de libertad, sin considerar la resistencia 129
§ 38. Algunas aplicaciones técnicas de la teoría de las oscilaciones de sistemas con dos y tres grados de libertad 130

CAPÍTULO 5 * SISTEMAS CON UN NÚMERO INFINITO DE GRADOS DE LIBERTAD 134

§ 39. Ecuaciones diferenciales de movimiento durante los desplazamientos transversales de vigas (barras) rectas 134
§ 40. Oscilaciones libres de la viga considerando y sin considerar la resistencia 136
§ 41. Ortogonalidad de las formas principales 138
§ 42. Descomposición de la carga respecto a las formas principales 139
§ 43. Caso general de acción de la carga $q(z, t)$ sobre la viga . . . 141
§ 44. Oscilaciones libres transversales de la viga de sección constante con una masa uniformemente distribuida sin considerar las resistencias 142
§ 45. Oscilaciones forzadas de la viga recta de sección constante con masa m uniformemente distribuida debidas a la carga vibratoria $q(z)$ sen θt, sin considerar la resistencia 145
§ 46. Consideración de las masas concentradas m_i sobre la viga que tiene una masa distribuida m 151
§ 47. Noción sobre la consideración de la inercia de rotación de las secciones de la viga 153
§ 48. Desplazamientos transversales de la viga recta en presencia de fuerzas longitudinales aplicadas a sus extremos 154
§ 49. Oscilaciones longitudinales de barras rectas 163

CAPÍTULO 6 * CÁLCULO DINÁMICO DE VIGAS DE UN TRAMO DE SECCIÓN CONSTANTE CON MASA CONSTANTE 168

§ 50. Oscilaciones propias de vigas de un tramo 168
§ 51. Caso general de acción de la carga sobre las vigas sin considerar la resistencia 175

§ 52. Cálculo de una viga simple a la acción de una fuerza instantánea sin considerar las resistencias 177
§ 53. Cálculo de una viga simple a la acción de los impulsos 179
§ 54. Cálculo de una viga simple a la acción de una fuerza vibratoria P sen θt 181
§ 55. Cálculo de una viga simple a la acción de ciertas cargas vibratorias 186
§ 56. Cálculo de la viga empotrada por ambos extremos a la acción de ciertas cargas vibratorias y desplazamientos de los apoyos 188
§ 57. Cálculo de las vigas, apoyadas articuladamente en un extremo con empotramiento en el otro, a las acciones de diferentes cargas vibratorias y desplazamientos de los apoyos 191
§ 58. Cálculo de una viga sobre dos apoyos con una masa concentrada complementaria, cuando $z = a$ 195
§ 59. Noción acerca del cálculo de las vigas apoyadas sobre una base elástica con dos coeficientes de lecho 200

CAPÍTULO 7 * CÁLCULOS APROXIMADOS DE VIGAS DE SECCIÓN VARIABLE 204

§ 60. Sobre el cálculo exacto de vigas de sección variable 204
§ 61. Método de Búbnov—Galiorkin 205
§ 62. Método de Lagrange—Ritz 213
§ 63. Método energético de determinación de las frecuencias de oscilaciones libres (método de Reley) 221
§ 64. Método de desplazamientos posibles empleado cuando se determinan las frecuencias de oscilaciones propias 228
§ 65. Método de aproximaciones sucesivas empleado cuando se determinan las frecuencias de oscilaciones libres 229
§ 66. Método de sustitución de las masas distribuidas por las concentradas 231
§ 67. Método de traslación de masas para determinar la primera frecuencia de oscilaciones libres 231
§ 68. Método de reducción de las masas empleado para determinar la primera frecuencia de oscilaciones libres 234
§ 69. Método de determinación aproximada de la primera frecuencia de oscilaciones libres en un sistema con n grados de libertad . . 235
§ 70. Cálculo aproximado de una viga a la acción de las cargas distribuidas y de los impulsos distribuidos 236

CAPÍTULO 8 * ELEMENTOS DE CÁLCULO DE LAS VIGAS A LA ACCIÓN DE LA CARGA MÓVIL 238

§ 71. Movimiento de una carga ligera por una viga pesada de rigidez constante con la masa distribuida uniformemente 238
§ 72. Sobre los coeficientes dinámicos 245
§ 73. Líneas dinámicas de influencia 247
§ 74. Movimiento de una carga ligera por una viga pesada apoyada en dos extremos articulados y en una base elástica 250
§ 75. Movimiento de una carga pesada por una viga ligera 251

CAPÍTULO 9 * CÁLCULO DINÁMICO DE LOS PÓRTICOS PLANOS 252

§ 76. Notas de introducción 252
§ 77. Teoremas generales sobre el trabajo y los desplazamientos debido a una carga vibratoria 254
§ 78. Cálculo de los pórticos estáticamente indeterminados a la acción de una carga vibratoria y determinación de las frecuencias de oscilaciones libres por el método de fuerzas 259

§ 79. Cálculo de los pórticos estáticamente indeterminados a la acción de una carga vibratoria y determinación de las frecuencias de oscilaciones libres por el método de desplazamientos 265
§ 80. Determinación de las formas principales de oscilaciones libres de los pórticos por el método de desplazamientos 284
§ 81. Métodos aproximados de cálculo de los pórticos 285
§ 82. Cálculo de un pórtico con elementos que tienen masas distribuidas y concentradas a la acción de la carga vibratoria, por el método de desplazamientos 302
§ 83. Noción sobre el cálculo del pórtico a la acción de cualquier carga variable en el tiempo 303

CAPÍTULO 10 * CÁLCULO DINÁMICO DE VIGAS CONTINUAS, ARCOS Y ARMADURAS 331

§ 84. Cálculo de las vigas continuas a la acción de la carga de vibración por el método de los parámetros iniciales 331
§ 85. Cálculo de las vigas continuas a la acción de la carga vibratoria y determinación de las frecuencias de oscilaciones libres por el método de fuerzas 332
§ 86. Cálculo de las vigas continuas a la acción de la carga vibratoria y determinación de las frecuencias de oscilaciones libres por el método de desplazamientos 339
§ 87. Aprovechamiento de la simetría de las vigas en el método de fuerzas y en el método de desplazamientos 341
§ 88. Noción sobre el cálculo dinámico de los arcos 343
§ 89. Noción sobre el cálculo exacto de las armaduras 344
§ 90. Métodos aproximados de determinación de las frecuencias de oscilaciones libres de las armaduras 349
§ 91. Determinación de las frecuencias de oscilaciones libres de la armadura mediante la sustitución por una viga 352

CAPITULO 11 * ELEMENTOS DE CÁLCULO DE LAS OBRAS A LA RESISTENCIA SÍSMICA 354

§ 92. Método estático de cálculo 354
§ 93. Método dinámico de cálculo 356

ESTABILIDAD DE LAS OBRAS 358

CAPÍTULO 1 * LA ESTABILIDAD DE LAS OBRAS Y LOS MÉTODOS PARA SU INVESTIGACIÓN 358

§ 1. Objeto y problemas de la estabilidad de las obras 358
§ 2. Indicios de la estabilidad del equilibrio de un sistema conservador 368
§ 3. Método de determinación de las cargas críticas 385

CAPÍTULO 2 * ESTABILIDAD DE LAS BARRAS COMPRIMIDAS DE UNA LUZ CON SECCIÓN CONSTANTE 405

§ 4. Estabilidad de una barra elástica sobre dos apoyos de charnelas 405
§ 5. Ecuaciones generales de la línea elástica durante la flexión longitudinal de la barra 417

§ 6. Fuerzas críticas para barras de sección constante, con distintas fijaciones de sus extremos 420
§ 7. Cálculo de las barras comprimidas y flexionadas en estado de deformación 429
§ 8. Estabilidad de las barras bajo la acción de las fuerzas axiales, aplicadas a lo largo de ellas 435
§ 9. Estabilidad de las barras sobre una base elástica 443
§ 10. Influencia de la fuerza transversal durante la flexión longitudinal, en la magnitud de la fuerza crítica 445

CAPÍTULO 3 * ESTABILIDAD DE LOS PILARES DE UNA LUZ DE SECCIÓN VARIABLE 447

§ 11. Estabilidad de los pilares de sección escalonada variable 447
§ 12. Estabilidad de los pilares de sección suavemente variable 451
§ 13. Método de Bubnov—Galiorkin 452
§ 14. Método de Lagrange—Ritz 454
§ 15. Método de las diferencias finitas 457

CAPÍTULO 4 * ESTABILIDAD DE LOS PÓRTICOS PLANOS 459

§ 16. Observaciones previas 459
§ 17. Fórmula de los desplazamientos de los sistemas de barras con elementos comprimidos y encorvados, y extendidos y encorvados 460
§ 18. Estabilidad de los pórticos estáticamente indeterminados según el método de fuerzas 463
§ 19. Estabilidad de los pórticos estáticamente indeterminados según el método de desplazamientos 470
§ 20. Nociones sobre el cálculo de pórticos en estado de deformación 487

CAPÍTULO 5 * ESTABIBILIDAD DE LAS VIGAS CONTINUAS, ARCOS Y ARMADURAS 489

§ 21. Estabilidad de las vigas continuas según el método de los parámetros iniciales 489
§ 22. Estabilidad de las vigas continuas según el método de fuerzas 491
§ 23. Estabilidad de las vigas continuas según el método de desplazamientos 497
§ 24. Estabilidad de los arcos circulares y de los anillos de sección constante con carga hidrostática permanente 500
§ 25. Estabilidad de los arcos parabólicos con una carga uniforme 510
§ 26. Estabilidad del cordón superior de los puentes abiertos . . . 511

CAPÍTULO 6 * ESTABILIDAD DE LA FORMA PLANA DE LA FLEXIÓN 514

§ 27. Estabilidad de una viga fina y alta de sección rectangular, sobre dos apoyos con flexión pura 514
§ 28. Estabilidad de una viga alta y fina de sección rectangular con una fuerza en el centro de la luz 516
§ 29. Estabilidad de una viga alta y fina de sección rectangular sobre dos apoyos, con compresión descentrada 518
§ 30. Estabilidad de las vigas de doble T sobre dos apoyos articulados con flexión pura 519
§ 31. Estabilidad de las vigas de doble T con ciertas cargas 521

CAPÍTULO 7 * ALGUNAS CUESTIONES DE LA ESTABILIDAD 521

§ 32. Estabilidad de las placas rectangulares con apoyos articulados en cuatro lados 521

§ 33. Capacidad portadora límite de una barra comprimida y encorvada (estabilidad de segundo género) 523

Anexo 1. Tabla de las funciones de influencia para el cálculo dinámico de las vigas y pórticos continuos simples 531

Anexo 2. Tabla para el cálculo dinámico de los pórticos y vigas continuas 538

Anexo 3. Tabla para el cálculo de la estabilidad de los pórticos y de las vigas continuas por el método de fuerzas 541

Anexo 4. Tabla para el cálculo de la estabilidad de los pórticos y de las vigas continuas por el método de desplazamientos 542

Bibliografía 545

PREFACIO

Se ofrece a la atención de los lectores la tercera edición rusa del manual del curso especial de mecánica de construcción, que consta de dos partes de gran importancia para los ingenieros civiles: la dinámica y la estabilidad de las obras.

La importancia de estas partes se determina por el hecho de que la subestimación de los fenómenos dinámicos y de la pérdida de estabilidad de los elementos deformados durante la proyección de las obras de ingeniería conducía a grandes catástrofes.

La historia de la técnica de construcción conoce no pocas catástrofes de importancia en diferentes países que eran también consecuencia de tal subestimación.

Expongamos algunos casos de catástrofes directamente relacionadas con la subestimación de las manifestaciones dinámicas de la carga actuante o de los fenómenos de pérdida de estabilidad.

En 1850, durante la lluvia acompañada de fuerte viento, se derrumbó en el río Maine de la ciudad de Angres (Francia), el puente colgante de 120 m de longitud. Ocurrió esto cuando sobre el puente pasaba un destacamento militar que había creado, en cierto sentido, una carga de choque móvil.

En 1905, en la ciudad de San Petersburgo (Leningrado), se derrumbó por causa análoga el puente colgante arriostrado, llamado «Egipcio», situado sobre el río Fontanka debido a un destacamento de caballería que había provocado las vibraciones del puente.

En 1940, debido al desarrollo de diferentes tipos de oscilaciones generadas por los torbellinos de viento que soplaba con gran fuerza y velocidad, se derrumbó cerca de la ciudad de Tacoma en Estados Unidos el puente colgante de tres tramos (335,5 m + 854 m + + 335,1 m).

En 1875, bajo el primer tren de trabajo, se derrumbó sobre los andamios, que afortunadamente todavía no habían sido retirados,

el puente sobre el río Kevda (Rusia). La causa del derrumbamiento fue la pérdida de estabilidad del cordón superior comprimido de la armadura, el cual no tenía arriostrado contraviento superior.

En 1907, durante la construcción se derrumbó el gran puente metálico de cantilever de Quebec sobre el río de S. Lorenzo (Canadá) por la pérdida de estabilidad de un elemento comprimido. La catástrofe sucedió 15 minutos antes de finalizar la jornada y costó la vida a 74 hombres; 9000 toneladas de metal se hicieron totalmente inservibles.

Se podrían citar muchas otras catástrofes características, pero no hay necesidad alguna, ya que los casos más arriba expuestos evidencian elocuentemente sobre la seriedad del problema de la dinámica y la estabilidad de las obras. Todas ellas alertan a los ingenieros civiles a prestar especial atención a los cálculos durante la proyección de las obras, sobre todo a los problemas de la dinámica y a la pérdida de estabilidad de los estados deformados.

El dominio de estas partes complicadas de la mecánica de construcción, es decir, de la dinámica y estabilidad de las obras, le ayuda al ingeniero civil a proyectar obras seguras.

En este trabajo por obra se comprende la misma, haciendo un acento especial en su parte funcional, es decir, en su sistema estructural.

DINÁMICA DE LAS OBRAS

CAPÍTULO 1 * INTRODUCCIÓN

§ 1. OBJETO Y PROPÓSITOS DE LA DINÁMICA DE LAS OBRAS. La dinámica de las obras es una parte especial de la mecánica de construcción dedicada a los métodos de cálculo de las obras a las cargas dinámicas.

Llámanse cargas dinámicas tales cargas que durante la acción transmiten a las masas de la obra aceleraciones provocando la aparición de las fuerzas de inercia. Las demás cargas son estáticas.

Las cargas dinámicas provocan en la obra tensiones, deformaciones y desplazamientos variables en el tiempo, mientras que las estáticas —si no se considera el escurrimiento plástico del material— constantes.

En caso de que las fuerzas de inercia provocadas por las cargas, durante su aplicación o acción, sean pequeñas en comparación con las propias cargas, tales cargas se consideran aproximadamente estáticas.

Las cargas estáticas son, principalmente, aquellas que no varían su valor, ni su posición, ni su dirección.

Las cargas dinámicas son diferentes por su naturaleza y pueden reducirse, generalmente, a los siguientes tipos.

1. Carga periódica inmóvil (situada sobre la obra en un lugar determinado). Se caracteriza por el hecho de que el diagrama de su dependencia en función del tiempo es repetido varias veces cada lapso determinado de tiempo (períodos). La carga periódica puede ser tanto discontinua como continua.

Si la carga periódica varía ininterrumpidamente según la ley del seno o coseno, entonces tal carga se considera vibratoria o armónica.

La carga periódica se crea por diferentes mecanismos, en particular la carga vibratoria, por mecanismos que tienen masas desequilibradas de las partes rotatorias (masa m en la fig. 1, *a*).

2. Carga de acción breve (impulsos). Se caracteriza por un desarrollo rápido y una desaparición también rápida, es decir, por una acción casi momentánea. Tales cargas son creadas, por ejemplo, mediante diferentes explosiones.

3. Carga de impacto en forma de golpes en un lugar determinado de la obra. Se caracteriza por un cambio brusco de la velocidad del cuerpo que golpea en un corto plazo de tiempo. Tal carga puede ser también periódica. La carga de impacto la crean cuerpos caídos (fig. 1, *b*), diferentes martinetes, martillos y mecanismos de impacto de otros tipos.

4. **Carga móvil** de valor constante o variable que cambia su posición sobre la obra, como, por ejemplo, locomotoras eléctricas, automóviles, trolebuses, etc.

5. **Carga sísmica.** Son los movimientos desordenados del suelo, empujes, golpes y vibraciones durante el terremoto.

El cálculo dinámico de las obras consiste en determinar las fuerzas y los desplazamientos internos debidos a las cargas dinámicas, cuyo valor y carácter de acción son conocidos, o en la comprobación del sistema a la resonancia con carga repetida periódicamente de una frecuencia determinada.

La carga dinámica, por su carácter de acción sobre la obra, es considerablemente más complicada que la estática. En virtud de esto, la dinámica de las obras es mucho más complicada que la estática de éstas, pero queda atrasada en relación con esta última en la elaboración y el perfeccionamiento de los métodos aplicados del cálculo.

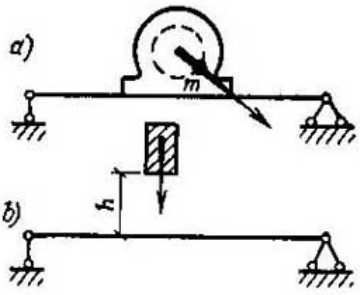


Fig. 1.

Si la acción de las cargas estáticas se determina por su valor, al calcular las cargas dinámicas un papel importante, junto con la magnitud, juega el carácter de la carga.

Especialmente en este sentido es «pérfida» cualquier carga periódica. La acción de tal carga depende no sólo de su valor, sino también de la frecuencia de acción. A veces una carga periódica de pequeño valor puede crear mayor efecto dinámico, es decir, provocar mayores tensiones y desplazamientos que una carga análoga de mayor valor pero con otra frecuencia de acción.

Este hecho se explica por la capacidad de la obra de realizar oscilaciones elásticas de diferente frecuencia. Al igual que un instrumento musical que responde a aquellos sonidos, llegados de afuera, que este mismo es capaz de emitir, la obra es sensible a las acciones periódicas de la carga con cierta frecuencia determinada para ésta. Es por eso que a veces una pequeña carga periódica de acción prolongada es capaz de hacer balancear a una obra hasta un límite peligroso.

§ 2. GRADOS DE LIBERTAD DE LOS SISTEMAS. En la dinámica de las obras, los sistemas se dividen según el número de grados de libertad. Se entiende por libertad de los sistemas la posibilidad de desplazamientos de las masas situadas sobre éstos a consecuencia bien de falta de enlaces en el sistema bien por la deformación de los elementos del sistema o por ambas causas.

Llámase número de grados de libertad del sistema el número de

parámetros geométricos independientes (coordenadas generalizadas) que determinan la posición del sistema en cualquier momento de tiempo para cualquier tipo de su movimiento.

El número de grados de libertad de un sistema elástico se compone de los grados de libertad de diferentes masas ubicadas sobre éste.

La posición de toda masa concentrada en un sistema elástico (fig. 2, *a*), sobre el plano en caso general, se determina por dos desplazamientos de avance por los ejes *z* e *y* y un giro alrededor del eje *x*, y en el espacio, por tres desplazamientos de avance por los ejes *x*, *y* y *z* y tres giros alrededor de estos ejes. Por consiguiente, tal masa tiene en el plano tres grados de libertad y seis grados de libertad en el espacio.

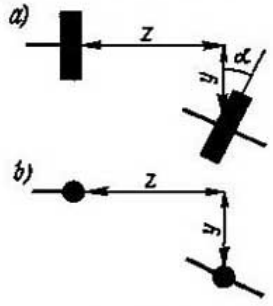


Fig. 2

Si esta masa se presenta convencionalmente en forma de un punto (fig. 2, *b*), entonces su posición en el plano se determina sólo por dos desplazamientos de avance, y en el espacio, por tres. Esto significa que una masa puntual posee en el plano dos grados de libertad, y en el espacio, tres.

Cualquier masa distribuida sobre el sistema elástico deformable representada como una cantidad infinitamente grande de las masas concentradas infinitamente pequeñas tendrá un número infinito de grados de libertad.

En casos particulares, la libertad de traslaciones de ciertas masas puede ser limitada por los enlaces del sistema disminuyendo así el número de grados de libertad del sistema. Por ejemplo, si forman

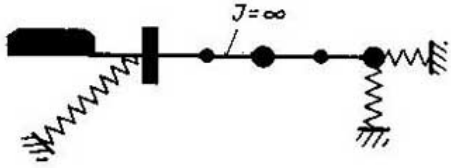


Fig. 3

parte del sistema los elementos-discos infinitamente rígidos con masas concentradas y distribuidas (fig. 3), entonces los desplazamientos de todas las masas se determinan por desplazamientos del disco, sobre el cual éstas están situadas. Por eso el número de grados de libertad de todas las masas ubicadas sobre el disco infinitamente rígido es igual al número de grados de libertad de este disco, el cual, si el disco no tiene apoyos rígidos, es igual a tres.

El número de grados de libertad del sistema se reduce también en el caso cuando algunos desplazamientos de las masas son pequeños y se puede prescindir de ellos durante el cálculo.

Apliquemos todo lo anteriormente dicho a los diferentes sistemas.

Examinemos una carga pesada sobre un muelle, cuya masa es sumamente pequeña en comparación con la masa de la carga. Sus desplazamientos son posibles sólo por la vertical (fig. 4, *a*). Su posición, y con ella la posición de todo el sistema, se determina sólo por un parámetro, la coordenada y, lo que caracteriza al sistema con un grado de libertad. Las masas concentradas sobre una barra infinitamente rígida (fig. 4, *b*), cuya posición se determina por el ángulo α independientemente de la cantidad de masas y muelles que fijan la barra, dan un sistema con un grado de libertad.

Si el peso se encuentra sobre una viga, de cuya masa se prescinde (fig. 4, *c*), considerando puntual la masa del peso y, además, prescindimos del desplazamiento horizontal del peso, obtendremos un

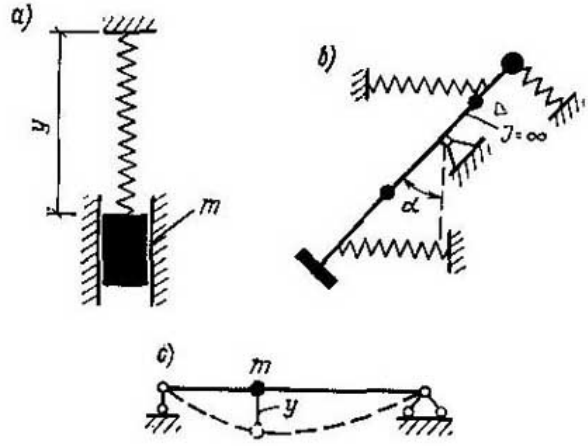


Fig. 4

sistema también con un grado de libertad ya que la posición del peso se determina por la flecha de la viga en ese lugar.

Los sistemas de dos o tres pesos suspendidos sucesivamente de los muelles que se mueven sólo por la vertical (fig. 5), serán, respectivamente, sistemas con dos o tres grados de libertad, puesto que para determinar la posición de las masas hay que saber dos o tres coordenadas.

Los sistemas análogos con dos o tres grados de libertad serán vigas imponderables con dos o tres masas puntuales, respectivamente, si se prescinde de sus traslaciones horizontales (fig. 6).

En los casos complicados, para determinar el número de grados de libertad del sistema es cómodo fijar cada masa concentrada con barras rígidas de tal manera, que la masa, para las premisas dadas del cálculo, sea inmóvil. La cantidad necesaria de barras introducidas en el sistema determinará el número de grados de libertad del sistema. Mostrémoslo en el sistema con tres masas concentradas (fig. 7, *a*).

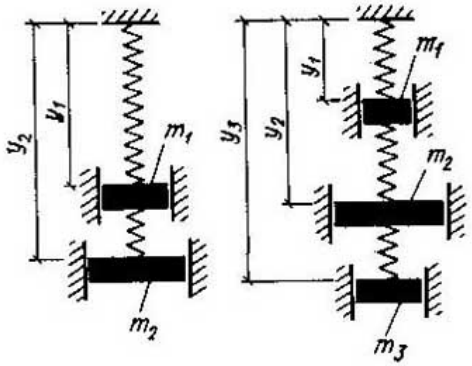


Fig. 5

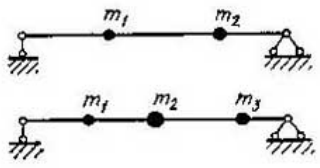


Fig. 6

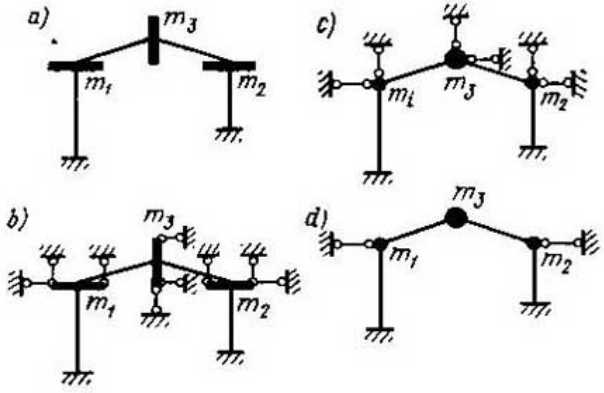


Fig. 7

Consideremos que el pórtico es imponderable. Cada masa concentrada sobre un sistema elástico tiene tres grados de libertad, por eso debe fijarse por tres barras que no se intersecan en un punto (fig. 7, *b*). En total están introducidas nueve barras. Esto quiere decir que el sistema tiene nueve grados de libertad.

Si se prescinde de los giros de las masas, es decir, si las consideramos puntuales, entonces cada masa puede ser sujetada mediante dos barras (fig. 7, *c*) y el sistema puede considerarse como un sistema de seis grados de libertad. Si además prescindimos de las deformaciones longitudinales y consideramos la cuerda de la barra deformada igual a la longitud de la misma barra, y los desplazamientos de los nudos pequeños, entonces basta con sujetar las masas m_1 y m_2 con barras longitudinales (fig. 7, *d*) con el propósito de inmovilizar a todas las masas. Con tales premisas, el sistema se convierte en un sistema con dos grados de libertad. En este caso el desplazamiento de la tercera masa depende de los desplazamientos de las masas m_1

y m_2 y se determina por medio de los dos desplazamientos de dichas masas.

De los razonamientos expuestos se desprende que el número de grados de libertad puede ser completo, sin depender de las premisas del cálculo y convencional, es decir, incompleto, dependiente de éstas.

El número de grados de libertad es una característica principal del sistema durante los cálculos dinámicos. Cuanto mayor es el número de grados de libertad, tanto más complicado, por regla general, es el cálculo dinámico.

§ 3. MÉTODOS DE LA DINÁMICA DE LAS OBRAS. En la dinámica de las obras se distinguen dos métodos principales, a saber: el cinetoestático y el energético.

El método cinetoestático consiste en que la obra se examina en cualquier momento de tiempo en equilibrio bajo la acción de las cargas dinámicas dadas, las fuerzas de inercia provocadas por éstas y los momentos de las masas tanto de la propia obra como de las masas situadas sobre ésta. Luego para el cálculo se emplean los métodos del curso general de la mecánica de construcción (estática de las estructuras).

Las fuerzas de inercia y los momentos se determinan según las siguientes fórmulas:

a) las fuerzas de inercia en dirección de los ejes de coordenadas x, y y z

$$J_x^* = -m\ddot{x}; \quad J_y^* = -m\ddot{y}; \quad J_z^* = -m\ddot{z}; \tag{1.1}$$

b) los momentos de inercia con respecto a los mismos ejes x, y y z

$$M_x^* = -J_{mx}^*\ddot{\alpha}; \quad M_y^* = -J_{my}^*\ddot{\beta}; \quad M_z^* = -J_{mz}^*\ddot{\gamma}, \tag{1.2}$$

donde m es la masa del cuerpo; x, y, z, los desplazamientos lineales en dirección de los ejes de coordenadas; α, β y γ, los desplazamientos angulares alrededor de los ejes de coordenadas; J_{mx}^*, J_{my}^*, J_{mz}^*, los momentos de inercia de las masas con respecto a los ejes de coordenadas.

Las condiciones de equilibrio expresadas por medio de fuerzas generalizadas para un sistema con n grados de libertad serán:

$$(Q_k + J_k^*)_{k=1, 2, \ldots, n} = 0, \tag{1.3}$$

donde Q_k es la fuerza generalizada de las fuerzas dadas; J_k^*, la fuerza generalizada de las fuerzas de inercia de las masas que corresponde al desplazamiento generalizado (coordenada generalizada) q_k.

Para las masas y fuerzas puntuales aplicadas a éstas tendremos:

$$Q_k = \sum_{i=1}^{\text{según el número de fuerzas}} \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right); \qquad (1.4)$$

$$J_k^* = - \sum_{i=1}^{\text{según el número de masas}} m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right), \qquad (1.5)$$

siendo q_k el desplazamiento generalizado (coordenada); x_i, y_i, z_i, los desplazamientos de la masa m_i en dirección de los ejes de coordenadas expresados por medio de la coordenada generalizada q_k:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i (q_1, q_2, \ldots, q_n); \\ y_i &= y_i (q_1, q_2, \ldots, q_n); \\ z_i &= z_i (q_1, q_2, \ldots, q_n). \end{aligned} \qquad (1.6)$$

Se puede escribir, cuando sea necesario, la igualdad convencional

$$J_k^* = - M_k \ddot{q}_k \qquad (1.7)$$

y hallar la masa «reducida» M_k correspondiente al desplazamiento generalizado q_k.

El método energético se funda o en la investigación, en condiciones de equilibrio, de la energía potencial total del sistema considerando las fuerzas de inercia, o en la investigación de la energía cinética y elástica durante el movimiento del sistema. En particular, cuando no se toman en consideración las fuerzas de resistencia al movimiento, dicho método se basa en la ley de conservación de la energía:

$$K + V = C = \text{const}, \qquad (1.8)$$

donde K es la energía cinética; V, la energía elástica del sistema.

La energía cinética del sistema para desplazamientos de avance de las masas se expresa a partir de la expresión:

$$K = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} + \sum \int m(z)\, dz \frac{v^2(z)}{2}. \qquad (1.9)$$

Aquí la primera suma corresponde a las masas concentradas, la segunda, a las distribuidas.

La energía elástica del sistema se determina mediante las conocidas fórmulas de la mecánica de construcción o a través del trabajo de las fuerzas exteriores:

$$V = \frac{1}{2} \sum P_i \Delta_i \cos(P_i, \Delta_i) + \frac{1}{2} \sum \int dP\, \Delta \cos(dP, \Delta), \qquad (1.10)$$

o bien utilizando el trabajo de las fuerzas internas, el cual en caso de sistemas planos será:

$$V=\frac{1}{2}\left[\sum\int\frac{M^2\,ds}{EJ}+\sum\int N^2\frac{ds}{EF}+\sum\int\mu\frac{Q^2}{GF}\,ds\right]. \quad (1.11)$$

§ 4. MOVIMIENTOS LIBRES Y FORZADOS DEL SISTEMA. Si a un sistema elástico se le saca de cualquier modo, por ejemplo, por impulso o empuje, del estado de equilibrio estable, y luego se elimina la causa que lo hace salir de este estado, entonces el sistema realizará movimientos en forma de oscilaciones alrededor de la posición estable de equilibrio. Tales oscilaciones del sistema se denominan *libres*. Surgen bajo la acción de la energía transmitida al sistema. Durante las oscilaciones la energía del sistema constará de la elástica y la cinética, entre las cuales pasa un intercambio continuo: la energía elástica pasa a la cinética, y luego la cinética pasa a la elástica.

Las diferentes e inevitables resistencias, exteriores e interiores, al movimiento del sistema, absorben continuamente una parte de la energía del sistema, siendo por eso amortiguado el proceso de las oscilaciones, es decir, limitado en el tiempo. Es evidente que cuanto mayor es la resistencia tanto más rápidamente se amortiguan las oscilaciones.

Si las resistencias son pequeñas, entonces el proceso de amortiguación va lentamente. En tales casos en los cálculos se prescinde de la resistencia, y se obtiene, teóricamente, el proceso de oscilaciones no amortiguado, durante el cual la energía comunicada al sistema no disminuye y el proceso de oscilaciones no está limitado en el tiempo. Está claro que esto sólo da una idea aproximada del proceso real.

Las oscilaciones periódicas libres que se realizan según la ley armónica con una frecuencia, cuando la relación de los desplazamientos de dos puntos cualquiera en cualquier momento de tiempo no varía, se llaman *propias*, y las formas de las oscilaciones que les corresponden, *propias* o *principales*.

Si sobre el sistema actúa continuamente cierta carga dinámica $P(t)$, entonces ésta ha de comunicar continuamente la energía al sistema y provocar su movimiento. Tales movimientos se denominan *forzados*.

Si los movimientos provocados por la carga dinámica varían, dentro de un lapso de tiempo examinado, su dirección más de una vez, entonces tal movimiento se denomina oscilación forzada.

Al existir las fuerzas de resistencia, una parte de la energía transmitida al sistema por la carga dinámica se gasta para su superación, y sólo la parte restante de la energía se gasta para el movimiento del sistema. En los casos cuando es deseable reducir el desplazamiento del sistema originado por la carga, es necesario aumentar las fuerzas de resistencia.

La relación del valor dinámico de cualquier magnitud (desplazamiento, reacción, fuerza interior, etc.) a su valor estático partiendo de una carga máxima dada, considerándola estática, se llamará coeficiente dinámico para la magnitud dada.

CAPÍTULO 2 * SISTEMAS CON UN GRADO DE LIBERTAD

§ 5. ECUACIONES DIFERENCIALES DE MOVIMIENTOS. Examinemos el sistema con un grado de libertad en forma de una viga imponderable con la masa concentrada m, prescindiendo del desplazamiento horizontal y del giro (fig. 8). Con tales premisas, la masa m puede trasladarse sólo por la vertical y, por consiguiente, el sistema tiene un grado de libertad.

Investigaremos el movimiento de la masa m a partir de su posición inicial de equilibrio (fig. 8, *a*) considerando positivos los desplazamientos hacia abajo. Supongamos que sobre la viga actúa la carga dinámica $P(t)$ (fig. 8, *b*), la cual pone en movimiento a la viga y a la masa situada sobre ésta. Examinemos aquel momento del movimiento de la masa m, cuando ésta se desplaza hacia abajo, es decir, hacia el lado de sus desplazamientos adoptados como positivos. En este mismo momento la viga actúa sobre la masa con cierta fuerza R dirigida en la misma dirección. Consideraremos que la velocidad y la aceleración de la masa son positivas. Separemos la masa m de la viga (fig. 9) y apliquemos a la masa la fuerza R y también la fuerza negativa de resistencia al movimiento P^* dirigida contra el movimiento de la masa, es decir, hacia arriba. Además, según el principio de D'Alembert, apliquemos la fuerza de inercia de la masa $m\ddot{y}$ también dirigida hacia arriba.

Compongamos, directamente a base del plano o según la expresión (1.3), la condición de equilibrio dinámico de la masa m:

$$R = m\ddot{y} + P^*. \tag{2.1}$$

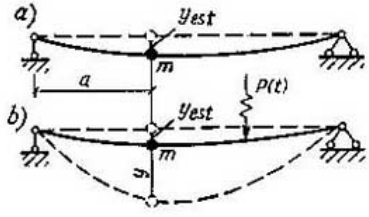


Fig. 8

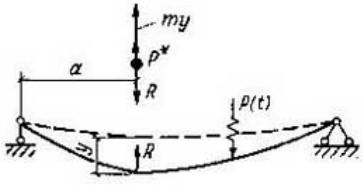


Fig. 9

Escribamos el desplazamiento de la masa a través del desplazamiento de la viga en la siguiente forma:

$$y = -\delta_{11}R + \Delta_{1p}(t), \tag{2.2}$$

donde δ_{11} es el desplazamiento de la viga en el lugar de ubicación de la masa m debido a la fuerza $P = 1$, dirigida en caso general en dirección del movimiento de la masa (aquí debido a la fuerza vertical), aplicada a la masa (fig. 10); $\Delta_{1p}(t)$, el desplazamiento análogo debido a la carga dinámica dada.

Ahora resta por unir las expresiones obtenidas, lo que es posible hacer mediante dos métodos. Esto permitirá en adelante aplicar los métodos conocidos de la mecánica de construcción: el método de fuerzas y el de desplazamientos.

El primer método consiste en investigar el equilibrio de la masa m según la expresión (2.1), para la cual la fuerza R se determina por (2.2):

$$-\frac{y-\Delta_{1p}(t)}{\delta_{11}} = m\ddot{y} + P^*$$

o bien,

$$\ddot{y} + \frac{P^*}{m} + \omega^2 y = \omega^2 \Delta_{1p}(t), \tag{2.3}$$

donde

$$\omega^2 = \frac{1}{m\delta_{11}}. \tag{2.4}$$

El segundo método se funda en la investigación de los desplazamientos de la masa m según la expresión (2.2), para el cual la fuerza R se determina por (2.1). Haciendo esta operación no complicada, llegaremos de nuevo a la ecuación (2.3). En los sistemas con un grado de libertad, ambos métodos de componer la ecuación de movimiento de la masa llevan a la misma ecuación (2.3). En los sistemas con varios grados de libertad, las ecuaciones de movimiento de tales masas concentradas resultan diferentes (véase el capítulo 3).

La ecuación (2.3) es la ecuación diferencial del movimiento forzado de la masa m. A partir de ésta se obtiene la ecuación diferencial de las oscilaciones libres de la masa si se considera que $\Delta_{1p}(t) = 0$, es decir,

$$\ddot{y} + \frac{P^*}{m} + \omega^2 y = 0. \tag{2.5}$$

Ambos métodos examinados de composición de la ecuación de movimiento de la masa pueden ilustrarse empleando los métodos estáticos de cálculo al sistema dado con un enlace elástico linealmente deformable puesto complementariamente, por ejemplo, en forma de un muelle en dirección del movimiento de la masa m, cuya reacción debe sustituir la acción de la masa sobre la viga, es decir, la fuerza R. Pongamos el muelle de tal manera que se comprima con desplazamiento positivo de la masa hacia abajo y aplique

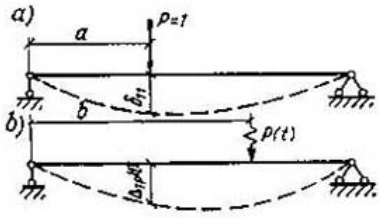


Fig. 10

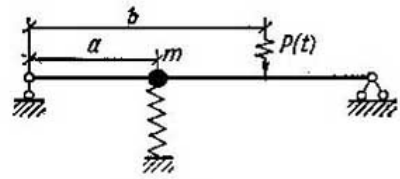


Fig. 11

a la viga la fuerza R dirigida en contra del movimiento de la masa, es decir, hacia arriba (fig. 11). En este caso

$$R = m\ddot{y} + P^* = cy. \tag{2.6}$$

La rigidez del muelle a partir de la fórmula (2.6) es,

$$c = \frac{m\ddot{y} + P^*}{y} \text{ N/m}. \tag{2.7}$$

Al introducir en el sistema tal enlace elástico, el problema dinámico está reducido al estático y consiste en determinar la reacción del enlace elástico igual a la fuerza dinámica que actúa sobre la viga en el lugar de ubicación de la masa m.

El enlace elástico introducido en el sistema invariable lo hace siempre estáticamente indeterminado, ya que aumenta en una unidad el grado de indeterminación estática del sistema inicial.

La investigación del sistema hiperestático obtenido, puede ser realizada valiéndose de los métodos principales de la mecánica de construcción: el método de fuerzas y el de desplazamientos.

Aplicación del método de fuerzas. Obtenemos el sistema básico eliminando el enlace elástico introducido (fig. 12). Por la incógnita tomamos la fuerza X_1 dirigida, para la concordancia de los signos con la expresión (2.3), hacia abajo, es decir, hacia el lado de los desplazamientos positivos de la masa m. La ecuación canónica será:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = -\frac{X_1}{c} \tag{2.8}$$

o bien

$$\left(\delta_{11} + \frac{1}{c}\right) X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

Si el movimiento de la masa fuera conocido, entonces según (2.7) sería conocida también la rigidez del muelle y la ecuación canónica (2.8) sería simplemente algebraica. Pero, puesto que el movimiento es desconocido y la rigidez del muelle se determina según (2.7) en forma diferencial, entonces también la ecuación canónica (2.8) será en forma diferencial. En efecto, introduciendo (2.7) en (2.8) y to-

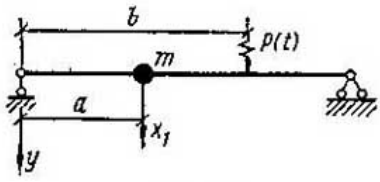


Fig. 12

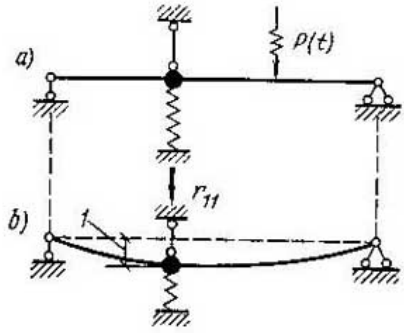


Fig. 13

mando en consideración que $X_1 = -(m\ddot{y} + P^*)$ se obtendrá:

$$-\left(\delta_{11} + \frac{y}{m\ddot{y} + P^*}\right)(m\ddot{y} + P^*) + \Delta_{1p} = 0.$$

Después de simples transformaciones llegaremos a la ecuación (2.3).

Puesto que la ecuación canónica del método de fuerzas no es sino la suma de los desplazamientos, entonces el cálculo del sistema por el método de fuerzas lo ilustra el segundo método de composición de la ecuación de movimiento de la masa m.

Aplicación del método de desplazamientos. Obtenemos el sistema básico introduciendo en el sistema un enlace rígido en forma de barra en dirección del movimiento de la masa (fig. 13, *a*). El corrimiento positivo de la masa $y = Z_1$ está dirigido hacia abajo.

La ecuación canónica será:

$$r_{11}Z_1 + R_{1p}(t) = 0, \tag{2.9}$$

donde $r_{11} = (r_{11}^* + c)$ es la reacción específica del enlace rígido introducido durante su desplazamiento en una unidad hacia abajo (fig. 13, *b*); r_{11}^*, la reacción debida sólo a la fuerza elástica de resistencia de la viga, llamada fuerza de recuperación.

La reacción r_{11}^* está unida con el desplazamiento δ_{11} por medio de la dependencia inversa, es decir, $r_{11}^* = 1/\delta_{11}$.

Tomando en consideración la expresión de r_{11}, el valor $Z_1 = y$, e introduciendo (2.7) en (2.9) se obtendrá:

$$r_{11}^* y + m\ddot{y} + P^* + R_{1p}(t) = 0. \tag{2.10}$$

La ecuación (2.10) es la ecuación diferencial del desplazamiento forzado de la masa m en una forma diferente de la ecuación (2.3). Empero, considerando que en el sistema con un grado de libertad $r_{11}^* = 1/\delta_{11}$ y $R_{1p}(t) = -\Delta_{1p}(t)/\delta_{11}$, la ecuación (2.10) se transforma en la (2.3).

Puesto que la ecuación canónica del método de desplazamientos representa la suma de las fuerzas, entonces el cálculo del sistema con un enlace elástico introducido según el método de desplazamientos ilustra el primer método de composición de la ecuación de movimiento.

La composición de las ecuaciones de movimiento de la masa m con la ayuda de estos dos métodos es adoptable también para los sistemas con varios grados de libertad (capítulo 3), donde las ecuaciones de movimiento, como se ha señalado, ya serán diferentes.

Para concluir, mostraremos la aplicación del método energético para obtener la ecuación diferencial de oscilaciones libres de la masa sin considerar las fuerzas de resistencia.

La energía cinética de la masa es,

$$K = \frac{m}{2} (\dot{y})^2.$$

La energía potencial del sistema expresada por el desplazamiento de la masa es,

$$V = \frac{1}{2} (r_{11}^* y)\, y = \frac{y^2}{2\delta_{11}}.$$

La igualdad principal del método energético [véase la ecuación (1.8)] será:

$$\frac{m}{2} (\dot{y})^2 + \frac{y^2}{2\delta_{11}} = C = \text{const}.$$

Diferenciando respecto al tiempo se obtendrá

$$m\dot{y}\,\ddot{y} + \frac{y}{\delta_{11}}\,\dot{y} = 0.$$

Después de simplificar en $\dot{y}$ se tendrá la ecuación (2.5).

§ 6. OSCILACIONES LIBRES DEL SISTEMA SIN CONSIDERAR LAS FUERZAS DE RESISTENCIA. La ecuación diferencial de oscilaciones libres sin considerar las fuerzas de resistencia se determina por la expresión (2.5) para $P^* = 0$:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0,$$

donde

$$\omega^2 = \frac{1}{m\delta_{11}} = \frac{r_{11}^*}{m}.$$

Su solución que expresa el desplazamiento de la masa será:

$$y_{11b} = A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t. \qquad (2.11)$$

La velocidad de desplazamiento de la masa es,

$$\dot{y}_{11b} = \omega A \cos \omega t - \omega B \operatorname{sen} \omega t. \qquad (2.12)$$

Expresemos las constantes de integración a través de los parámetros iniciales del movimiento, los cuales para $t = 0$ serán $y = y\,(0)$; $\dot{y} = \dot{y}\,(0) = v\,(0)$. De acuerdo con (2.11) y (2.12) se tendrá:

$$B = y_{11b}\,(0) = y\,(0);\ A = v_{11b}\,(0) :\ \omega = v\,(0) : \omega.$$

Ahora la ecuación de movimiento (2.11) será:

$$y_{11b} = y\,(0)\cos\omega t + \frac{v\,(0)}{\omega}\operatorname{sen}\omega t. \qquad (2.13)$$

Si en (2.11) se adopta $A = C\cos\varphi$ y $B = C\operatorname{sen}\varphi$, entonces la obtendremos en la siguiente forma:

$$y_{11b} = C\operatorname{sen}(\omega t + \varphi), \qquad (2.14)$$

donde C es la amplitud de las oscilaciones; φ, el desfasaje.

La velocidad de movimiento es,

$$\dot{y}_{11b} = C\omega\cos(\omega t + \varphi). \qquad (2.15)$$

Las constantes arbitrarias expresadas por medio de los parámetros iniciales se determinan según las fórmulas:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{y^2(0) + \frac{v^2(0)}{\omega^2}}; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{B}{A} = \frac{y\,(0)\,\omega}{v\,(0)}. \qquad (2.16)$$

De las expresiones (2.11), (2.13) y (2.14) se desprende que el movimiento de la masa son oscilaciones armónicas con el período $T = 2\pi/\omega$, siendo ω la frecuencia circular, y la amplitud $C = \sqrt{y^2(0) + \frac{v^2(0)}{\omega^2}}$. Esas oscilaciones, si no se cuenta con las fuerzas de resistencia, son inamortiguadas.

Así pues, en el sistema con un grado de libertad, *las oscilaciones libres son siempre oscilaciones propias* con un período y una frecuencia que no dependen de las condiciones iniciales del movimiento, mientras que la amplitud y la fase inicial de oscilaciones sí depende de éstas.

Escribamos diferentes expresiones para las frecuencias y los períodos de propias oscilaciones verticales de la masa, teniendo en cuenta que en este caso

$$m = G : g \text{ y } G\delta_{11} = y_{est},$$

donde G es la fuerza de gravedad; g, la aceleración de la gravedad; y_{est}, el desplazamiento estático de la masa debido a la fuerza de gravedad G; δ_{11}, el desplazamiento específico de la masa debido a la fuerza $P = 1$ aplicada a la masa en dirección de su movimiento.

La frecuencia circular es,

$$\omega^2 = \frac{1}{m\delta_{11}} = \frac{r_{11}^*}{m} = \frac{g}{y_{est}}\left(\frac{1}{c^2}\right). \qquad (2.17)$$

El período es,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{m\delta_{11}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{r_{11}^*}} = 2\pi\sqrt{\frac{y_{est}}{g}}\,c. \qquad (2.18)$$

La frecuencia en hertzios es,

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{m\delta_{11}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{r_{11}^*}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{y_{est}}}\ 1/c. \quad (2.18')$$

La frecuencia f es el número de oscilaciones por segundo, y la frecuencia circular ω, respectivamente por 2π segundos.

Huelga señalar que cuanto más grande es la rigidez del sistema, tanto menor es δ_{11} y, por consiguiente, tanto mayor es la frecuencia de oscilaciones propias.

El número de oscilaciones por minuto se determina según la fórmula

$$n = \frac{60}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{y_{est}}}.$$

Considerando en ésta que $g = 981 \approx (10\pi)^2$ se tendrá

$$n = \frac{300}{\sqrt{y_{est}}}. \quad (2.19)$$

donde y_{est} es en cm. Esta fórmula tiene amplio uso en la práctica.

En el caso de oscilaciones de torsión y rotación, se debe poner en las fórmulas (2.17) y (2.18) en vez de la masa m, su momento de inercia con respecto al eje de rotación, sobreentendiendo que δ_{11} es el ángulo de giro o torsión de la masa debido al momento $M = 1$ aplicado a ésta.

Tanto la frecuencia ω como respectivamente el período $T = 2\pi/\omega$ son las principales características dinámicas del sistema.

Si un sistema con un grado de libertad tiene varias masas puntuales fijadas mediante un desplazamiento lineal generalizado (coordenada generalizada), entonces para utilizar las fórmulas (2.17) y (2.18) hay que sobreentender por m la masa reducida M_1 determinada según (1.7).

Ejemplo 1. Obtener la fórmula para la frecuencia circular de oscilaciones libres de la masa m suspendida del muelle (véase la fig. 4, *a*), si la rigidez de éste es igual a c, N/m. Aplicando a la masa la fuerza vertical $P = 1$ se tendrá $\delta_{11} = 1/c$. Según la fórmula (2.17)

$$\omega^2 = \frac{1}{m\delta_{11}} = \frac{c}{m}.$$

Ejemplo 2. Obtener la fórmula para la frecuencia de oscilaciones libres verticales de cimiento sobre base elástica (fig. 14, *a*) con un coeficiente de lecho k, N/m³.

Apliquemos al cimiento la fuerza vertical $P = 1$ (fig. 14, *b*) y hallemos el desplazamiento vertical de la cimentación debido a ésta $\delta_{11} = 1/kab$. Según la fórmula (2.17) $\omega^2 = kab/m$. Puesto que

$$m = \frac{G}{g} = \gamma\frac{abh}{g}, \quad \text{entonces} \quad \omega^2 = \frac{kg}{\gamma h},$$

donde γ es la densidad media de la mampostería del cimiento.

Ejemplo 3. Obtener la fórmula para la frecuencia de oscilaciones libres de torsión de un árbol con disco (fig. 15) prescindiendo de la masa del árbol.

Para el disco con un espesor constante

$$J_m^* = \int_0^{D/2} \frac{\gamma h}{g} 2\pi\rho\, d\rho\, \rho^2 = \frac{\pi\gamma h}{g} \cdot \frac{D^4}{32};$$

$$\delta_{11} = \frac{1 \cdot l}{GJ_\rho} = \frac{l \cdot 32}{G\pi d^4}.$$

Según la fórmula (2.17)

$$\omega^2 = \frac{G\pi d^4}{32 l J_m} = \frac{G\, d^4 g}{l\gamma h D^4},$$

siendo γ la densidad media del material del disco.

Ejemplo 4. Obtener la fórmula para la frecuencia de oscilaciones libres de una viga empotrada por un extremo, con la masa m en el extremo (fig. 16, *a*), menospreciando la masa de la viga, $\delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ}$ (fig. 16, *b*);

$$\omega = \sqrt{\frac{3EJ}{ml^3}}.$$

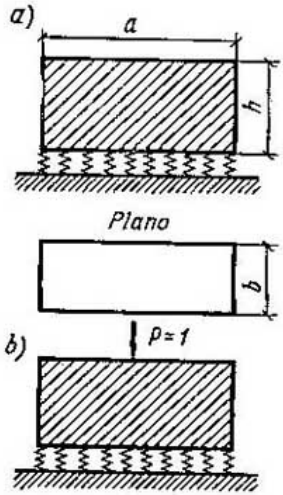


Fig. 14

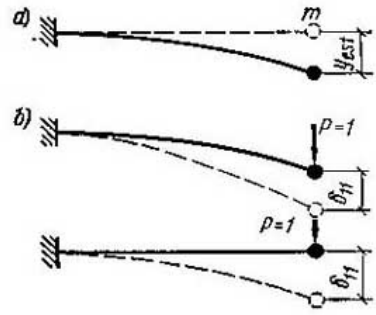


Fig. 16

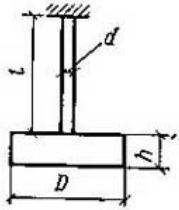


Fig. 15

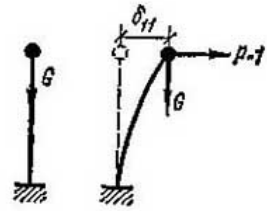


Fig. 17

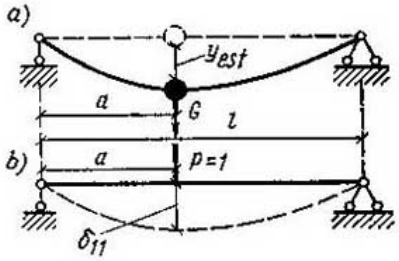


Fig. 18

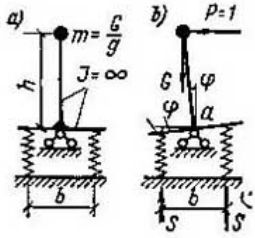


Fig. 19

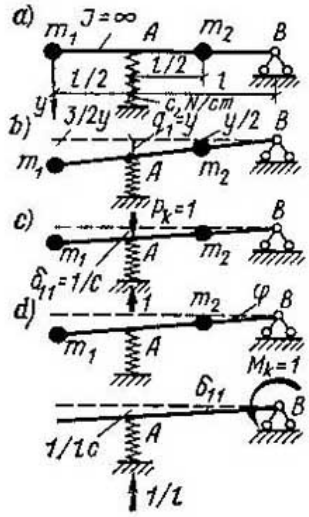


Fig. 20

Ejemplo 5. Obtener la fórmula aproximada para la frecuencia de oscilaciones libres de un montante con la masa en el extremo libre (fig. 17) prescindiendo de la masa del montante.

La masa sobre el montante puede hacer oscilaciones horizontales, hallándose en este caso el montante en condiciones de flexión compuesta. Esto quiere decir que δ_{11} debe determinarse considerando la compresión del montante por la fuerza de gravedad de la masa G.

Utilizando la fórmula aproximada de la flexión compuesta se tendrá:

$$\delta_{11}=\frac{l^3}{3EJ}:\left(1-\frac{G}{P_e}\right)=l^3:3EJ\left(1-\frac{mg}{P_e}\right).$$

La frecuencia de oscilaciones libres según (2.17) es,

$$\omega=\sqrt{3EJ\left(1-\frac{mg}{P_e}\right):ml^3},$$

donde $P_e=\frac{\pi^2EJ}{4l^2}$ es la fuerza de Euler.

Ejemplo 6. Determinar la frecuencia de oscilaciones libres de una viga elástica sobre dos apoyos con carga G (fig. 18, *a*) teniendo los siguientes datos: $l = 2$ m, $a = 1$ m; $E = 2 \cdot 10^{11}$ (Pa); $J = 100$ cm^4; $G = 7500$ N; adoptar para simplificar los cálculos que aproximadamente $g \approx 10$ m/s^2, prescindiendo del propio peso de la viga.

Obtendremos primeramente la fórmula de la frecuencia en forma general. El desplazamiento vertical δ_{11} debido a $P = 1$ (fig. 18, *b*) será:

$$\delta_{11} = a^2 (l - a)^2 : 3lEJ.$$

La frecuencia de oscilaciones libres es,

$$\omega=\frac{1}{a(l-a)}\sqrt{\frac{3EJl}{m}}.$$

Para nuestro caso la masa es,
$m = G/g = 7500/10$ kg $= 750$ kg;

$$\omega = \frac{1}{1\,(2-1)}\sqrt{\frac{3\cdot 2\cdot 10^{11}\,(100\cdot 10^{-8})2}{750}}\,c^{-1} = 40c^{-1},$$

Ejemplo 7. Determinar la frecuencia de oscilaciones del sistema (fig. 19) menospreciando el peso de las barras.

El sistema puede girar alrededor del apoyo a (fig. 19, a). La masa m, siendo pequeños los ángulos de giro, se trasladará horizontalmente. Por eso para determinar δ_{11} aplicamos la fuerza horizontal $P = 1$ (fig. 19, b).

La condición de equilibrio del sistema en estado desplazado con ángulos pequeños será:

$$\sum M_a = -1h - Gh\varphi + Sb = 0,$$

donde S es el esfuerzo en el muelle, para el cual $S = k\Delta = k\,\frac{b}{2}\,\varphi$. Por consiguiente, la condición de equilibrio será:

$$-h - Gh\varphi + \frac{kb^2}{2}\,\varphi = 0.$$

De aquí $\varphi = h:\left(\frac{kb^2}{2} - Gh\right)$ y, respectivamente, $\delta_{11} = \varphi h = \dfrac{h^2}{\frac{kb^2}{2} - Gh}$.

La frecuencia de oscilaciones según (2.17) es,

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{kb^2}{2} - Gh\right) : mh^2}.$$

Para $Gh = kb^2/2$ la frecuencia de oscilaciones será igual a cero. Esto testimonia que, con tales condiciones, el sistema se halla en equilibrio inestable.

Ejemplo 8. Determinar la frecuencia de propias oscilaciones del sistema (fig. 20). Hagamos la solución en tres variantes:

1ra variante [aplicación de la expresión (1.3)]. Para nuestro sistema

$$Q_1 + J_1^* = 0. \qquad (a)$$

Tomamos por desplazamiento (coordenada) generalizado $q_1 = y$, el desplazamiento lineal del punto A contado a partir del estado estático del sistema (fig. 20, b). Componemos las dependencias de las coordenadas y_i según (1.6) para las masas en función del desplazamiento generalizado adoptado y:

$$y_1 = \frac{3}{2}\,y; \quad y_2 = \frac{1}{2}\,y.$$

Respectivamente tenemos,

$$\frac{\partial y_1}{\partial y} = \frac{3}{2}; \quad \frac{\partial y_2}{\partial y} = \frac{1}{2};$$

$$\ddot{y}_1 = \frac{3}{2}\,\ddot{y}; \quad \ddot{y}_2 = \frac{1}{2}\,\ddot{y}. \qquad (b)$$

Sobre el sistema, durante su desplazamiento, actúan las fuerzas del peso de las masas $m_1 g$, $m_2 g$, la reacción de éstas en el muelle, igual a $\left(\frac{3}{2}\,m_1 g + \frac{1}{2}\,m_2 g\right)$, que tuvo lugar antes del desplazamiento, y la fuerza complementaria en el muelle debida al desplazamiento generalizado y e igual a $-cy$. La reacción en el apoyo B, como no se desplaza, no nos interesa.

Por eso a base de (1.4) podemos escribir lo siguiente:

$$Q_1 = m_1 g \frac{\partial y_1}{\partial y} + m_2 g \frac{\partial y_2}{\partial y} - \left(\frac{3}{2} m_1 g + \frac{1}{2} m_2 g + cy \right) \frac{\partial y}{\partial y}$$

o bien,

$$Q_1 = m_1 g \frac{3}{2} + m_2 g \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{2} m_1 g + \frac{1}{2} m_2 g + cy \right) 1 = -cy. \qquad (c)$$

Ahora según la fórmula (1.5) tenemos,

$$J_1^* = -m_1 \ddot{y}_1 \frac{\partial y_1}{\partial y} - m_2 \ddot{y}_2 \frac{\partial y_2}{\partial y}$$

Tomando en consideración la expresión (b), tenemos que

$$J_1^* = -m_1 \frac{3}{2} \ddot{y} \frac{3}{2} - m_2 \frac{1}{2} \ddot{y} \frac{1}{2}. \qquad (d)$$

Introduciendo las expresiones (c) y (d) en la ecuación (a) se tendrá

$$-cy - \ddot{y} \left(m_1 \frac{9}{4} + m_2 \frac{1}{4} \right) = 0$$

o bien,

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0,$$

donde,

$$\omega^2 = c : \left(\frac{9}{4} m_1 + \frac{1}{4} m_2 \right). \qquad (e)$$

2^{da} **variante** [aplicación de la fórmula (2.17)]. Hallamos según la fórmula (1.7) la masa reducida:

$$M_1 = -J_1^* : \ddot{y} = \frac{9}{4} m_1 + \frac{1}{4} m_2.$$

Para determinar δ_{11} aplicamos en el punto A del sistema la fuerza vertical $P_k = 1$ en dirección del desplazamiento generalizado (fig. 20, *c*). Según la fórmula (2.17), para $\delta_{11} = 1 : c$, se tendrá

$$\omega^2 = \frac{1}{M_1 \delta_{11}} = \frac{c}{\frac{9}{4} m_1 + \frac{1}{4} m_2},$$

lo que coincide con la ecuación (e).

3^{ra} **variante** [aplicación de la fórmula (2.17) para la rotación]. Tomamos aquí por desplazamiento generalizado el ángulo de giro φ de la vigueta horizontal con respecto al apoyo B (fig. 20, *d*). Para determinar δ_{11}, en este caso se debe aplicar en el apoyo B el momento $M = 1$ (fig. 20, *e*):

$$\delta_{11} = 1 : cl^2.$$

El momento de inercia de las masas al girar alrededor del apoyo B, es,

$$J^* = m_1 \left(\frac{3}{2} l \right)^2 + m_2 \left(\frac{l}{2} \right)^2.$$

Según la fórmula (2.17)

$$\omega^2 = \frac{1}{J^* \delta_{11}} = \frac{cl^2}{\frac{9}{4} m_1 l^2 + \frac{1}{4} m_2 l^2},$$

lo que coincide con la ecuación (e).

§ 7. OSCILACIONES LIBRES DEL SISTEMA CONSIDERANDO LAS FUERZAS DE RESISTENCIA. Las resistencias al movimiento surgen debido a diferentes causas exteriores e interiores, a saber: la resistencia al movimiento del medio ambiente, la fricción en los lugares de empalme de elementos y en las piezas de apoyo, la resistencia interior no elástica de los materiales, etc.

En virtud de este hecho, la energía del sistema se gasta para vencer tales resistencias en forma irreversible, las envergaduras de oscilaciones iguales a dobles amplitudes, cada vez van disminuyendo y el proceso de oscilaciones es amortiguado (fig. 21).

De medida de amortiguación de las oscilaciones puede servir, por ejemplo, la relación de las amplitudes de oscilaciones dentro de un período:

$$\eta = y_n : y_{n+1}. \tag{2.20}$$

Sin embargo, muchas veces en calidad de medida se utiliza el logaritmo de esa relación denominado decremento logarítmico de oscilaciones:

$$\delta = \ln \eta = \ln (y_n : y_{n+1}), \tag{2.21}$$

entonces,

$$\eta = (y_n : y_{n+1}) = e^{\delta} = 1 + \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \ldots \tag{2.22}$$

Como medida de amortiguación puede servir también el coeficiente ψ de absorción de la energía por un ciclo de oscilaciones, que representa la relación de la pérdida de la energía elástica por un ciclo con respecto a la energía elástica al principio del ciclo, es decir,

$$\psi = (V_n - V_{n+1}) : V_n, \tag{2.23}$$

donde V_n es la energía elástica al principio del ciclo; V_{n+1}, al final de éste.

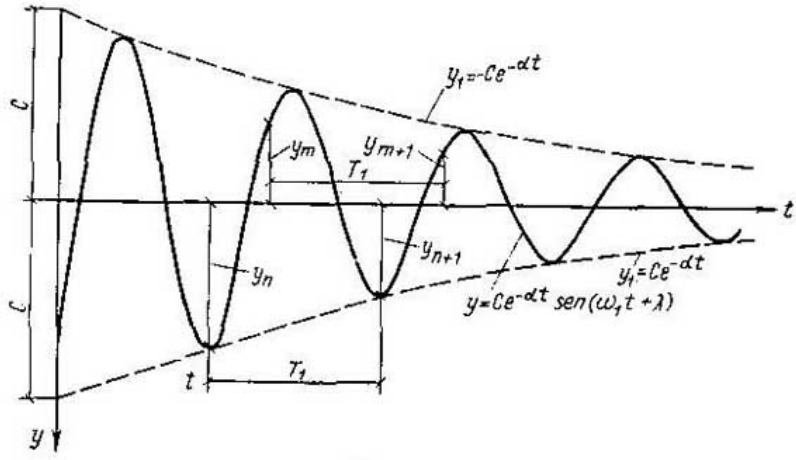


Fig. 21

Por inicio y final del ciclo se considera el momento, cuando la velocidad de movimiento de la masa y, por consiguiente, su energía cinética son iguales a cero. Las energías elásticas V_n y V_{n+1}, expresadas por medio de los desplazamientos de la masa y_n e y_{n+1} al principio y el final del ciclo, serán las siguientes:

$$V_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{y_n^2}{\delta_{11}}; \quad V_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y_{n+1}^2}{\delta_{11}}. \tag{2.24}$$

Ahora el coeficiente de absorción de la energía será:

$$\psi = 1 - \frac{y_{n+1}^2}{y_n^2} = 1 - e^{-2\delta}. \tag{2.25}$$

Después de desarrollar $e^{-2\delta}$ en serie, tendremos

$$\psi = 2\delta - \frac{(2\delta)^2}{2!} + \frac{(2\delta)^3}{3!} - \ldots \tag{2.26}$$

Obtendremos un valor más exacto del coeficiente de absorción si representamos el cambio de la energía por una función ininterrumpida $V(t)$, y componemos para ψ la expresión

$$\psi = -\int_t^{t+T_1} \frac{dV}{V} = \ln \frac{V_n}{V_{n+1}},$$

donde t es el tiempo de inicio del ciclo; $t + T_1$, el tiempo de su final.

Tomando en consideración (2.24) y (2.22) tenemos que

$$\psi = 2\delta. \tag{2.27}$$

Mediante las expresiones obtenidas se establece la relación entre el coeficiente de absorbción de la energía ψ (tabla 1) y el decremento logarítmico de oscilaciones δ.

Tabla 1. Valores del coeficiente de absorbción ψ para las estructuras de construcción (flexión transversal) [53]

Estructura	Valor de ψ		
	de	hasta	medio
Puentes de acero	0,02	0,30	0,17
Puentes de hormigón armado	—	—	0,63
Vigas de hormigón armado	0,35	0,78	0,56
Pórticos de hormigón armado	0,16	0,33	0,25
Entrepisos nervados de hormigón armado	0,39	0,78	0,57

La fuerza de resistencia al movimiento P^* considerada en el cálculo debe, hablando en general, reflejar integralmente todos los tipos de resistencia posibles en el caso concreto. Puesto que la fuerza de resistencia depende de muchas causas difícilmente adoptadas a la

elaboración teórica, su determinación analítica es dificultosa. Son conocidas diferentes hipótesis que consideran, por regla general, las influencias predominantes de tal o cual tipo de resistencia.

Examinemos la fuerza de resistencia proporcional a la velocidad: $P^* = \beta \dot{y}$, siendo β el coeficiente de proporcionalidad.

La suposición de que la resistencia es proporcional a la velocidad, a veces llamada resistencia viscosa, es actualmente objeto de una severa crítica. Sin embargo, la sencillez de esta suposición y un cuadro cualitativamente correcto del fenómeno obtenido en ciertos casos sobre su base al existir las fuerzas de resistencia, no han permitido todavía excluirla totalmente del uso. Por eso tal suposición sigue encontrándose tanto en la literatura soviética como en la de otros países. En este caso la ecuación diferencial (2.5) tendrá el siguiente aspecto:

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega^2 y = 0, \tag{2.28}$$

donde,

$$\alpha = \beta : 2m \ 1/\text{c}.$$

La ecuación característica es,

$$r^2 + 2\alpha r + \omega^2 = 0.$$

Sus raíces son,

$$r_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}; \quad r_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}.$$

El valor numérico de las raíces depende de la correlación entre α y ω.

1er caso: $\omega > \alpha$.

$$r_1 = -\alpha + i\omega_1; \ r_2 = -\alpha - i\omega_1; \ \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}.$$

Si las raíces son complejas conjugadas, la solución de la ecuación (2.28) será:

$$y_{11b} = e^{-\alpha t}(A \operatorname{sen} \omega_1 t + B \cos \omega_1 t), \tag{2.29}$$

donde,

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}; \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}}; \quad \alpha = \frac{\beta}{2m} = \frac{\beta\delta_{11}\omega^2}{2}.$$

Es fácil ver que los paréntesis en la fórmula (2.29) contienen una función periódica, puesto que al sumar a t la magnitud $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ el valor de esta función no varía numéricamente.

Por tanto, las oscilaciones libres amortiguadas pueden llamarse convencionalmente periódicas o amortiguadas periódicas con el período

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}. \tag{2.30}$$

Vamos a mostrar que los máximos-mínimos de y_{11b} (y_n e y_{n+1}, fig. 21) se sitúan también dentro del período T_1. Con este fin com-

pondremos la derivada de (2.29) y la igualaremos a cero:

$$\dot{y}_{11b} = -\alpha e^{-\alpha t}(A \operatorname{sen} \omega_1 t + B \cos \omega_1 t) + \\ + \omega_1 e^{-\alpha t}(A \cos \omega_1 t - B \operatorname{sen} \omega_1 t) = 0.$$

Esta expresión determinará el tiempo t, durante el cual y_{11b} es máximo o mínimo. Ella no varía, evidentemente, si al tiempo t le sumamos el período $T_1 = 2\pi/\omega_1$.

Si en (2.30) se considera $\alpha \to 0$, lo que significa la disminución de las fuerzas de resistencia, entonces obtendremos el período de oscilaciones propias sin considerar las fuerzas de resistencia, el cual es menor que el período considerándolas:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} < T_1.$$

Después de esto se puede representar (2.30) así:

$$T_1 = \frac{T}{\sqrt{1-\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2}} = T\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2 + \ldots\right]. \qquad (2.31)$$

Siendo pequeñas las resistencias, la frecuencia y el período de oscilaciones consideradas las fuerzas de resistencia, difieren poco de la frecuencia y el período de oscilaciones sin considerar las fuerzas de resistencia. Al mismo tiempo, por pequeñas que sean las resistencias, ellas van amortiguando las oscilaciones propias, lo que se desprende de la presencia del factor $e^{-\alpha t}$ en (2.29). Teóricamente, la amortiguación total llegará cuando $t = \infty$, pero esto contradice a la experiencia que muestra que la amortiguación sucede bastante rápidamente, es decir, evidencia sobre uno de los lados viciosos de la hipótesis dada.

Hallemos la frecuencia de oscilaciones en hertzios:

$$f = \frac{1}{T_1} = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}{2\pi} \text{ 1/s}. \qquad (2.32)$$

Multiplicando por 2π obtendremos la frecuencia circular:

$$\frac{2\pi}{T_1} = \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} \text{ 1/s}. \qquad (2.33)$$

Si se asigna, igual que antes, $A = C \cos \varphi$ y $B = C \operatorname{sen} \varphi$ [véase (2.14)], entonces se puede representar la ecuación de las oscilaciones (2.29) así:

$$y_{11b} = e^{-\alpha t} C \operatorname{sen}(\omega_1 t + \varphi), \qquad (2.34)$$

donde,

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A}.$$

Las constantes arbitrarias A y B o C y φ se determinan por las condiciones iniciales del movimiento con $t = 0$. Si el proceso de oscilaciones según (2.34) se representa en forma de un diagrama,

entonces obtendremos un cuadro mostrado en la fig. 21. La envolvente de las oscilaciones, mostrada en el plano con punteado, puede ser determinada por la ecuación

$$y_1 = \pm Ce^{-\alpha t}. \tag{2.35}$$

Mostrémoslo diferenciando las expresiones (2.34) y (2.35):

$$\dot{y}_{11b} = C\left[-\alpha e^{-\alpha t}\operatorname{sen}(\omega_1 t + \varphi) + e^{-\alpha t}\omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi)\right];$$

$$\dot{y}_1 = \mp \alpha C e^{-\alpha t}.$$

En aquellos momentos cuando $\operatorname{sen}(\omega_1 t^* + \varphi) = \pm 1$; $\cos(\omega_1 t^* + \varphi) = 0$ se tendrá:

$$y_{11b} = \pm Ce^{-\alpha t^*}; \quad \dot{y}_{11b} = \mp \alpha C e^{-\alpha t^*};$$

$$y_1 = \pm Ce^{-\alpha t^*}; \quad \dot{y}_1 = \mp \alpha C e^{-\alpha t^*}.$$

Esto quiere decir que la envolvente de y_1 toca la curva de oscilaciones de y en aquellos puntos donde $\operatorname{sen}(\omega_1 t + \varphi) = \pm 1$, un poco desplazada hacia la derecha de la amplitud de oscilaciones, correspondiente al extremo de (2.34). La relación de las amplitudes y, en general, de las ordenadas de las oscilaciones dentro de un período es igual a

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{e^{-\alpha t}(A\operatorname{sen}\omega_1 t + B\cos\omega_1 t)}{e^{-\alpha(t+T_1)}[A\operatorname{sen}\omega_1(t+T_1) + B\cos\omega_1(t+T_1)]} = \frac{y_m}{y_{m+1}} = e^{\alpha T_1}.$$

Aquí esta relación es una magnitud constante. El decremento logarítmico de oscilaciones será:

$$\delta = \ln\frac{y_n}{y_{n+1}} = \alpha T_1, \tag{2.36}$$

de donde,

$$\beta = 2\alpha m = 2\frac{\delta}{T_1}m = \frac{2\delta m\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}{2\pi}.$$

Esto quiere decir que la resistencia depende de la frecuencia de oscilaciones.

De las expresiones anteriormente obtenidas se desprende lo siguiente:

1) las fuerzas de resistencia disminuyen la frecuencia de oscilaciones propias;

2) la frecuencia de oscilaciones no depende de la amplitud;

3) las amplitudes de oscilaciones siempre van disminuyendo, y las oscilaciones se amortiguan.

Representemos ahora la ecuación de las oscilaciones (2.29) expresada por medio de los parámetros iniciales. Vamos a suponer que con $t = 0$ $y = y(0)$ (desplazamiento inicial de la masa) e $\dot{y} = \dot{y}(0) = v(0)$ (su velocidad inicial). Con este propósito compondremos según (2.29) las soluciones particulares (integrales) que satis-

facen la matriz unitaria:

$$y_1(0) = 1;\ \dot{y}_1(0) = 0;$$

$$y_2(0) = 0;\ \dot{y}_2(0) = 1.$$

Vamos a componer la derivada de (2.29):

$$\dot{y}_{11b} = -\alpha e^{-\alpha t}(A \operatorname{sen} \omega_1 t + B \cos \omega_1 t) + \\ + e^{-\alpha t}(\omega_1 A \cos \omega_1 t - \omega_1 B \operatorname{sen} \omega_1 t). \qquad (2.37)$$

Al determinar las soluciones particulares de y_1 e y_2 se debe componer según las ecuaciones (2.29) y (2.37) las condiciones de la matriz unitaria. Así, por ejemplo, para la solución particular de y_1 esas condiciones serán:

$$1 = B;\ 0 = -\alpha B + \omega_1 A.$$

A partir de éstas se obtiene: $B = 1$; $A = \alpha/\omega_1$.

Por consiguiente, la solución particular de y_1 según (2.29) será:

$$y_1 = e^{-\alpha t}\left(\cos \omega_1 t + \frac{\alpha}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t\right).$$

Así mismo encontramos la solución particular para y_2. En este caso

$$0 = B;\ 1 = -\alpha B + \omega_1 A.$$

Entonces, $B = 0$ y $A = 1/\omega_1$.

La solución particular $y_2 = e^{-\alpha t}\dfrac{\operatorname{sen} \omega_1 t}{\omega_1}$.

La solución general (integral total) de la ecuación (2.28) es,

$$y_{11b} = Cy_1 + Dy_2 = Ce^{-\alpha t}\left(\cos \omega_1 t + \frac{\alpha}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t\right) + De^{-\alpha t}\frac{\operatorname{sen} \omega_1 t}{\omega_1}. \qquad (2.38)$$

Componemos las condiciones iniciales del movimiento con $t = 0$:

$$y(0) = Cy_1(0) + Dy_2(0) = C;$$

$$\dot{y}(0) = v(0) = C\dot{y}_1(0) + D\dot{y}_2(0) = D. \qquad (2.39)$$

Ahora la ecuación (2.28) será:

$$y_{11b} = e^{-\alpha t}\left[y(0)\left(\cos \omega_1 t + \frac{\alpha}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t\right) + \frac{v(0)}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t\right]. \qquad (2.40)$$

2do caso: $\alpha > \omega$.

Las raíces de la ecuación característica son:

$$r_1 = -\alpha + \omega_2 < 0;\ r_2 = -\alpha - \omega_2 < 0,$$

donde $\omega_2 = \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$.

Las raíces son reales, pero diferentes. La integral de la ecuación (2.28) tiene el siguiente aspecto:

$$y_{IIb} = Ce^{(-\alpha+\omega_2)t} + De^{(-\alpha-\omega_2)t} = e^{-\alpha t}(Ce^{\omega_2 t} + De^{-\omega_2 t}).$$

Puede representarse de la siguiente manera:

$$y_{IIb} = e^{-\alpha t}(A \operatorname{sh} \omega_2 t + B \operatorname{ch} \omega_2 t). \qquad (2.41)$$

En este caso el movimiento no será oscilatorio. La masa desviada irá aproximándose poco a poco a su posición de partida. En ciertas condiciones (véase [1]) la masa puede una vez pasar a través de la posición de equilibrio y regresar a ésta por el otro lado. El movimiento determinado por (2.41) se denomina aperiódico.

3er caso: $\alpha = \omega$.

$$r_1 = -\alpha; \; r_2 = -\alpha.$$

Las raíces de la ecuación característica son reales e iguales, la integral de la ecuación (2.28) será:

$$y_{IIb} = e^{-\alpha t}(A + Bt). \qquad (2.42)$$

El movimiento también es aperiódico.

Se utiliza el caso cuando $\alpha \geqslant \omega$ si se quieren evitar oscilaciones.

§ 8. OSCILACIONES FORZADAS DEBIDO AL IMPULSO CONSIDERANDO LA RESISTENCIA Y SIN CONSIDERARLA. Las oscilaciones de un sistema que se halla en estado de reposo antes de la acción del impulso pueden considerarse libres, una vez terminada su acción, con condiciones iniciales del movimiento provocadas por el impulso. Este transmite a la masa la velocidad v (0) y no provoca su desplazamiento y (0). En este caso v (0) $= S/m$, donde S es el impulso en N·m; m, la masa en kg. Entonces si se utiliza la ecuación (2.40), a partir de ésta se obtiene:

$$y_{for} = \frac{S}{m\omega_1} e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \omega_1 t. \qquad (2.43)$$

El movimiento será oscilatorio con la frecuencia y el período de propias oscilaciones.

Si el sistema es sujeto a la acción de diferentes impulsos S_i durante un tiempo t_i a partir del inicio de la acción del primer impulso, para el cual $t_1 = 0$, entonces su acción conjunta, en virtud de la linealidad de la ecuación diferencial de movimiento, se determina por la suma de la acción de los impulsos. El tiempo transcurrido desde la acción del impulso S_i hasta el momento examinado t será $t - t_i$. Por eso el desplazamiento y debido a ese impulso según la fórmula (2.43) es igual a

$$y_{for} = \frac{S_i}{m\omega_1} e^{-\alpha(t-t_i)} \operatorname{sen} \omega_1 (t - t_i).$$

Sumando la acción de todos los n impulsos se tendrá:

$$y_{\text{for}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{S_i}{m\omega_1} e^{-\alpha(t-t_i)} \operatorname{sen} \omega_1 (t - t_i). \qquad (2.44)$$

Si el sistema antes de la acción de los impulsos oscilaba libremente, entonces hay que añadir en (2.44) oscilaciones libres según (2.40):

$$y = y_{\text{lib}} + \frac{1}{m\omega_1} \sum_{i=1}^{n} S_i e^{-\alpha(t-t_i)} \operatorname{sen} \omega_1 (t - t_i). \qquad (2.45)$$

Considerando en (2.43) — (2.45) que $\alpha \to 0$ y $\omega_1 \to \omega$, obtendremos las expresiones correspondientes sin considerar la resistencia. El desplazamiento de la masa debido al impulso es,

$$y_{\text{for}} = \frac{S}{m\omega} \operatorname{sen} \omega t. \qquad (2.46)$$

Debido a varios impulsos es,

$$y_{\text{for}} = \frac{1}{m\omega} \sum_{i=1}^{n} S_i \operatorname{sen} \omega (t - t_i). \qquad (2.47)$$

Para varios impulsos y oscilaciones libres antes de ellos será:

$$y = y(0) \cos \omega t + \frac{v(0)}{\omega} \operatorname{sen} \omega t + \frac{1}{[m\omega]} \sum_{i=1}^{n} S_i \operatorname{sen} \omega (t - t_i). \qquad (2.48)$$

§ 9. ACCIÓN DE LOS IMPULSOS PERIÓDICOS SIN CONSIDERAR LA RESISTENCIA. Dejemos que los impulsos de igual magnitud S actúen dentro de cierto período T_S. El inicio del conteo de tiempo coincide con la acción del primer impulso. Entonces a base de (2.47) se tiene

$$y_{\text{for}} = \frac{S}{m\omega} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} \omega [t - (i-1) T_S].$$

Si el período de acción de los impulsos es igual al período de propias oscilaciones, es decir, $T_S = T = 2\pi/\omega$, entonces

$$y_{\text{for}} = \frac{S}{m\omega} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} [\omega t - (i-1) 2\pi] = \frac{S}{m\omega} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} \omega t.$$

Por consiguiente,

$$y_{\text{for}} = \frac{S}{m\omega} n \operatorname{sen} \omega t. \qquad (2.49)$$

La amplitud de oscilaciones $a = Sn/m\omega$ aumenta junto con el número de impulsos n. Tal fenómeno se llama resonancia.

Ejemplo 9. Determinar el movimiento del sistema sin contar con la resistencia debido a los tres impulsos S que actúan dentro de la mitad del período de oscilaciones libres (fig. 22, *a*). Obtendremos la ecuación del movimiento de la masa según (2.47):

1) $0 \leqslant t \leqslant T/2 = \pi/\omega$ (del primer impulso)

$$y_1 = \frac{S}{m\omega} \operatorname{sen} \omega t = a \operatorname{sen} \omega t;$$

2) $T/2 \leqslant t \leqslant T$ (de los dos impulsos)

$$y_2 = y_1 + a \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{T}{2}\right) = a \operatorname{sen} \omega t + a \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) = 0;$$

3) $T \leqslant t \leqslant 3T/2$ (de los tres impulsos)

$$y_3 = y_2 + a \operatorname{sen} \omega (t - T) = a \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{2\pi}{\omega}\right) = a \operatorname{sen} \omega t.$$

Los diagramas del movimiento se exponen en la fig. 22, *b*, *c*, *d*.

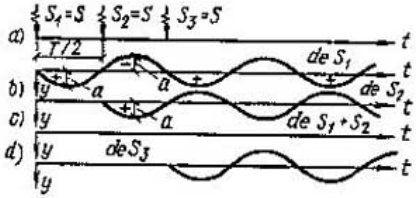


Fig. 22

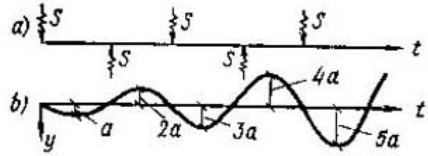


Fig. 23

Ejemplo 10. Determinar el movimiento del sistema debido a los impulsos iguales consecuentes que actúan dentro del semiperíodo de oscilaciones libres del sistema y se alternan de dirección (fig. 23, *a*):

1) $0 \leqslant t \leqslant T/2$ (del primer impulso)

$$y_1 = \frac{S}{m\omega} \operatorname{sen} \omega t = a \operatorname{sen} \omega t;$$

2) $T/2 \leqslant t \leqslant T$ (de los dos impulsos)

$$y_2 = y_1 - a \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{T}{2}\right) = 2a \operatorname{sen} \omega t;$$

3) $T \leqslant t \leqslant 3T/2$ (de los tres impulsos)

$$y_3 = y_2 + a \operatorname{sen} \omega (t - T) = 3a \operatorname{sen} \omega t.$$

El diagrama del movimiento se da en la fig. 23, *b*. Las amplitudes de oscilaciones van creciendo, tiene lugar la resonancia.

§ 10. ACCIÓN DE LA FUERZA $P(t)$ QUE VARÍA SEGÚN CUALESQUIERA DE LAS LEYES.

Examinemos dos métodos de obtención de la ecuación del movimiento forzado.

1. Solución directa de la ecuación diferencial. La ecuación diferencial de los movimientos forzados (2.3) con una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad y con diferentes expresiones del

segundo miembro tiene el siguiente aspecto:

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega^2 y = \omega^2 \Delta_{1p}(t) = \frac{P(t)\,\delta_{1p}}{m \cdot \delta_{11}} = F(t). \qquad (2.50)$$

La solución general de la ecuación homogénea (2.50) expresada por medio de las integrales particulares que satisfacen la matriz unitaria es la siguiente [véase (2.40)]:

$$y_{11b} = y(0)\, y_1(t) + v(0)\, y_2(t),$$

donde,

$$y_1(t) = e^{-\alpha t}\left(\cos\omega_1 t + \frac{\alpha}{\omega_1}\operatorname{sen}\omega_1 t\right);$$

$$y_2(t) = e^{-\alpha t}\frac{\operatorname{sen}\omega_1 t}{\omega_1};$$

$$\omega_1^2 = \omega^2 - \alpha^2.$$

La solución parcial (integral parcial) de la ecuación (2.50) con el segundo miembro la obtenemos según la fórmula:

$$y_{\text{parc}} = \int_0^t F(u)\, y_2(t-u)\, du = \int_0^t F(u)\, e^{-\alpha(t-u)}\frac{\operatorname{sen}\omega_1(t-u)}{\omega_1}\, du. \qquad (2.51)$$

La solución general de la ecuación (2.50) es,

$$y = y_{11b} + \int_0^t F(u)\, e^{-\alpha(t-u)}\frac{\operatorname{sen}\omega_1(t-u)}{\omega_1}\, du. \qquad (2.52)$$

Obtendremos la velocidad de movimiento de la masa diferenciando (2.52):

$$v = \dot{y} = \dot{y}_{11b} + \int_0^t \frac{F(u)}{\omega_1}\left[-\alpha e^{-\alpha(t-u)}\operatorname{sen}\omega_1(t-u) + \right.$$

$$\left. + e^{-\alpha(t-u)}\omega_1\cos\omega_1(t-u)\right] du, \qquad (2.53)$$

donde, $\dot{y}_{11b}$ según (2.39) con $C = y(0)$ y $D = v(0)$.

Suponiendo en (2.52) y (2.53) $\alpha \to 0$ y $\omega_1 \to \omega$, obtendremos las expresiones del movimiento y la velocidad de la masa sin considerar las resistencias:

$$y = y(0)\cos\omega t + \frac{v(0)}{\omega}\ \text{en}\ \omega t + \int_0^t \frac{F(u)}{\omega}\operatorname{sen}\omega(t-u)\, du; \qquad (2.54)$$

$$\dot{y} = -y(0)\,\omega\operatorname{sen}\omega t + v(0)\cos\omega t + \int_0^t F(u)\cos\omega(t-u)\, du \qquad (2.55)$$

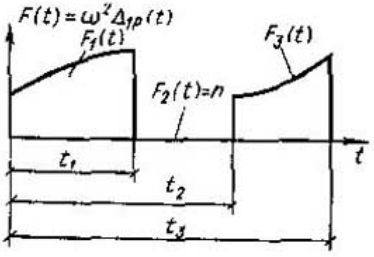


Fig. 24

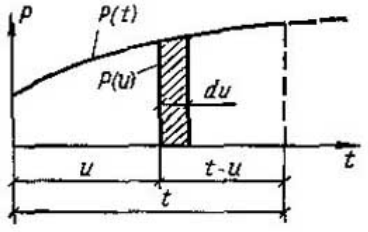


Fig. 25

Para las cargas interrumpidas (fig. 24), la integral de la solución parcial (2.51) debe escribirse como la suma de las integrales en los tramos aislados. Mostrémoslo utilizando para la sencillez la fórmula (2.54):

1) para $0 \leqslant t \leqslant t_1$

$$y_1 = \int_0^t \frac{F_1(u)}{\omega} \operatorname{sen} \omega (t-u)\, du;$$

2) para $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$

$$y_2 = \int_0^{t_1} \frac{F_1(u)}{\omega} \operatorname{sen} \omega (t-u)\, du;$$

3) para $t_2 \leqslant t \leqslant t_3$

$$y_3 = \int_0^{t_1} \frac{F_1(u)}{\omega} \operatorname{sen} \omega (t-u)\, du + \int_{t_2}^{t} \frac{F_3(u)}{\omega} \operatorname{sen} \omega (t-u)\, du;$$

4) para $t_3 \leqslant t$

$$y_4 = \int_0^{t_1} \frac{F_1(u)}{\omega} \operatorname{sen} \omega (t-u)\, du + \int_{t_2}^{t_3} \frac{F_3(u)}{\omega} \operatorname{sen} \omega (t-u)\, du.$$

2. Empleo de la teoría de la acción del impulso. En la fig. 25 se da el diagrama de la fuerza $P(t)$ que actúa directamente sobre la masa. La acción permanente de la fuerza $P(t)$ puede considerarse como una acción ininterrumpida de una cantidad infinitamente grande de impulsos infinitamente pequeños $dS = P(t)\, dt$.

Veamos el movimiento del sistema en el momento de tiempo t. Tomemos el impulso infinitamente pequeño dS igual a $P(u)\, du$ en el momento de tiempo $u < t$. Su acción, al transcurrir el tiempo $t - u$, será, según (2.43),

$$dy = \frac{P(u)\, du}{m\omega_1} e^{-\alpha(t-u)} \operatorname{sen} \omega_1 (t-u).$$

La acción de todos los impulsos infinitamente pequeños la obtendremos integrando:

$$y = \int_0^t \frac{P(u)\,du}{m\omega_1} e^{-\alpha(t-u)} \operatorname{sen} \omega_1 (t-u). \qquad (2.56)$$

La expresión (2.56) coincide con la (2.51) para $\delta_{1p} = \delta_{11}$, ya que en este caso de (2.50) se ve que $P(u)/m = F(u)$. En un caso más general, si la fuerza $P(t)$ está aplicada al sistema fuera de la masa, es necesario partir en los razonamientos expuestos de la fuerza de sustitución que actúa sobre la masa, la cual da el mismo desplazamiento de la masa que la fuerza $P(u)$:

$$\hat{P}(u) = P(u)\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{\Delta_{1p}(u)}{\delta_{11}}. \qquad (2.57)$$

Sustituyendo (2.57) en (2.56) se obtendrá (2.51).

§ 11. ANALOGÍA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE MOVIMIENTO SIN CONSIDERAR LA RESISTENCIA Y LA FLEXIÓN ESTÁTICA LONGITUDINAL Y TRANSVERSAL. La ecuación diferencial de movimiento de la masa del sistema sin tomar en consideración las resistencias al movimiento tiene la siguiente expresión:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \omega^2 \Delta_{1p}(t). \qquad (2.58)$$

La ecuación diferencial de flexión longitudinal y transversal de la viga es,

$$y'' + \alpha^2 y = -\frac{M_0}{EJ}; \quad \alpha^2 = \frac{P}{EJ}, \qquad (2.59)$$

donde M_0 es el momento flector debido a la carga transversal.

La comparación de las ecuaciones (2.58) y (2.59) muestra su total identidad, lo que permite adoptar la solución de uno de ellos para la solución del otro reemplazando los símbolos.

Así, por ejemplo, la ecuación general de la flexión longitudinal y transversal es,

$$y_{n+1}(z) = y_n(z) + \Delta y(a)\cos\alpha(z-a) + \frac{\Delta y'(a)}{\alpha}\operatorname{sen}\alpha(z-a) -$$
$$- \frac{\Delta M(a)}{\alpha^2 EJ}[1-\cos\alpha(z-a)] - \frac{\Delta Q(a)}{\alpha^3 EJ}[\alpha(z-a) -$$
$$- \operatorname{sen}\alpha(z-a)] - \frac{\Delta q(a)}{\alpha^4 EJ}\left[\cos\alpha(z-a) + \frac{\alpha^2(z-a)^2}{2!} - 1\right] -$$
$$- \frac{\Delta q'(a)}{\alpha^5 EJ}\left[\operatorname{sen}\alpha(z-a) + \frac{\alpha^3(z-a)^3}{3!} - \alpha(z-a)\right] -$$
$$- \frac{\Delta q''(a)}{\alpha^6 EJ}\left[-\cos\alpha(z-a) + \frac{\alpha^4(z-a)^4}{4!} - \frac{\alpha^2(z-a)^2}{2!} + 1\right] - \ldots$$

al sustituir α^2 por ω^2, $-(M_0 : EJ)$ por $\omega^2\Delta_{1p} = \omega^2\delta_{1p}P$ y z por t se transforma en la ecuación general de movimiento de la masa del sistema:

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + \Delta y(a)\cos\omega(t-a) + \frac{\Delta y'(a)}{\omega}\operatorname{sen}\omega(t-a) +$$

$$+ \delta_{1p}\Delta P(a)[1-\cos\omega(t-a)] + \frac{\delta_{1p}\Delta\dot{P}(a)}{\omega}[\omega(t-a) -$$

$$-\operatorname{sen}\omega(t-a)] + \frac{\delta_{1p}\Delta\ddot{P}(a)}{\omega^2}\left[\cos\omega(t-a) + \frac{\omega^2(t-a)^2}{2!} - 1\right] +$$

$$+ \frac{\delta_{1p}\Delta\dddot{P}(a)}{\omega^3}\left[\operatorname{sen}\omega(t-a) + \frac{\omega^3(t-a)^3}{3!} - \alpha(t-a)\right] +$$

$$+ \frac{\delta_{1p}\Delta\ddddot{P}(a)}{\omega^4}\left[-\cos\omega(t-a) + \frac{\omega^4(t-a)^4}{4!} - \frac{\omega^2(t-a)^2}{2!} + 1\right] + \ldots, \tag{2.60}$$

donde $\Delta y(a)$, $\Delta\dot{y}(a)$, $\Delta P(a)$, etc., son, respectivamente, los incrementos del desplazamiento, la velocidad, la carga, etc., para $t = a$.

§ 12. APLICACIÓN REPENTINA DE LA FUERZA P_i PARA $t = t_i^{in}$ Y SU DESAPARICIÓN REPENTINA PARA $t = t_i^{fin}$

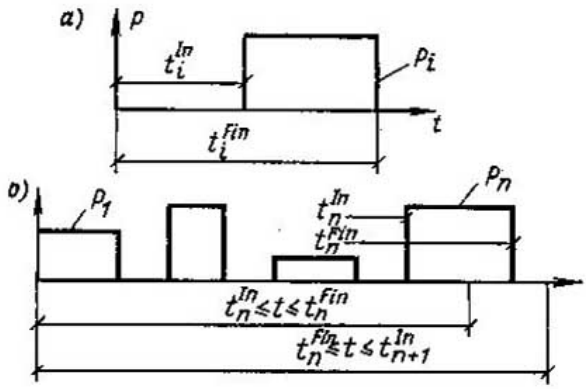


Fig. 26

(fig. 26, *a*). Veamos los diferentes intervalos de tiempo y hallemos los movimientos forzados del sistema según la ecuación (2.51):

1) $t \leqslant t_i^{in}$ (antes del inicio de la acción de la fuerza P_i) $y = 0$, no hay movimiento;

2) $t_i^{in} \leqslant t \leqslant t_i^{fin}$ (durante la acción de la fuerza P_i)

$$y_i^* = \frac{P_i\delta_{1p}\omega^2}{\omega_1}\int_{t_i^{in}}^{t} e^{-\alpha(t-u)}\operatorname{sen}\omega_1(t-u)\,du.$$

Esta integral es tabular:

$$y_i^* = \frac{P_i \delta_{1p} \omega^2}{\omega_1} \int_{t_i^{in}}^{t} \frac{e^{-\alpha(t-u)} [\omega_1 \cos \omega_1 (t-u) + \alpha \operatorname{sen} \omega_1 (t-u)]}{\omega_1^2 + \alpha^2}.$$

Una vez sustituidos los límites tenemos que

$$y_i^* = \frac{P_i}{m\omega_1 (\omega_1^2 + \alpha^2)} \cdot \frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} \{\omega_1 -$$

$$- e^{-\alpha(t-t_i^{in})} [\omega_1 \cos \omega_1 (t - t_i^{in}) + \alpha \operatorname{sen} \omega_1 (t - t_i^{in})]\}; \quad (2.61)$$

3) $t \geqslant t_i^{fin}$ (después de la acción de la fuerza P_i)

$$y_i^{**} = \frac{P_i \delta_{1p} \omega^2}{\omega_1} \int_{t_i^{in}}^{t_i^{fin}} e^{-\alpha(t-u)} \operatorname{sen} \omega_1 (t-u)\, du.$$

Después de la integración tenemos que

$$y_i^{**} = \frac{P_i}{m\omega_1 (\omega_1^2 + \alpha^2)} \cdot \frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} \{e^{-\alpha(t-t_i^{fin})} \times$$

$$\times [\omega_1 \cos \omega_1 (t - t_i^{fin}) + \alpha \operatorname{sen} \omega_1 (t - t_i^{fin})] -$$

$$- e^{-\alpha(t-t_i^{in})} [\omega_1 \cos \omega_1 (t - t_i^{in}) + \alpha \operatorname{sen} \omega_1 (t - t_i^{in}))]\}. \quad (2.62)$$

Sin considerar las resistencias tenemos que

$$y_i^* = P_i \delta_{1p} [1 - \cos \omega (t - t_i^{in})]; \quad (2.63)$$

$$y_i^{**} = P_i \delta_{1p} [\cos \omega (t - t_i^{fin}) - \cos \omega (t - t_i^{in})]. \quad (2.64)$$

Estas mismas pero en otras expresiones:

$$y_i^* = P_i \delta_{1p} 2 \operatorname{sen}^2 \omega \frac{t - t_i^{in}}{2}; \quad (2.65)$$

$$y_i^{**} = P_i \delta_{1p} 2 \operatorname{sen} \omega \frac{t_i^{fin} - t_i^{in}}{2} \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{t_i^{in} + t_i^{fin}}{2} \right). \quad (2.66)$$

Mostremos cómo se obtienen las expresiones (2.63) y (2.64) según la ecuación general (2.60):

para $a = t_i^{in}$; $\Delta P(a) = P_i$ se tiene (2.63);

para $a = t_i^{fin}$; $\Delta P(a) = -P_i$

$$y_i^{**} = y_i^* - \delta_{1p} P_i [1 - \cos \omega (t - t_i^{fin})]$$

o bien

$$y_i^{**} = \delta_{1p} P_i [1 - \cos \omega (t - t_i^{in})] - \delta_{1p} P_i [1 - \cos \omega (t - t_i^{fin})] =$$

$$= \delta_{1p} P_i [\cos \omega (t - t_i^{fin}) - \cos \omega (t - t_i^{in})].$$

Las expresiones obtenidas de y_i^* e y_i^{**} en forma de (2.61) y (2.62) permiten resolver el problema sobre el movimiento forzado del sistema debido a varias fuerzas que aparecen repentinamente y así mismo desaparecen (fig. 26, *b*):

1) para $t_n^{in} \leqslant t \leqslant t_n^{fin}$ (durante la acción de la fuerza P_n)

$$y = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^{**} + y_n^*; \tag{2.67}$$

2) para $t \geqslant t_n^{fin}$ (después de la acción de la fuerza P_n)

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i^{**}. \tag{2.68}$$

§ 13. ACCIÓN DE UNA FUERZA APLICADA REPENTINAMENTE.

1. Acción prolongada de la fuerza. Se toma en cuenta el caso cuando la fuerza P esté aplicada repentinamente al sistema y permanece sobre éste durante largo tiempo (fig. 27, *a*). Obtenemos la ecuación de movimiento según (2.61) considerando $P_i = P$ y $t_i^{in} = 0$:

$$y_i^* = \frac{P}{m\omega_1(\omega_i^2+\alpha^2)} \cdot \frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} [\omega_1 - e^{-\alpha t}(\omega_1 \cos \omega_1 t + \alpha \operatorname{sen} \omega_1 t)]. \tag{2.69}$$

Puesto que $P\delta_{1p} = y_{est}$, entonces, como es sabido (véase la pág. 21) el coeficiente dinámico será:

$$\mu = \frac{y_i^*}{y_{est}} = \frac{1}{m\delta_{11}\omega_1(\omega_i^2+\alpha^2)} [\omega_1 - e^{-\alpha t}(\omega_1 \cos \omega_1 t + \alpha \operatorname{sen} \omega_1 t)]. \tag{2.70}$$

Sin considerar las resistencias tenemos

$$y_1^* = P\delta_{1p}(1 - \cos \omega t); \tag{2.71}$$

$$\mu = 1 - \cos \omega t. \tag{2.72}$$

La expresión (2.71) se desprende de (2.60) para $a=0$ y $\Delta P(a)=P$.

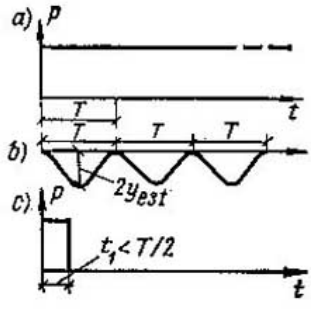


Fig. 27

En este caso, el valor máximo del coeficiente dinámico será $\mu = 2$ para $\cos \omega t = -1$, es decir, para $t = k\pi/\omega = kT/2$, si $k = 1, 3, 5 \ldots$ El diagrama del movimiento puede verse en la fig. 27, *b*.

2. Acción breve de la fuerza. Se tiene en cuenta el caso cuando la fuerza aparecida repentinamente para $t = 0$, desaparece repentinamente para $t_1 \leqslant T/2$, es decir, la fuerza accionó menos de un semiperíodo de oscilaciones libres (fig. 27, *c*). Durante la acción de la fuerza

P, cuando $0 \leqslant t \leqslant t_1$, el movimiento del sistema y el coeficiente dinámico se determinan por las expresiones (2.69)—(2.72). Así, por ejemplo, se tiene según (2.71) y (2.72) sin considerar las resistencias:

$$y_1^* = y_{est}(1 - \cos \omega t) = y_{est}\left(1 - \cos 2\pi \frac{t}{T}\right);$$

$$\mu_1 = 1 - \cos \omega t = 1 - \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

El coeficiente dinámico para $t_1 \leqslant T/2$ siempre crecerá y alcanzará su valor máximo para $t = t_1$:

$$\mu_{1,\,máx} = 1 - \cos 2\pi \frac{t_1}{T}.$$

Los valores del coeficiente dinámico en función de la relación t_1/T se exponen en la tabla 2. El valor máximo, igual a dos, el coeficiente dinámico lo tiene para $t_1 = T/2$.

Tabla 2

$\frac{t_1}{T} \rightarrow$	0	1/8	1/6	1/4	3/8	1/2
$\mu_{1,\,máx}$	0	0,29289	0,50	1,00000	1,70711	2,0
$\mu_{2,\,máx}$	0	0,76536	1,00	1,41422	1,83412	2,0

Al desaparecer la fuerza, cuando $t > t_1$, se tendrá según (2.64) para $t_i^{in} = 0$ y $t_i^{fin} = t_1$:

$$y_2^{**} = y_{est}[\cos \omega (t - t_1) - \cos \omega t].$$

La misma expresión pero en otra forma será:

$$y_2^{**} = 2y_{est}\left[\operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\omega t_1}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{\omega t_1}{2}\right].$$

El coeficiente dinámico después de la acción de la carga es,

$$\mu_2 = 2 \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\omega t_1}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{\omega t_1}{2}.$$

Su valor máximo para $\operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\omega t_1}{2}\right) = 1$ es,

$$\mu_{2,\,máx} = 2 \operatorname{sen} \frac{\omega t_1}{2} = 2 \operatorname{sen} \pi \frac{t_1}{T}.$$

Los valores de $\mu_{2,máx}$ también se dan en la tabla 2, e igualmente no pueden ser mayores de dos.

De los razonamientos más arriba expuestos se desprende lo siguiente:

1) los valores máximos de los coeficientes dinámicos $\mu_{1,\text{máx}}$ y $\mu_{2,\text{máx}}$ van creciendo durante la acción de la carga hasta $t_1 = T/2$. Con este valor de t_1 se tornan iguales a dos y no pueden ser mayores;

2) los valores máximos del coeficiente dinámico $\mu_{2,\text{máx}}$ siempre son mayores que el valor máximo de $\mu_{1,\text{máx}}$, y sólo para $t_1 = T/2$ serán iguales;

3) si el tiempo de acción de la fuerza $t_1 < T/6$, entonces el coeficiente dinámico $\mu_{2,\text{máx}}$ será menor de la unidad, y para $t_1 = T/6$ igual a ella.

Ejemplo 11. Escribir las ecuaciones de movimiento del sistema sin considerar las resistencias debido a dos fuerzas P aplicadas repentinamente, si una

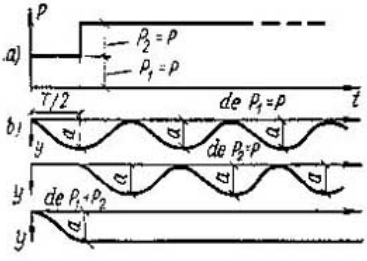


Fig. 28

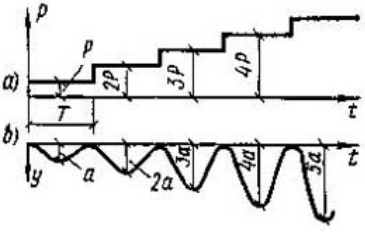


Fig. 29

de ellas está aplicada con $t = 0$ y la otra, dentro de medio período de oscilaciones libres (fig. 28, *a*):

1) para $0 \leqslant t \leqslant T/2$ según (2.71)

$$y_1^* = y_{\text{est}}(1 - \cos \omega t) = \frac{a}{2}(1 - \cos \omega t),$$

(aquí se designa $a = 2y_{\text{est}}$);

2) para $t \geqslant T/2$

$$y_2^* = y_1^* + y_{\text{est}}\left[1 - \cos \omega \left(t - \frac{T}{2}\right)\right],$$

o bien

$$y_2^* = \frac{a}{2}(1 - \cos \omega t) + \frac{a}{2}\left[1 - \cos \omega \left(t - \frac{2\pi}{2\omega}\right)\right] = a.$$

Los diagramas del movimiento se exponen en la fig. 28, *b*.

Ejemplo 12. Escribir las ecuaciones de movimiento del sistema sin considerar las fuerzas de resistencia debido a varias fuerzas de igual valor P aplicadas repentinamente dentro del período de oscilaciones libres $T = 2\pi/\omega$ (fig. 29, *a*):

1) $0 \leqslant t \leqslant T$ (después de la acción de la primera fuerza)

$$y_1 = \frac{a}{2}(1 - \cos \omega t);$$

2) $T \leqslant t \leqslant 2T$ (después de la acción de la segunda fuerza)

$$y_2 = \frac{a}{2}(1 - \cos \omega t) + \frac{a}{2}\left[1 - \cos \omega \left(t - \frac{2\pi}{\omega}\right)\right] = a(1 - \cos \omega t);$$

3) $2T \leqslant t \leqslant 3T$ (después de la acción de la tercera fuerza)

$$y_3 = y_2 + \frac{a}{2}\left[1 - \cos\omega\left(t - \frac{4\pi}{\omega}\right)\right] = \frac{3a}{2}(1 - \cos\omega t).$$

Véase el diagrama del movimiento en la fig. 29, *b*. Se tiene el caso de resonancia.

§ 14. FUERZA QUE AUMENTA SEGÚN LA LEY LINEAL HASTA EL VALOR P Y QUE SE MANTIENE LUEGO CONSTANTE (FIG. 30). Examinamos el movimiento sin considerar las resistencias. Es necesario examinar dos tramos de acción de la carga en el tiempo

1) $0 \leqslant t \leqslant t_1$.

La ley del crecimiento de la fuerza es: $P(t) = Pt/t_1$. Respectivamente $\Delta_{1P}(t) = P(t)\,\delta_{1P} = P\delta_{1P}(t/t_1)$. (Aquí $\delta_{1P} = \delta_{11}$).

Según la fórmula (2.54) para $y(0) = 0$, $v(0) = 0$ se tiene

$$y = \int_0^t \omega \frac{P\delta_{1P}}{t_1} u \operatorname{sen}\omega(t-u)\,du =$$

$$= \frac{\omega P\delta_{1P}}{t_1}\left|\frac{u\cos\omega(t-u)}{\omega} + \frac{\operatorname{sen}\omega(t-u)}{\omega^2}\right|_0^t = \frac{P\delta_{1P}t}{t_1}\left(1 - \frac{\operatorname{sen}\omega t}{\omega t}\right). \quad (2.73)$$

La misma expresión se obtiene según (2.60).

Para $a = 0$, $\Delta y(a) = 0$, $\Delta \dot{y}(a) = 0$, $\Delta P(0) = 0$, $\Delta \dot{P}(0) = P/t_1$ tenemos

$$y_1 = \frac{\delta_{1P}P}{\omega t_1}(\omega t - \operatorname{sen}\omega t).$$

Seguidamente expresemos la flexión estática debida a la fuerza que aumenta linealmente

$$y_{est}(t) = P(t)\,\delta_{1P} = P\frac{\delta_{1P}}{t_1}t.$$

Ahora (2.73) será:

$$y_1 = y_{est}(t)\left(1 - \frac{\operatorname{sen}\omega t}{\omega t}\right). \quad (2.74)$$

El coeficiente dinámico es,

$$\mu_1 = \frac{y_1}{y_{est}(t)} = 1 - \frac{\operatorname{sen}\omega t}{\omega t} = 1 - \frac{\operatorname{sen} 2\pi\frac{t}{T}}{2\pi\frac{t}{T}}. \quad (2.75)$$

Al crecer la carga según la ley lineal, el coeficiente dinámico μ_1 no depende de la velocidad de crecimiento de la carga, y con el tiempo tiende a la unidad. Su valor es pequeño durante el crecimiento de la carga. En la fig. 31, *a* y *b* se muestran los desplazamientos y los coeficientes dinámicos. Los coeficientes dinámicos son iguales

a la unidad si sen $\omega t = 0$, es decir, cuando $\omega t = k\pi$ y $t = \frac{k\pi}{\omega} = k\frac{T}{2}$, para $k = 1, 2, 3$. Hallemos el máximo del coeficiente dinámico en el tramo $0 \leqslant t \leqslant t_1$. De (2.75) tenemos que

$$\dot{\mu}_1 = \frac{\omega \cos \omega t\, \omega t - \omega \operatorname{sen} \omega t}{\omega^2 t^2} = 0,$$

de donde obtenemos tg $\omega t = \omega t$.

El primer valor de ωt que satisface a la igualdad, $\omega t \approx 4{,}494$;

$$\mu_{1,\ \text{máx}} = 1 - \frac{-0{,}97625}{4{,}494} \approx 1{,}218.$$

Si $t = t_1$, entonces $\mu_1 = 1 - \frac{\operatorname{sen} \omega t_1}{\omega t_1}$.

2) Para $t \geqslant t_1$.

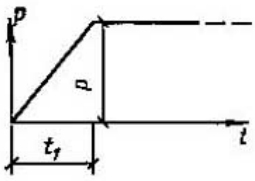


Fig. 30

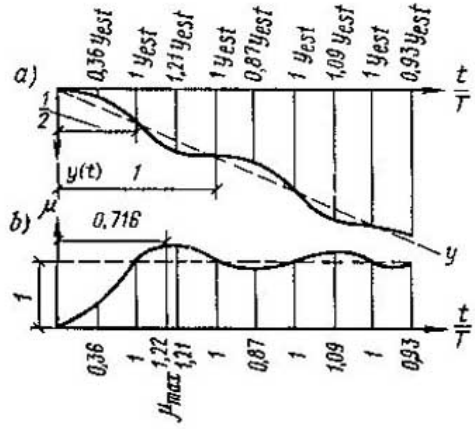


Fig. 31

Según la fórmula (2.54) para $\alpha = 0$; $y(0) = 0$, $v(0) = 0$ se tiene:

$$y_2 = \int_0^{t_1} \omega \frac{P\delta_{1p}}{t_1} u \operatorname{sen} \omega (t-u)\, du + \int_{t_1}^{t} \omega P \delta_{1p} \operatorname{sen} \omega (t-u)\, du =$$

$$= \frac{P\,\delta_{1p}\omega}{t_1} \left| \frac{u \cos \omega (t-u)}{\omega} + \frac{\operatorname{sen} \omega (t-u)}{\omega^2} \right|_0^{t_1} + P\delta_{1p}\omega \left| \frac{\cos \omega (t-u)}{\omega} \right|_{t_1}^{t}.$$

Una vez sustituidos los límites y hechas las transformaciones, tenemos

$$y_2 = P\delta_{1p}\left[1 - \frac{\operatorname{sen} \omega t}{\omega t_1} + \frac{\operatorname{sen} \omega (t-t_1)}{\omega t_1}\right]. \qquad (2.76)$$

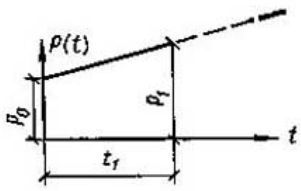


Fig. 32

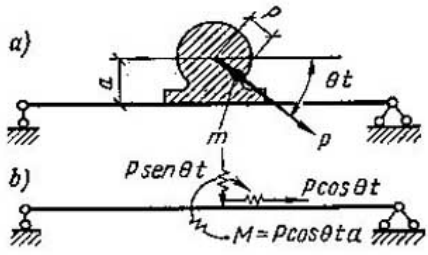


Fig. 33

Igual expresión obtendremos según (2.60). Para $a = t$; $\Delta y\,(a) = 0$; $\Delta P\,(a) = 0$; $\Delta \dot{P}\,(a) = -\frac{P}{t_1}$ tenemos que

$$y_2 = y_1 - \frac{\delta_{1p} P}{\omega t_1}\left[\omega\,(t - t_1) - \operatorname{sen}\omega\,(t - t_1)\right]$$

o bien

$$y_2 = \frac{\delta_{1p} P}{t_1} t\left(1 - \frac{\operatorname{sen}\omega t}{\omega t}\right) - \frac{\delta_{1p} P}{\omega t_1}\left[\omega\,(t - t_1) - \operatorname{sen}\omega\,(t - t_1)\right] =$$

$$= \delta_{1p} P\left[1 - \frac{\operatorname{sen}\omega t}{\omega t_1} + \frac{\operatorname{sen}\omega\,(t - t_1)}{\omega t_1}\right].$$

El coeficiente dinámico después del crecimiento de la carga es,

$$\mu_2 = 1 - \frac{\operatorname{sen}\omega t}{\omega t_1} + \frac{\operatorname{sen}\omega\,(t - t_1)}{\omega t_1}\ ; \qquad (2.77)$$

su valor depende, en sumo grado, del tiempo (t_1), es decir, de la velocidad de crecimiento de la carga. Si ese tiempo es pequeño, es decir, $t_1 \to 0$, entonces de (2.77) se obtendrá (2.72).

La solución obtenida puede aplicarse al caso cuando la carga varía según la ley lineal (fig. 32). En este caso la solución será a base de (2.71) y (2.73) en la siguiente forma:

$$y = P_0 \delta_{1p}\,(1 - \cos\omega t) + \frac{(P_1 - P_0)}{t_1}\,\delta_{1p} t\left(1 - \frac{\operatorname{sen}\omega t}{\omega t}\right).$$

§ 15. ACCIÓN DE LA CARGA VIBRATORIA. La carga vibratoria está creada por las máquinas con parte giratoria desequilibrada, cuya masa tiene con respecto al eje de rotación una excentricidad ρ (fig. 33, *a*). Durante el movimiento de la masa no equilibrada aparece la fuerza centrífuga determinada según la fórmula:

$$P = m^* \theta^2 \rho = \frac{G^* \theta^2 \rho}{g}\ , \qquad (2.78)$$

donde m^* y G^* son, respectivamente, la masa y el peso de la parte desequilibrada; θ, la velocidad angular; ρ, la excentricidad de la masa.

Si el motor hace n revoluciones por minuto, entonces la velocidad angular de rotación de la masa desequilibrada determinará también la frecuencia circular de la carga aplicada:

$$\theta = \frac{2\pi n}{60}. \tag{2.79}$$

Si se considera que el inicio de acción de la carga es a partir del eje horizontal (fig. 33, *b*), entonces las componentes de la fuerza centrífuga serán las siguientes:

la vertical $P_1(t) = P \operatorname{sen} \theta t$; la horizontal $P_2(t) = P \cos \theta t$.

Estudiemos la acción de las fuerzas $P \operatorname{sen} \theta t$ y $P \cos \theta t$ considerando las resistencias. Tomamos la resistencia proporcional a la velocidad.

Según la fórmula (2.51) para $P \operatorname{sen} \theta t$ tenemos

$$y = \int_0^t \omega^2 \delta_{1p} P \operatorname{sen} \theta u e^{-\alpha(t-u)} \frac{\operatorname{sen} \omega_1 (t-u)}{\omega_1} du.$$

Sin embargo, el desarrollo de esa integral requiere minuciosidad. Por eso utilizaremos otro método de solución, a saber: la integración directa de la ecuación (2.50).

Vamos a suponer, en general, que sobre la masa m accionan dos fuerzas verticales $P_1 \operatorname{sen} \theta t$ y $P_2 \cos \theta t$. En este caso la ecuación diferencial (2.50) será:

$$\ddot{y} + 2a\dot{y} + \omega^2 y = \omega^2 \delta_{1p} (P_1 \operatorname{sen} \theta t + P_2 \cos \theta t). \tag{2.80}$$

Hallamos la solución parcial en la siguiente forma:

$$y_{\text{parc}} = C_1 \operatorname{sen} \theta t + C_2 \cos \theta t. \tag{2.81}$$

Introduciéndola en la ecuación (2.80) e igualando los sumandos con $\operatorname{sen} \theta t$ y $\cos \theta t$ del primer y segundo miembros de la igualdad obtendremos:

$$\left.\begin{aligned} C_1 \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right) - C_2 \frac{2\alpha\theta}{\omega^2} &= \delta_{1p} P_1; \\ C_1 \frac{2\alpha\theta}{\omega^2} + C_2 \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right) &= \delta_{1p} P_2. \end{aligned}\right\} \tag{2.82}$$

A partir de estas ecuaciones determinamos C_1 y C_2, después de lo cual tendremos lo siguiente:

$$y_{\text{parc}} = \frac{\delta_{1p}}{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + 4\frac{\alpha^2\theta^2}{\omega^4}} \left\{ P_1 \left[\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right) \operatorname{sen} \theta t - \frac{2\alpha\theta}{\omega^2} \cos \theta t \right] + \right.$$

$$\left. + P_2 \left[\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right) \cos \theta t + \frac{2\alpha\theta}{\omega^2} \operatorname{sen} \theta t \right] \right\}. \tag{2.83}$$

Vamos a suponer que

$$1 - \frac{\theta^2}{\omega^2} = C \cos \varphi; \quad \gamma \frac{\theta}{\omega} = C \operatorname{sen} \varphi,$$

siendo $\gamma = 2\alpha/\omega$ un valor abstracto que toma en consideración la resistencia.

Entonces

$$\operatorname{tg}\varphi = \gamma\frac{\theta}{\omega} : \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right); \quad C = \sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \gamma^2\frac{\theta^2}{\omega^2}}. \qquad (2.84)$$

Introduciendolo en (2.83) y escribiendo y_{parc} separadamente de P_1 sen θt y P_2 cos θt obtendremos:

1) de P sen θt: $y_{parc} = a$ sen $(\theta t - \varphi)$;
2) de P cos θt : $y_{parc} = a$ cos $(\theta t - \varphi)$, (2.85)

donde,

$$a = \frac{\delta_1 p P}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \gamma^2\frac{\theta^2}{\omega^2}}}$$

(amplitud de las oscilaciones).

El desfasaje φ, según (2.84), se presenta en la fig. 34. De ésta se desprende que para cualquier resistencia y para $\theta/\omega = 1$ el desfasaje $\varphi = \pi/2$. Para $\gamma = 0$, es decir, cuando desaparecen las fuerzas de resistencia, el desfasaje sucede a saltos (línea gruesa en la figura): para $\theta/\omega = 1 - 0$, $\varphi = 0$, no hay desfasaje; para $\theta/\omega = 1$, $\varphi = \pi/2$ y para $\theta/\omega = 1 + 0$, $\varphi = \pi$. Para $\varphi = 0$ los desplazamientos coinciden con la dirección de la acción de la fuerza, simultáneamente a ésta se convierten en cero y alcanzan los valores máximo y mínimo. Para $\varphi = \pi$ los desplazamientos están dirigidos al encuentro de la acción de la fuerza, simultáneamente a ésta se convierten en cero, pero cuando la fuerza alcanza el máximo valor, el desplazamiento alcanza el mínimo, y viceversa.

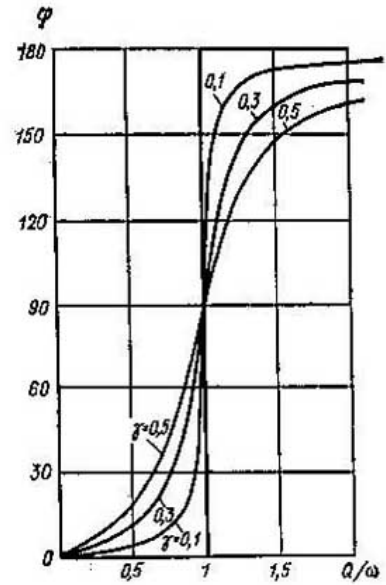


Fig. 34

Para obtener la solución general de la ecuación (2.80) es necesario a la solución parcial (2.85) sumar (2.29), entonces la solución general de la ecuación (2.28) será:

para P sen θt

$$y = a \text{ sen } (\theta t - \varphi) + e^{-\alpha t}(A \text{ sen } \omega_1 t + B \cos \omega_1 t);$$

para P cos θt

$$y = a \cos (\theta t - \varphi) + e^{-\alpha t}(A \text{ sen } \omega_1 t + B \cos \omega_1 t).$$

Expresando las constantes arbitrarias A y B por medio de las condiciones iniciales del movimiento $y(0)$ y $v(0) = \dot{y}(0)$, obtendremos estas soluciones en la siguiente forma:

para $P \operatorname{sen} \theta t$

$$y = a \operatorname{sen}(\theta t - \varphi) + ae^{-\alpha t}\left[\operatorname{sen}\varphi \cos \omega_1 t + \frac{\alpha \operatorname{sen}\varphi - \theta \cos\varphi}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t\right] + \\ + e^{-\alpha t}\left[y(0) \cos \omega_1 t + \frac{v(0) + \alpha y(0)}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t\right]; \qquad (2.86)$$

para $P \cos \theta t$

$$y = a \cos(\theta t - \varphi) + ae^{-\alpha t} \times \\ \times\left[-\cos\varphi \cos \omega_1 t - \frac{\alpha \cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t\right] + \\ + e^{-\alpha t}\left[y(0) \cos \omega_1 t + \frac{v(0) + \alpha y(0)}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t\right]. \qquad (2.87)$$

Las oscilaciones completas con cargas $P \operatorname{sen} \theta t$ o $P \cos \theta t$ constan de oscilaciones de tres tipos, a saber:

1) de oscilaciones puramente forzadas con la amplitud a, la frecuencia de la carga que actúa θ y el desfasaje φ;

2) de oscilaciones amortiguadas acompañantes con la frecuencia ω_1, que dependen de la amplitud a, la frecuencia de perturbación θ, la resistencia α y el desfasaje φ;

3) de oscilaciones libres amortiguadas con la frecuencia ω_1, que dependen de las resistencias α y las condiciones iniciales del movimiento $y(0)$ y $v(0) = \dot{y}(0)$.

De las expresiones (2.86) y (2.87) se obtienen diferentes casos particulares. De estas mismas, teniendo en cuenta que $\delta_{1p} P = y_{est}$, se obtienen fácilmente las expresiones de los coeficientes dinámicos $\mu = y/y_{est}$. Así, por ejemplo, para $y(0) = 0$ y $v(0) = 0$ los coeficientes dinámicos totales serán:

$$\mu^*(t) = b\left[\operatorname{sen}(\theta t - \varphi) + e^{-\alpha t} \times \right. \\ \left. \times\left(\operatorname{sen}\varphi \cos \omega_1 t + \frac{\alpha \operatorname{sen}\varphi - \theta \cos\varphi}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t\right)\right]; \qquad (2.88)$$

$$\mu^*(t) = b\left[\cos(\theta t - \varphi) + e^{-\alpha t} \times \right. \\ \left. \times\left(-\cos\varphi \cos \omega_1 t - \frac{\alpha \cos\varphi + \theta \operatorname{sen}\varphi}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t\right)\right], \qquad (2.89)$$

donde $b = 1 : \sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + 4\alpha^2 \frac{\theta^2}{4}}$. Como se ve, éstos dependen del tiempo.

Con el tiempo las oscilaciones amortiguadas prácticamente desaparecen y se quedarán sólo las puramente forzadas, así llamadas oscilaciones permanentes. En este caso los coeficientes dinámicos

totales tienen la siguiente expresión:

$$\mu(t) = b \operatorname{sen}(\theta t - \varphi); \tag{2.90}$$

$$\mu(t) = b \cos(\theta t - \varphi). \tag{2.91}$$

Regresando a (2.88) y (2.89), no es difícil ver que en ciertos momentos de tiempo sus segundos sumandos pueden ser mayores de cero y, por consiguiente, el coeficiente dinámico $\mu^*(t)$ de las oscilaciones no permanentes en el tiempo inicial del movimiento puede ser mayor que el coeficiente dinámico $\mu(t)$ de oscilaciones permanentes, es decir, $\mu^*(t) > \mu(t)$.

El valor de amplitud (máximo) del coeficiente μ para sen $(\theta t - \varphi) = 1$ o, respectivamente, para cos $(\theta t - \varphi) = 1$ será:

$$\mu = b = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \gamma^2 \frac{\theta^2}{\omega^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{T^2}{T_\theta^2}\right) + \gamma^2 \frac{T^2}{T_\theta^2}}}, \tag{2.92}$$

donde $T = 2\pi/\omega$ es el período de propias oscilaciones; $T_\theta = 2\pi/\theta$, el período de la fuerza de vibración.

Siendo pequeñas las resistencias, se puede en cierto intervalo inicial de tiempo en las expresiones (2.86), (2.87) adoptar $\alpha \approx 0$; $\varphi \approx 0$; $\omega_1 = \omega$; $e^{-\alpha t} \approx 1$ y escribirlas para $y(0) = 0$; $v(0) = 0$ así:

$$y = \left[\delta_{1p} P : \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)\right]\left(\operatorname{sen}\theta t - \frac{\theta}{\omega}\operatorname{sen}\omega t\right); \tag{2.93}$$

$$y = \left[\delta_{1p} P : \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)\right](\cos\theta t - \cos\omega t). \tag{2.94}$$

Respectivamente los coeficientes dinámicos serán:

$$\mu^*(t) = \frac{1}{1-\frac{\theta^2}{\omega^2}}\left(\operatorname{sen}\theta t - \frac{\theta}{\omega}\operatorname{sen}\omega t\right); \tag{2.95}$$

$$\mu^*(t) = \frac{1}{1-\frac{\theta^2}{\omega^2}}(\cos\theta t - \cos\omega t). \tag{2.96}$$

Según estas expresiones, los máximos valores, que no pueden ser superados corresponden a un caso poco probable cuando simultáneamente sen $\theta t = 1$ y sen $\omega t = -1$, o cuando cos $\theta t = 1$ y cos $\omega t = -1$, se determinan por las fórmulas:

$$\mu^*_{\text{máx}} = \frac{1}{1-\frac{\theta^2}{\omega^2}}\left(1 + \frac{\theta}{\omega}\right) = \frac{1}{1-\frac{\theta}{\omega}} \quad \text{o bien} \quad \mu^*_{\text{máx}} = \frac{2}{1-\frac{\theta^2}{\omega^2}}. \tag{2.97}$$

El máximo coeficiente dinámico (de amplitud) sin considerar las resistencias [véase (2.92)] es,

$$\mu = \frac{1}{1-(\theta^2/\omega^2)}. \tag{2.98}$$

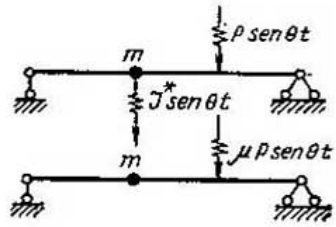


Fig. 35

Puede mostrarse que si no se toman en consideración las resistencias, el desplazamiento de la masa m debido a la fuerza P sen θt (P cos θt) y la fuerza de inercia J^* (t) aplicada a la masa y creada por ésta, es igual al desplazamiento debido a la fuerza P sen θt multiplicada por el coeficiente dinámico μ según (2.98) (fig. 35), es decir,

$$\delta_{1p}P\ (t) + \delta_{11}J^*\ (t) = \mu\delta_{1p}P\ (t).$$

Esto permite realizar el cálculo sin considerar las resistencias a la carga dinámica como si fuera estática, si se multiplica previamente por el coeficiente dinámico, es decir, presentarla como μP sen θt o como μP cos θt.

Ejemplo 13. Determinar el coeficiente dinámico para la fuerza de vibración P sen θt que acciona sobre la masa con el peso $G = 20\,000$ N (fig. 36) con los

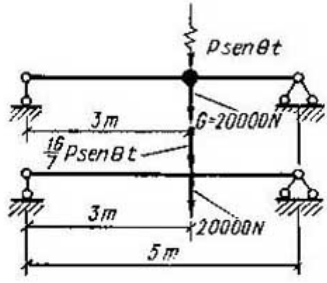


Fig. 36

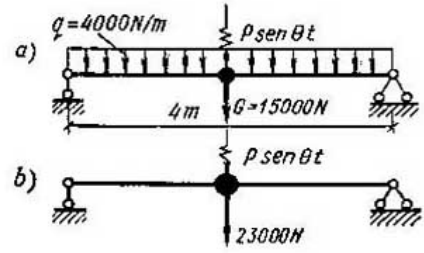


Fig. 37

siguientes datos: $\theta = 30\ \text{s}^{-1}$, $l = 5$ m, $a = 3$ m, $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ Pa, $J = 3773\ \text{cm}^4$ (doble T № 24). Prescindir de la carga distribuida. La flecha estática debida al peso de la masa es,

$$y_{est} = \frac{Ga^2(l-a)^2}{3lEJ} = \frac{20\,000 \cdot 3^2 (5-3)^2}{3 \cdot 5 \cdot 2{,}1 \cdot 10^{11} (3773 \cdot 10^{-8})}\ \text{m} = 0{,}00606\ \text{m}.$$

La frecuencia de oscilaciones libres es,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_{est}}} = \sqrt{\frac{9{,}81}{0{,}00606}}\ \text{s}^{-1} = 40\ \text{s}^{-1},$$

El coeficiente dinámico sin considerar las resistencias según (2.98) es,

$$\mu = 1 : \left(1 - \frac{30^2}{40^2}\right) = 16/7.$$

Las fuerzas que accionan sobre la masa, reducidas a las estáticas, se dan en la fig. 36.

Ejemplo 14. Determinar aproximadamente la tensión dinámica normal al flexionarse una viga debido sólo a la componente vertical de la fuerza centrífuga P sen θt de un motor situado en medio de la viga (fig. 37, *a*), si su masa concentrada $m_1 = 1500$ kg, la masa de la parte desequilibrada del motor $m_2 = 300$ kg, su excentricidad $\rho = 1$ cm, la frecuencia de la carga $\theta = 30$ s^{-1} con los datos siguientes: $l = 4$ m; la viga doble T № 22 con el momento de inercia $J = 2550$ cm^4 y el módulo resistente $W = 232$cm^3; el módulo de elasticidad $E = 2{,}1 \cdot 10^{10} \cdot 9{,}81$ Pa; $g = 9{,}81$ m/s^2; la masa uniformemente distribuida considerando el propio peso $m = 400$ kg/m.

Se debe considerar aproximadamente la masa distribuida como concentrada en el centro de la luz en la mitad de su magnitud.

La masa reducida es:

$$m^* = m_1 + \frac{ml}{2} = 1500 + \frac{400 \cdot 4}{2} = 2300 \text{ kg}.$$

La fuerza de gravedad de la masa reducida es,

$$G^* = m^* g = 2300 \cdot 9{,}81 \text{ N}.$$

La flecha de la viga debida a esa fuerza es,

$$y_{est} = \frac{C^* l^3}{48EJ} = \frac{2300 \cdot 9{,}81 \cdot 4^3}{48\,(2{,}1 \cdot 10^{10} \cdot 9{,}81)\,(2550 \cdot 10^{-8})} = 0{,}0057267 \text{ m}.$$

La frecuencia de oscilaciones según la fórmula (2.17) es,

$$\omega = \sqrt{9{,}81 : 0{,}0057267} = 41{,}389 \text{ s}^{-1}.$$

El coeficiente dinámico según (2.98) es,

$$\mu = 1 : \left[1 - \left(\frac{30}{41{,}39}\right)^2\right] = 2{,}11.$$

La fuerza centrífuga de la masa desequilibrada es,

$$P = m_2 \theta^2 \rho = 300 \cdot 30^2 \cdot 0{,}01 = 2700 \text{ N}.$$

Las fuerzas que accionan sobre la viga, reducidas a la concentrada, se muestran en la fig. 37, *b*.

Los momentos flectores serán:

debidos a la carga estática

$$M_{est} = \frac{(1500 \cdot 9{,}81)\,4}{4} + \frac{(400 \cdot 9{,}81)\,4^2}{8} = 22\,563 \text{ N} \cdot \text{m};$$

debidos a la carga dinámica (de amplitud)

$$M_{din} = \mu \frac{Pl}{4} = 2{,}11 \frac{2700 \cdot 4}{4} = 5697 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Las tensiones son:

$$\sigma_{est} = \frac{22\,563}{(232 \cdot 10^{-6})\,1000} = 97\,254{,}3 \text{ kPa};$$

$$\sigma_{din} = \frac{5697}{(232 \cdot 10^{-6})\,1000} = 24\,556{,}03 \text{ kPa}.$$

La tensión total es,

$$\sigma = 97\,254{,}3 + 24\,556{,}03 = 121\,810{,}33 \text{ kPa}.$$

Ejemplo 15. Determinar las tensiones en las vigas en doble T №№ 22, 24, 24a debidas a la fuerza vertical $P \operatorname{sen} \theta t = 3000 \operatorname{sen} \theta t N$ para $\theta = 50\ s^{-1}$ (fig. 37). Otros datos son los siguientes: la luz de la viga $l = 4$ m, $g = 9{,}81\ m/s^2$; el módulo de elasticidad $E = 2{,}1 \cdot 10^{10} \cdot 9{,}81$ Pa; la masa del motor $m_1 = 1500$ kg, la masa de la carga distribuida $m = 370$ kg/m.

Reducir la masa distribuida de la carga y del propio peso a la concentrada en el centro de la luz en la mitad de su magnitud.

Para la viga № 22: $J = 2550\ cm^4$; $W = 232\ cm^3$; la masa de la viga $m_2 = 24$ kg/m.

Masa reducida:

$$m^* = m_1 + \frac{(m + m_2) l}{2} = 1500 + \frac{(370 + 24)\, 4}{2} = 2288 \text{ kg}.$$

Fuerza de gravedad de la masa reducida:

$$G^* = 2288 \cdot 9{,}81 \text{ N}.$$

Rigidez de la viga en la flexión:

$$EJ = (2{,}1 \cdot 10^{10} \cdot 9{,}81)\ (2550 \cdot 10^{-8}) = 535\,500 \cdot 9{,}81 \text{ N} \cdot \text{m}^2.$$

Flecha de la viga debida a la fuerza de la gravedad:

$$y_{est} = \frac{G^* l^3}{48 EJ} = \frac{2288 \cdot 9{,}81 \cdot 4^3}{48 \cdot 535\,500 \cdot 9{,}81} \text{ m}.$$

Flecha de la viga por unidad de la fuerza:

$$\delta_{11} = \frac{4^3}{48 \cdot 535\,500 \cdot 9{,}81} \text{ m/N}.$$

La frecuencia de oscilaciones propias de la viga según las fórmulas (2.17) es,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_{est}}} = \sqrt{9{,}81 : \frac{2288 \cdot 9{,}81 \cdot 4^3}{48 \cdot 535\,500 \cdot 9{,}81}} = 41{,}497\ s^{-1};$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m^* \delta_{11}}} = \sqrt{1 : 2288\ (4^3 : 48 \cdot 535\,500 \cdot 9{,}81)} = 41{,}497\ s^{-1}.$$

El coeficiente dinámico es,

$$\mu = 1 : \left[1 - \left(\frac{50}{41{,}5}\right)^2\right] = -2{,}214.$$

Los momentos flectores son:
debidos a la carga estática

$$M_{est} = \frac{(1500 \cdot 9{,}81)\, 4}{4} + \frac{(370 \cdot 9{,}81)\, 4^2}{8} + \frac{(24 \cdot 9{,}81)\, 4^2}{8} = 22\,445{,}28 \text{ N} \cdot \text{m};$$

debidos a la carga dinámica (de amplitud)

$$M_{din} = 2{,}214\, \frac{3000 \cdot 4}{4} = 6642 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Las tensiones son:

$$\sigma_{est} = \frac{22\,445{,}28}{(232 \cdot 10^{-6})\, 1000} = 96\,746{,}9 \text{ kPa};$$

$$\sigma_{din} = \frac{6642}{(232 \cdot 10^{-6})\, 1000} = 28\,629{,}3 \text{ kPa}.$$

La tensión total es,

$$\sigma = 96\,746{,}9 + 28\,629{,}3 = 125\,376{,}2 \text{ kPa}.$$

Para la viga № 24: $J = 3460$ cm^4; $W = 289$ cm^3; la masa de la viga $m_2 = 27{,}3$ kg/m.

Masa reducida:

$$m^* = 1500 + \frac{370 \cdot 4}{2} + \frac{27{,}3 \cdot 4}{2} = 2294{,}6 \text{ kg}.$$

Fuerza de gravedad de la masa reducida:

$$G^* = 2294{,}6 \cdot 9{,}81 \text{ N}.$$

Rigidez de la viga en la flexión:

$$EJ = (2{,}1 \cdot 10^{10} \cdot 9{,}81)\,(3460 \cdot 10^{-8}) = 726\,600 \cdot 9{,}81 \text{ N} \cdot \text{m}^2.$$

Flecha de la viga debida a la fuerza de la gravedad:

$$y_{est} = \frac{(2294{,}6 \cdot 9{,}81)\,4^3}{48 \cdot 726\,600 \cdot 9{,}81} = 0{,}004211 \text{ m}.$$

Frecuencia de oscilaciones propias de la viga:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_{est}}} = \sqrt{\frac{9{,}81}{0{,}004211}} = 48{,}27 \text{ s}^{-1}.$$

Coeficiente dinámico:

$$\mu = 1 : \left[1 - \left(\frac{50}{48{,}27}\right)^2\right] = -13{,}705.$$

Los momentos flectores son:
debidos a la carga estática

$$M_{est} = \frac{(1500 \cdot 9{,}81)\,4}{4} + \frac{(370 \cdot 9{,}81)\,4^2}{8} + \frac{(27{,}3 \cdot 9{,}81)\,4^2}{8} = 22\,510{,}026 \text{ N} \cdot \text{m};$$

debidos a la carga dinámica (de amplitud)

$$M_{din} = 13{,}705 \frac{3000 \cdot 4}{4} = 41\,115 \text{ Nm}.$$

Las tensiones son:

$$\sigma_{est} = 22\,510{,}026 : (289 \cdot 10^{-6})\,1000 = 77\,889{,}4 \text{ kPa};$$

$$\sigma_{din} = 41\,115 : (289 \cdot 10^{-6})\,1000 = 142\,266{,}4 \text{ kPa}.$$

La tensión total $\sigma = 77\,889{,}4 + 142\,266{,}4 = 220\,155{,}8$ kPa lo que *es mayor* que las tensiones en la viga № 22.

Para la viga N 24a: $J = 3800$ cm^4; $W = 317$ cm^3; la masa de la viga $m_2 = 29{,}4$ kg/m.

La masa reducida es,

$$m^* = 1500 + \frac{370 \cdot 4}{2} + \frac{29{,}4 \cdot 4}{2} = 2298{,}8 \text{ kg}.$$

La fuerza de gravedad de la masa reducida es,

$$G^* = 2298{,}8 \cdot 9{,}81 \text{ N}.$$

La regidez de la viga en la flexión es,

$$EJ = (2{,}1 \cdot 10^{10} \cdot 9{,}81)\,(3800 \cdot 10^{-8}) = 798\,000 \cdot 9{,}81 \text{ N} \cdot \text{m}^2.$$

La flecha debida a la fuerza de gravedad es,

$$y_{est} = \frac{2298{,}8 \cdot 9{,}81 \cdot 4^3}{48 \cdot 798\,000 \cdot 9{,}81} = 0{,}0038409 \text{ m}.$$

La frecuencia de oscilaciones propias de la viga es,

$$\omega = \sqrt{9{,}81 : 0{,}003841} = 50{,}537 \text{ s}^{-1}.$$

El coeficiente dinámico es,

$$\mu = 1 : \left[1 - \left(\frac{50}{50{,}54}\right)^2\right] = 47{,}05.$$

Los momentos flectores son:

$$M_{est} = 9{,}81 \left(\frac{1500 \cdot 4}{4} + \frac{370 \cdot 4^2}{8} + \frac{29{,}4 \cdot 4^2}{8}\right) = 22\,551{,}228 \text{ N} \cdot \text{m};$$

$$M_{din} = 47{,}05 \frac{3000 \cdot 4}{4} = 141\,150 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Las tensiones son:

$$\sigma_{est} = 22\,551{,}228 : (317 \cdot 10^{-6})\ 1000 = 71\,139{,}52 \text{ kPa};$$
$$\sigma_{din} = 141\,150 : (317 \cdot 10^{-6})\ 1000 = 445\,268{,}13 \text{ kPa}.$$

La tensión total $\sigma = 71\,139{,}52 + 445\,268{,}13 = 516\,407{,}65$ kPa, lo que *es mayor* que las tensiones en las vigas №№ 22 y 24, y lo que para muchos aceros ya rebasa el límite de proporcionalidad, cuando el cálculo realizado se hace infundado.

Así pues, las tensiones en las vigas más potentes №№ 24 y 24a resultaron mayores que en la viga № 22. Esto quiere decir que con la carga dinámica el aumento de la sección de la viga *no siempre* lleva a la reducción de las tensiones.

§ 16. INVESTIGACIÓN DE LOS COEFICIENTES DINÁMICOS DEBIDOS A LA CARGA VIBRATORIA.

1. Coeficiente dinámico de oscilaciones permanentes considerando las resistencias debido a P sen θt o P cos θt. Véase su expresión en (2.92) donde

$$\gamma^2 = \frac{4\alpha^2}{\omega^2} = \frac{\beta^2}{m^2\omega^2} = \frac{\beta^2\delta_{11}}{m}.$$

El diagrama de μ en función de T/T_θ puede verse en la fig. 38. Las curvas tienen los máximos a la izquierda de $T/T_\theta = 1$, su posición y valores se determinan mediante las fórmulas:

$$\frac{T}{T_\theta} = \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2}} \leqslant 1; \quad \mu_{máx} = \frac{1}{\gamma\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}}.$$

Cuando $T/T_\theta = 1$, $\mu = 1/\gamma$, la magnitud está próxima a $\mu_{máx}$ para $\gamma < 1$.

Del diagrama de los coeficientes dinámicos (véase la fig. 38) se desprende lo siguiente:

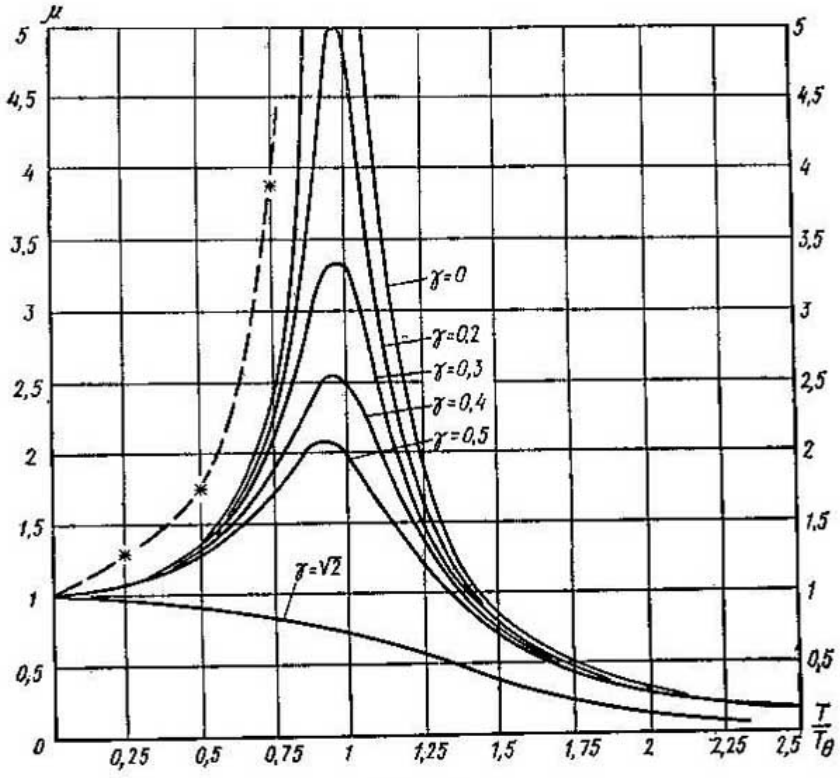


Fig. 38

1) las fuerzas de resistencia reducen el coeficiente dinámico;
2) dentro de los límites de $T/T_\theta \leqslant 0{,}7$ y $T/T_\theta \geqslant 1{,}3$ la resistencia se refleja débilmente en el coeficiente dinámico;
3) aproximadamente en estos mismos límites, de $T/T_\theta = 0{,}7$ a $T/T_\theta = 1{,}3$, donde la resistencia influye notablemente, sobre todo con T/T_θ próximos a la unidad, el coeficiente dinámico a pesar de todo, para $\gamma < 0{,}4$ se hace considerable.

Llamemos en adelante esta zona de $T/T_\theta = 0{,}7$ a $T/T_\theta = 1{,}3$ zona *de resonancia*. Al proyectar las obras, es deseable evitar esta zona, y sobre todo los casos próximos a

$$T/T_\theta = \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2}}.$$

2. Coeficiente dinámico total para P sen θt sin considerar las resistencias. Véase su expresión en (2.95).

Los máximos valores de μ^* según (2.95) se determinan mediante los métodos corrientes. Estos mismos, con exceso, pueden calcularse según la fórmula (2.97).

Ofrecemos algunos datos de tales cálculos:

Para $\theta : \omega = 1/4$ según (2.95) $\mu^*_{\text{máx}} = 1{,}27$

» $\theta : \omega = 1/2$ según (2.95) $\mu^*_{\text{máx}} = 1{,}732$

» $\theta : \omega = 3/4$ según (2.95) $\mu^*_{\text{máx}} = 3{,}90$

según (2.97) $\mu^*_{\text{máx}} = 4/3$; $\mu^*_{\text{máx}} = 2$; $\mu^*_{\text{máx}} = 4$.

Los valores según (2.95) están señalados en la fig. 38 con estrellas.

Para $\theta \to \omega$, la expresión (2.95) da una indeterminación, abriendo la cual se tendrá lo siguiente:

$$\mu^*(t) = -\frac{1}{2}(\omega t \cos \omega t - \operatorname{sen} \omega t) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(2\pi \frac{t}{T} \cos 2\pi \frac{t}{T} - \operatorname{sen} 2\pi \frac{t}{T}\right). \qquad (2.99)$$

Hallemos los máximos de la expresión (2.99):

$$\mu^*(t) = -\frac{1}{2}\left[\frac{2\pi}{T} \cos 2\pi \frac{t}{T} - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 t \operatorname{sen} 2\pi \frac{t}{T} - \frac{2\pi}{T} \cos 2\pi \frac{t}{T}\right] = 0.$$

De aquí se obtiene que $\operatorname{sen} 2\pi \frac{t}{T} = 0$; $\cos 2\pi \frac{t}{T} = \pm 1$; $t = \frac{kT}{2}$;

$$\mu^*_{\substack{\text{máx} \\ \text{mín}}} = \pm \pi \frac{t}{T} = \pm \frac{k\pi}{2}. \qquad (2.100)$$

Las ordenadas extremales de la expresión (2.99) se encuentran en las rectas (2.100).

El diagrama del coeficiente dinámico (2.99) aumentado en y_{est} veces se da en la fig. 39. Este mismo puede considerarse diagrama de crecimiento de las oscilaciones debido a la fuerza P sen θt, si se toma en consideración que $y_{\text{din}} = \mu y_{\text{est}}$. De este diagrama se deduce:

1) las amplitudes del coeficiente dinámico y de las oscilaciones crecen según la ley lineal y bastante rápidamente. Así, por ejemplo, cuando $t = 2{,}5\ T$, el coeficiente dinámico es igual a $2{,}5\ \pi$, lo que significa que el desplazamiento dinámico es tantas veces mayor que el estático;

2) las amplitudes de los coeficientes dinámicos y de los desplazamientos están desfasados con respecto a la fuerza que actúa en un cuarto de período, es decir, se retrasan en un tiempo $t = T/4$ (véase la fig. 39).

Huelga señalar que para grandes amplitudes de oscilaciones, la teoría de pequeñas oscilaciones, a base de la cual está construido el diagrama en la fig. 39, se hace inexacta y debe sustituirse por una teoría más perfecta.

3. Coeficiente dinámico total para P cos θt sin considerar las resistencias, cuando $\theta \to \omega$, lo obtenemos según (2.96). Si $\theta \to \omega$, enton-

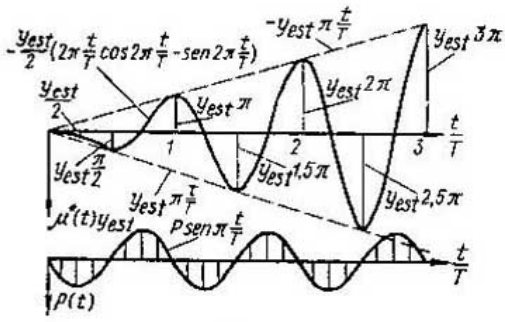


Fig. 39

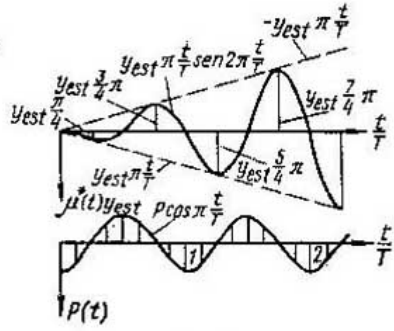


Fig. 40

ces y en este caso será una indeterminación, abriendo la cual se tendrá:

$$\mu^*(t) = \frac{\omega t}{2} \operatorname{sen} \omega t = \pi \frac{t}{T} \operatorname{sen} 2\pi \frac{t}{T}. \qquad (2.101)$$

También en este caso los valores máximos del coeficiente dinámico se encuentran en las rectas (2.100). El diagrama de los coeficientes dinámicos o de las oscilaciones, amplificado en y_{est} veces se da en la fig. 40.

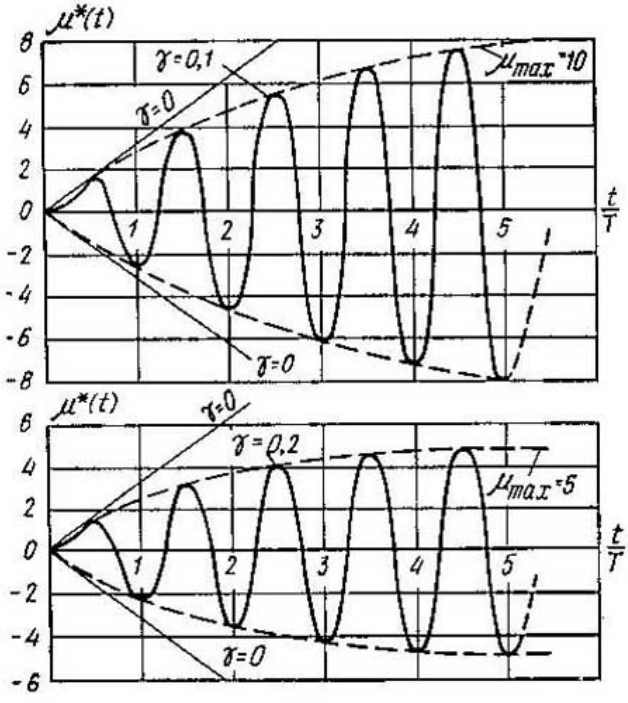


Fig. 41

4. Coeficiente dinámico total para P sen θt considerando la resistencia, cuando $\theta/\omega = 1$. El coeficiente dinámico en este caso lo obtendremos según (2.88), y lo escribiremos sustituyendo $2\alpha/\omega = \gamma$, $\omega = 2\pi/T$ y $\omega_1 = \omega\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{4}}$:

$$\mu^*(t) = \frac{1}{\gamma}\left[-\cos 2\pi\frac{t}{T} + e^{-\gamma\pi\frac{t}{T}}\left(\cos 2\pi\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{4}}\,\frac{t}{T} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\gamma}{2\sqrt{1-\gamma^2:4}}\operatorname{sen} 2\pi\sqrt{1-\gamma^2:4}\,\frac{t}{T}\right)\right]. \qquad (2.102)$$

Según esta expresión, suponiendo $\gamma = 0{,}1$, $\gamma = 0{,}2$ y $t/T = 0{,}25$; 0,5; 0,75; 1; 1,25; 1,5; 1,75; 2, etc., están construidos los diagramas de variación del coeficiente dinámico (fig. 41), de los cuales se ve que, una vez transcurrido el tiempo igual a un pequeño número (del orden de 3—6) de períodos de oscilaciones libres T, el coeficiente dinámico se aproxima a su valor límite $1/\gamma$.

Un cuadro análogo lo obtendremos también durante la acción de la fuerza P cos θt.

§ 17. DESARROLLO DE LA FUERZA ACTUANTE $P(t)$ EN SERIE FOURIER.

Las soluciones obtenidas anteriormente de la ecuación diferencial (2.80) durante la acción de las fuerzas P sen θt y P cos θt pueden utilizarse para cualquier fuerza $P(t)$, si ésta o el desplazamiento debido a las fuerzas $\Delta_{1p}(t)$ se desarrolla en serie Fourier.

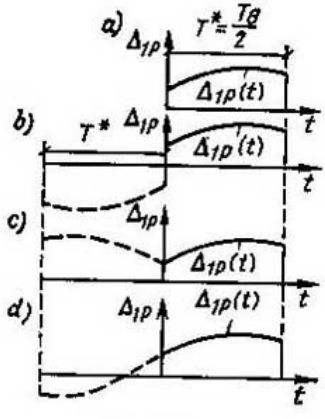


Fig. 42

Supongamos que $\Delta_{1p}(t)$ representa una función periódica con el período $T_\theta = 2\pi/\theta$, y si es aperiódica, entonces tomaremos el tiempo de su existencia T^* por el semiperíodo convencional (fig. 42, *a*); en este caso $\Delta_{1p}(t)$ puede representarse [al cumplirse las condiciones de Dirichlet] para la función $\Delta_{1p}(t)$ en forma de la serie Fourier.

1. Desarrollo de $\Delta_{1p}(t)$ en el intervalo de 0 a T^* sólo respecto a los senos o sólo respecto a los cosenos. Desarrollo *respecto a los senos*. Prolongamos la función $\Delta_{1p}(t)$ hacia la izquierda desde el origen de coordenadas de un modo impar (fig. 42, *b*):

$$\Delta_{1p}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen} c_k t,$$

donde,

$$c_k = \frac{k\pi}{T^*}; \quad b_k = \frac{2}{T^*}\int_0^{T^*} \Delta_{1p}(t)\operatorname{sen}\frac{k\pi t}{T^*}\,dt.$$

La ecuación diferencial (2.50) será:

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega^2 y = \omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen} c_k t. \qquad (2.103)$$

Supongamos que falta el movimiento inicial, es decir, $y\ (0) = 0$ e $\dot{y}\ (0) = v\ (0) = 0$.

Basándose en la propiedad de las ecuaciones diferenciales lineales, según la cual la solución de la ecuación (2.103) puede obtenerse como la suma de soluciones de cada sumando de su segundo miembro, escribamos inmediatamente esta solución fundándose en la expresión (2.86) para $y\ (0) = 0$, $v\ (0) = 0$ en la siguiente forma:

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\sqrt{\left(1 - \frac{c_k^2}{\omega^2}\right)^2 + \gamma^2 \frac{c_k^2}{\omega^2}}} \left[\operatorname{sen}(c_k t - \varphi_k) + e^{-\alpha t} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\operatorname{sen} \varphi_k \cos \omega_1 t + \frac{\alpha \operatorname{sen} \varphi_k - c_k \cos \omega_k}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t \right) \right], \qquad (2.104)$$

donde

$$\operatorname{tg} \varphi_k = 2\alpha c_k : (\omega^2 - c_k^2).$$

Desarrollo *respecto a los cosenos*. Prolongamos la función $\Delta_{1p}\ (t)$ hacia la izquierda de un modo par (fig. 42, *c*):

$$\Delta_{1p}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos c_k t,$$

donde,

$$a_k = \frac{2}{T^*} \int_0^{T^*} \Delta_{1p}(t) \cos \frac{k\pi t}{T^*} dt$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \infty).$$

La ecuación diferencial (2.50) es,

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega^2 y = \omega^2 \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos c_k t \right). \qquad (2.105)$$

La solución de esta ecuación con iguales condiciones iniciales del movimiento y a base de la propiedad de las ecuaciones lineales la tendremos por separado para cada sumando del segundo miembro de (2.105):

$$\omega^2 \frac{a_0}{2} \quad \text{y} \quad \omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos c_k t.$$

Si en el segundo miembro se tiene el sumando $\omega^2 \frac{a_0}{2}$, entonces basándose en (2.69) mediante la sustitución de $\delta_{1p} P$ por $a_0/2$ y algunas

transformaciones se tendrá

$$y = \frac{a_0}{2}\left[1 - e^{-\alpha t}\left(\cos \omega_1 t + \frac{\alpha}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t\right)\right]. \qquad (2.106)$$

Si en el miembro derecho se encuentra $\omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos c_k t$, entonces según (2.87) para $y(0) = 0$, $v(0) = 0$ tenemos,

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{\left(1 - \frac{c_k^2}{\omega_k^2}\right)^2 + \gamma^2 \frac{c_k^2}{\omega_k^2}}}\left[\cos(c_k t - \varphi_k) - e^{-\alpha t} \times\right.$$

$$\left. \times \left(\cos \varphi_k \cos \omega_1 t + \frac{\alpha \cos \varphi_k + c_k \operatorname{sen} \varphi_k}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t\right)\right]. \qquad (2.107)$$

La solución total de (2.105) es la suma de soluciones (2.106) y (2.107).

2. **Desarrollo de $\Delta_{1p}(t)$ en el intervalo de 0 a T^* en series completas.** Aquí la función $\Delta_{1p}(t)$ se encuentra hacia la izquierda del origen de coordenadas en un semiperíodo, es decir, en $t = -T^*$ y puede ser admitida cualquiera, inclusive igual a cero (fig. 42, *d*):

$$\Delta_{1p}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos c_k t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen} c_k t,$$

donde

$$c_k = \frac{k\pi}{T^*}; \quad a_k = \frac{1}{T^*} \int_{-T^*}^{T^*} \Delta_{1p}(t) \cos \frac{k\pi}{T^*} t \, dt;$$

$$b_k = \frac{1}{T^*} \int_{-T^*}^{T^*} \Delta_{1p}(t) \operatorname{sen} \frac{k\pi t}{T^*} dt.$$

La ecuación diferencial es,

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega^2 y = \omega^2 \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos c_k t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen} c_k t\right). \qquad (2.108)$$

Su solución para $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = v(0) = 0$ se obtendrá sumando las expresiones (2.104), (2.106) y (2.107).

§ 18. DESPLAZAMIENTOS FORZADOS DE LOS APOYOS DEL SISTEMA (PERTURBACIÓN CINEMÁTICA). Supongamos que el extremo izquierdo de la viga (fig. 43, *a*) adquiere un desplazamiento forzado $\Delta(t)$; se necesita determinar el movimiento de la masa m del sistema dado. Veamos dos casos.

1. Caso general de desplazamiento del apoyo $\Delta(t)$. Designemos por $\delta_{m\Delta}$ el desplazamiento de la masa m debido al desplazamiento

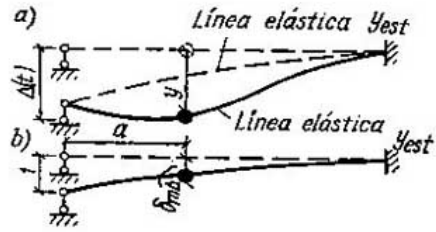


Fig. 43

dado del apoyo $\Delta = 1$, considerándolo estático, con el cual falta la fuerza de inercia de la masa (fig. 43, *b*).

Escribamos la ecuación diferencial de movimiento de la masa según el principio de la adición de los desplazamientos debidos a las fuerzas que actúan sobre el sistema y a los desplazamientos de los apoyos:

$$y = \delta_{m\Delta}\Delta(t) + \delta_{11}(-m\ddot{y} - \beta\dot{y})$$

o bien

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega^2 y = \omega^2\delta_{m\Delta}\Delta(t) = F_1(t), \qquad (2.109)$$

donde

$$2\alpha = \frac{\beta}{m}; \quad \omega^2 = 1 : m\delta_{11}.$$

La ecuación (2.109) por la forma coincide con la ecuación (2.50), por lo tanto escribiremos de inmediato su solución según (2.52):

$$y = y_{lib} + \int_0^t \omega^2\delta_{m\Delta}\Delta(u)\, e^{-\alpha(t-u)}\, \frac{\operatorname{sen}\omega_1(t-u)}{\omega_1}\, du. \qquad (2.110)$$

Respectivamente, sin considerar la resistencia según (2.54) tenemos que

$$y = y(0)\cos\omega t + \frac{v(0)}{\omega}\operatorname{sen}\omega t + \int_0^t \omega\delta_{m\Delta}\Delta(u)\operatorname{sen}\omega(t-u)\, du. \qquad (2.111)$$

2. El caso cuando $\Delta(t) = \Delta_1 \operatorname{sen}\theta t + \Delta_2 \cos\theta t$, siendo Δ_1 y Δ_2 los desplazamientos de una dirección. La ecuación diferencial de movimiento de la masa m será:

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega^2 y = \omega^2\delta_{m\Delta}(\Delta_1 \operatorname{sen}\theta t + \Delta_2 \cos\theta t). \qquad (2.112)$$

Esta ecuación, a su vez, se parece a la (2.80), por eso escribiremos su solución a partir de las soluciones hechas (2.86) y (2.87) de la ecuación (2.80):

para $\Delta \operatorname{sen} \theta t$ y las condiciones iniciales $y(0) = 0$; $\dot{y}(0) = v(0) = 0$

$$y = \frac{\delta_{m\Delta}\Delta}{\sqrt{\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2+\gamma^2\frac{\theta^2}{\omega^2}}}\left[\operatorname{sen}(\theta t-\varphi)+e^{-\alpha t}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\operatorname{sen}\varphi\cos\omega_1 t+\frac{\alpha\operatorname{sen}\varphi-\theta\cos\varphi}{\omega_1}\operatorname{sen}\omega_1 t\right)\right], \qquad (2.113)$$

para $\Delta \cos \theta t$

$$y = \frac{\delta_{m\Delta}\Delta}{\sqrt{\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2+\gamma^2\frac{\theta^2}{\omega^2}}}\left[\cos(\theta t-\varphi)-e^{-\alpha t}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\cos\varphi\cos\omega_1 t+\frac{\alpha\cos\varphi+\theta\operatorname{sen}\varphi}{\omega_1}\operatorname{sen}\omega_1 t\right)\right]. \qquad (2.114)$$

Para las oscilaciones permanentes, las expresiones (2.113) — (2.114) serán:

$$y = \delta_{m\Delta}\Delta\operatorname{sen}(\theta t-\varphi) : \sqrt{\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2+\gamma^2\frac{\theta^2}{\omega^2}}\,; \qquad (2.115)$$

$$y = \delta_{m\Delta}\Delta\cos(\theta t-\varphi) : \sqrt{\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2+\gamma^2\frac{\theta^2}{\omega^2}}\,. \qquad (2.116)$$

Las ecuaciones (2.113) y (2.114) sin considerar la resistencia cuando t es pequeña son:

$$y = \frac{\delta_{m\Delta}\Delta}{\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)}\left(\operatorname{sen}\theta t-\frac{\theta}{\omega}\operatorname{sen}\omega t\right); \qquad (2.117)$$

$$y = \frac{\delta_{m\Delta}\Delta}{\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)}(\cos\theta t-\cos\omega t). \qquad (2.118)$$

La fuerza de inercia con oscilaciones permanentes es,

$$J^* = m\theta^2 y. \qquad (2.119)$$

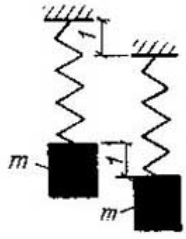


Fig. 44

Ejemplo 16. Deducir la ecuación de movimiento permanente de la masa m suspendida de un muelle (fig. 44), si el punto de suspensión se traslada según la ley $\Delta(t) = a \operatorname{sen} \theta t$. Prescindir de la resistencia. Según la fig. 44 se tiene $\delta_{m\Delta} = 1$. De acuerdo con (2.115) $y = a \operatorname{sen} \theta t : \left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)$.

Ejemplo 17. Deducir las fórmulas para construir el diagrama de momentos de flexión en una viga con extremos empotrados y la masa concentrada m en el centro de la luz (fig. 45, *a*), siendo permanentes las oscilaciones, si el empotramiento izquierdo gira según la ley $\Delta(t) = \varphi \operatorname{sen} \theta t$, y construir el diagrama de momentos de flexión en la viga para $\theta^2/\omega^2 = 0{,}5$. Prescindir de la resistencia.

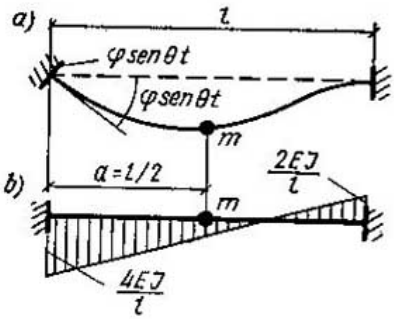


Fig. 45

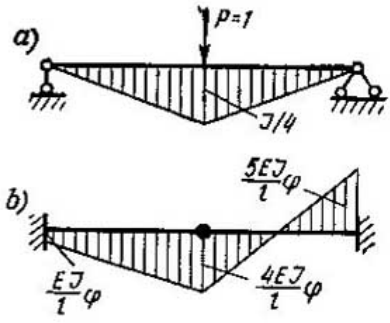


Fig. 46

El diagrama estático de los momentos debido al giro del empotramiento izquierdo en el ángulo $\varphi = 1$ se da en la fig. 45, *b*. Para determinar $\delta_{m\Delta}$ utilizamos el estado auxiliar (fig. 46, *a*). «Multiplicando» los diagramas se tendrá

$$\delta_{m\Delta} = \frac{l}{2}\,\frac{l}{4}\,\frac{EJ}{l}\,\frac{1}{EJ} = \frac{l}{8}.$$

La ecuación de movimiento de la masa según (2.115) es,

$$y = \frac{l}{8}\,\varphi \operatorname{sen} \theta t : \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right).$$

La fuerza de inercia según (2.119) es,

$$J^* = m\theta^2\,\frac{l}{8}\,\varphi \operatorname{sen} \theta t : \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right).$$

La frecuencia de oscilaciones libres es,

$$\omega^2 = \frac{1}{m\delta_{11}} = \frac{192EJ}{ml^3}.$$

De aquí la masa $m = 192\ EJ : \omega^2 l^3$.
Ahora tenemos que

$$J^* = \frac{24EJ}{l^2}\,\varphi\,\frac{\dfrac{\theta^2}{\omega^2}}{1 - \dfrac{\theta^2}{\omega^2}} \operatorname{sen} \theta t. \qquad (2.120)$$

El momento en el empotramiento izquierdo será:

$$M(0) = \frac{4EJ}{l}\,\varphi \operatorname{sen} \theta t - \frac{J^* l}{8} = \frac{4EJ}{l}\,\varphi \operatorname{sen} \theta t\,\frac{1 - \dfrac{7}{4}\,\dfrac{\theta^2}{\omega^2}}{1 - \dfrac{\theta^2}{\omega^2}}. \qquad (2.121)$$

La fuerza transversal en el empotramiento izquierdo será:

$$Q(0) = -\frac{6EJ}{l^2}\,\varphi \operatorname{sen} \theta t + \frac{J^*}{2} = -\frac{6EJ}{l^2}\,\varphi \operatorname{sen} \theta t\,\frac{1 - 3\,\dfrac{\theta^2}{\omega^2}}{1 - \dfrac{\theta^2}{\omega^2}}. \qquad (2.122)$$

El momento de flexión bajo la masa en el medio de la luz es,

$$M\left(\frac{l}{2}\right)=M(0)+Q(0)\,\frac{l}{2}=\frac{EJ}{l}\,\varphi\,\operatorname{sen}\theta t\,\frac{1+2\,\frac{\theta^2}{\omega^2}}{1-\frac{\theta^2}{\omega^2}}. \qquad (2.123)$$

El momento en el empotramiento derecho será:

$$M(l)=-\frac{2EJ}{l}\,\varphi\,\operatorname{sen}\theta t-\frac{J^*l}{8}=-\frac{2EJ}{l}\,\varphi\,\operatorname{sen}\theta t\,\frac{1+\frac{1}{2}\,\frac{\theta^2}{\omega^2}}{1-\frac{\theta^2}{\omega^2}}. \qquad (2.124)$$

Todas las fórmulas están obtenidas. Hallemos los valores de los momentos para $\frac{\theta^2}{\omega^2}=0{,}5$:

$$M(0)=\frac{4EJ}{l}\,\varphi\,\operatorname{sen}\theta t\,\frac{1-\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{EJ}{l}\,\varphi\,\operatorname{sen}\theta t;$$

$$M\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{4EJ}{l}\,\varphi\,\operatorname{sen}\theta t; \qquad M(l)=-\frac{5EJ}{l}\,\varphi\,\operatorname{sen}\theta t.$$

El diagrama de momentos de flexión está construida en la fig. 46, *b*.

Ejemplo 18. Obtener las fórmulas de M (0) y Q (0) en el empotramiento de la viga, si éste gira en el ángulo $\Delta(t)=\varphi\,\operatorname{sen}\theta t$ (fig. 47). Prescindir de la resistencia.

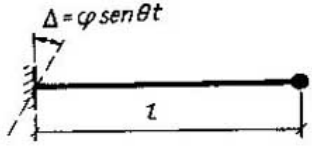


Fig. 47

El desplazamiento estático de la masa durante el giro en $\varphi=1$ es,

$$\delta_{m\Delta}=1l.$$

La ecuación de movimiento de la masa según (2.115) es,

$$y=l\varphi\,\operatorname{sen}\theta t:\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right). \qquad (2.125)$$

La fuerza de inercia según (2.119) es,

$$J^*=m\theta^2 l\varphi\,\operatorname{sen}\theta t:\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right).$$

La frecuencia de oscilaciones libres del sistema es,

$$\omega^2=\frac{1}{m\delta_{11}}=\frac{3EJ}{ml^3}.$$

De aquí

$$m=\frac{3EJ}{\omega^2 l^3}.$$

Ahora la fuerza de inercia será:

$$J^* = \frac{3EJ}{l^2}\varphi \operatorname{sen}\theta t \frac{\theta^2}{\omega^2} : \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right). \qquad (2.126)$$

El momento flector en el lugar de empotramiento es,

$$M(0) = -J^* l = -\frac{3EJ}{l}\varphi \operatorname{sen}\theta t \frac{\theta^2}{\omega^2} : \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right). \qquad (2.127)$$

La fuerza transversal

$$Q(0) = J^* = \frac{3EJ}{l^2}\varphi \operatorname{sen}\theta t \frac{\theta^2}{\omega^2} : \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right). \qquad (2.128)$$

§ 19. ALGUNAS APLICACIONES TÉCNICAS DE LA TEORÍA DE OSCILACIONES. **Absorbedores de las oscilaciones (amortiguadores).** Para suavizar la acción sobre la base de la fuerza vertical vibratoria aplicada a la masa m (fig. 48), entre dicha masa y la base se introducen muelles suaves y flexibles (amortiguadores) con tal de que las oscilaciones de la masa m sean lo posible menores.

Examinando la masa m sobre los muelles como un sistema con un grado de libertad, podemos escribir, basándose en (2.86), las oscilaciones permanentes, considerando las resistencias, en la siguiente forma:

$$y = P\delta_{1p} \operatorname{sen}(\theta t - \lambda) : \sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \gamma^2 \frac{\theta^2}{\omega^2}}. \qquad (2.129)$$

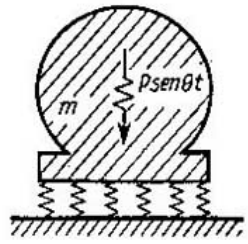


Fig. 48

A fin de que las oscilaciones sean pequeñas, es necesario hacer la frecuencia de oscilaciones libres ω de la masa m suspendida por resortes muchas veces menor que la frecuencia de la fuerza que actúa. Así, por ejemplo, si $\theta/\omega = 10$, entonces, hasta menospreciando las resistencias, obtendremos:

$$y_{\text{máx}} = \frac{P\delta_{1p}}{\sqrt{(1-10^2)^2 + \gamma^2 \cdot 10^2}} \approx \frac{P\delta_{1p}}{99}.$$

Esto quiere decir que hasta siendo muy pequeña la resistencia, $y_{\text{máx}}$ constituye sólo un por ciento del desplazamiento estático de la masa $\delta_{1p}P$ bajo la acción de la fuerza P y, por consiguiente, la presión sobre la base debida a la fuerza P sen θt casi es igual a cero. Así pues, la presión del motor sobre la base casi es igual sólo a su masa.

Si se admite que debido a la fuerza P puede transmitirse a la base la fuerza de amplitud μP, para μ igual, por ejemplo, a 1/15 — 1/40 (ver [53]), entonces fácilmente obtendremos la igualdad

$$\mu = 1 : \sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \gamma^2 \frac{\theta^2}{\omega^2}} \approx \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{40}\right). \qquad (2.130)$$

El **vibrógrafo** es un instrumento para escribir las oscilaciones de una obra. Representa un sistema con un grado de libertad. Su esquema principal más simple se da en la fig. 49. En una caja está suspendida de un muelle flexible la masa pesada m con un lápiz que se apoya en un tambor movido por un mecanismo de reloj.

Si tal instrumento se pone sobre una obra que oscila según la ley $\Delta = a \operatorname{sen} \theta t$ y escogemos la rigidez del muelle y la masa del instrumento de tal manera que las oscilaciones de la masa del instrumento, forzadas por la perturbación cinemática, sean bastante pequeñas, entonces la masa seguirá prácticamente en un lugar, y el

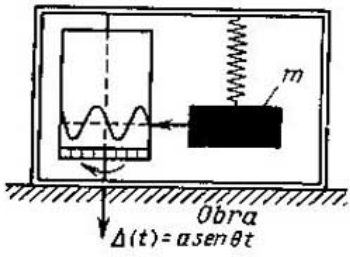


Fig. 49

lápiz escribirá sobre el tambor las oscilaciones del sistema en dirección inversa.

Para esto, según (2.115), es necesario que θ/ω sea grande, e

$$y_{\text{máx}} = \frac{a}{\sqrt{\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2+\gamma^2\frac{\theta^2}{\omega^2}}} \text{ sea pequeño.}$$

Si, al igual que antes, se adopta $\theta/\omega = 10$, entonces, incluso prescindiendo de las resistencias, tendremos:

$$y \approx \frac{1}{99} a \operatorname{sen} \theta t.$$

Esto quiere decir que el error teórico cometido durante el registro de las oscilaciones de la obra será del orden de un por ciento.

Si el vibrógrafo se pone sobre la obra la cual realiza en el lugar de colocación del instrumento un movimiento expresado en forma general, como $\Delta = f(t)$, entonces el desplazamiento forzado de la masa del instrumento, sin considerar las resistencias, será según (2.111):

$$y = \int_0^t \omega f(u) \operatorname{sen} \omega (t-u)\, du.$$

Los desplazamientos de la masa serán pequeños si la frecuencia de oscilaciones libres del instrumento ω es pequeña, y entonces el vibrógrafo reproducirá, con cierta exactitud, el registro del movimiento de la obra en el lugar de instalación del instrumento.

CAPÍTULO 3 * SISTEMAS CON VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

§ 20. ECUACIONES DIFERENCIALES DE MOVIMIENTO. Examinemos en calidad de objeto de sistemas con un número finito de grados de libertad una viga elástica imponderable con n masas puntuales concentradas (fig. 50, *a*).

Dejemos que sobre la viga actúen la carga dada $P(t)$ y los desplazamientos cinemáticos dados de los apoyos $\Delta(t)$.

Durante el movimiento, sobre la viga han de actuar en calidad de fuerzas exteriores complementarias aplicadas a las masas las fuerzas de inercia de la masa J_k^* y las fuerzas de resistencia al movimiento P_k^*. Sus direcciones están indicadas de acuerdo con las direcciones positivas de los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones de la masa (fig. 50, *b*).

Representemos las fuerzas complementarias de inercia que actúan y las fuerzas de resistencia al movimiento de las masas como fuerzas en los enlaces elásticos imaginarios en forma de muelles (fig. 51), impuestos complementariamente sobre el sistema en dirección de los movimientos realizados por las masas. En este caso la característica elástica de los muelles debe subordinarse a la siguiente ley:

$$c_k y_k(t) = J_k^* + P_k^* = m_k \ddot{y}_k(t) + P_k^*.$$

De aquí se obtiene la característica de la rigidez del muelle

$$c_k = [m_k \ddot{y}(t) + P_k^*] : y_k(t). \tag{3.1}$$

Una vez que se han impuesto sobre el sistema los enlaces complementarios (imaginarios), el problema dinámico se reduce al estático, convirtiéndose en este caso el sistema en n veces más estáticamente indeterminado.

El cálculo del sistema con enlaces imaginarios puede realizarse tanto según el método de fuerzas como según el de desplazamientos.

Aplicación del método de fuerzas. Obtenemos el sistema básico eliminando los enlaces imaginarios (fig. 52). Dirigimos las fuerzas incógnitas X_i en dirección de los desplazamientos positivos de las masas, es decir, hacia abajo. Estas fuerzas incógnitas X_i representan las fuerzas de inercia y las de resistencia con signo inverso, es decir,

$$X_i = -[m_i \ddot{y}_i(t) + P_i^*]. \tag{3.2}$$

La ecuación canónica general puede escribirse así

$$\delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \ldots + \delta_{kn}X_n + \Delta_k(t) = -\frac{X_k}{c_k}$$

o bien

$$\delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \ldots + \delta_{kn}X_n + \frac{X_k}{c_k} + \Delta_k(t) = 0, \tag{3.3}$$

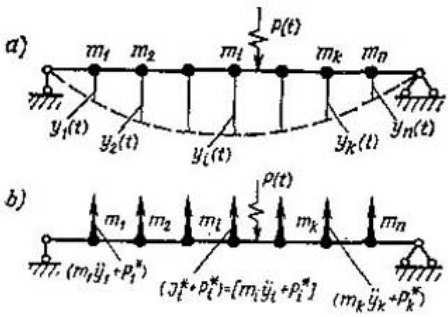


Fig. 50

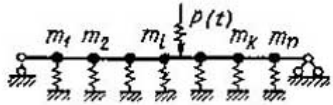


Fig. 51

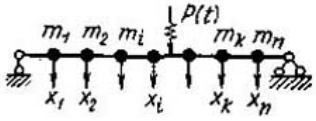


Fig. 52

donde

$$\Delta_k(t) = \Delta_{kp}(t) + \Delta_{k\Delta}(t).$$

Según la ecuación (3.3), para $k = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, se compone el sistema de ecuaciones canónicas con las incógnitas $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Si las características de los enlaces elásticos imaginarios fueran conocidas, entonces las ecuaciones canónicas (3.3) serían algebraicas. Ya que las características de los enlaces son desconocidas y son expresadas según (3.1) por medio de los valores que determinan el movimiento de la masa correspondiente, entonces, introduciendo (3.1) en la ecuación canónica (3.3) y sustituyendo las incógnitas $X_1, X_2, \ldots, X_n$ por sus expresiones según (3.2), obtendremos en forma diferencial la ecuación (3.3)

$$-\delta_{k1}[m_1\ddot{y}_1(t) + P_1^*] - \delta_{k2}[m_2\ddot{y}_2(t) + P_2^*] -$$

$$- \ldots - \delta_{kn}[m_n\ddot{y}_n(t) + P_n^*] - y_k(t) + \Delta_k(t) = 0, \qquad (3.4)$$

donde δ_{ki} es el desplazamiento de la masa k debido a la fuerza unitaria aplicada en dirección al movimiento de la masa i en el sistema dado.

Suponiendo que $k = 1, 2, \ldots, n$, obtendremos el sistema de n ecuaciones canónicas dinámicas para determinar los desplazamientos de las masas $y_1(t), \ldots, y_n(t)$.

Mostremos que la ecuación (3.4) puede obtenerse de otro modo, a saber: como la suma de los desplazamientos de la masa k debidos a la carga dada, a las fuerzas de inercia y a las de resistencia expuestas en la fig. 50, considerando positivos los desplazamientos hacia abajo:

$$y_k(t) = \delta_{k1}[-m_1\ddot{y}_1 - P_1^*] + \delta_{k2}[-m_2\ddot{y}_2(t) - P_2^*] +$$

$$+ \ldots + \delta_{kn}[-m_n\ddot{y}_n(t) - P_n^*] + \Delta_k(t).$$

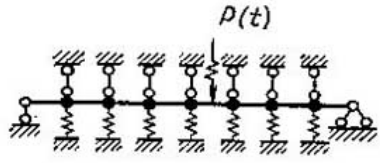


Fig. 53

Sin considerar las resistencias, la k-ésima ecuación canónica (3.4) es así:

$$-\delta_{k1}m_1\ddot{y}_1(t) - \delta_{k2}m_2\ddot{y}_2(t) - \ldots - \ldots - \\ -\delta_{kn}m_n\ddot{y}_n(t) - y_k(t) + \Delta_k(t) = 0. \quad (3.5)$$

Las ecuaciones de oscilaciones libres se obtienen de (3.4) o (3.5), considerando en éstas el desplazamiento $\Delta_k(t) = 0$.

Aplicación del método de desplazamientos. Adoptamos el sistema básico con enlaces rígidos de fuerza complementarios en dirección del movimiento de las masas (fig. 53). Consideramos la dirección positiva de las reacciones de los enlaces de fuerza hacia el lado de los desplazamientos positivos de las masas, es decir, hacia abajo.

La falta de reacción en el k-ésimo enlace de fuerza la escribiremos primeramente así:

$$R_k^*(t) + m_k\ddot{y}_k(t) + P_k^* + R_k(t) = 0, \quad (3.6)$$

donde $R_k^*(t)$ es la reacción debida a los desplazamientos $y_1(t)$, $y_2(t)$, . . ., $y_n(t)$; $R_k(t)$ es la reacción debida a los factores de perturbación.

La ecuación (3.6) en forma abierta es como sigue:

$$r_{k1}Z_1 + r_{k2}Z_2 + \ldots + r_{kn}Z_n + c_kZ_k + R_k(t) = 0. \quad (3.7)$$

Aquí las incógnitas Z_1, . . ., Z_n son iguales, respectivamente, a los desplazamientos buscados de las masas $y_1(t)$, . . ., $y_n(t)$.

A partir de las ecuaciones (3.7) para $k = 1, 2, \ldots, n$ obtendremos n ecuaciones canónicas para determinar los desplazamientos $Z_1, \ldots, Z_n$.

También aquí, siendo conocido el valor de c_k, la ecuación (3.7) será algebraica. Si la característica del enlace c_k es desconocida, entonces, introduciendo (3.1) en (3.7) y sustituyendo Z_i por $y_i(t)$, obtendremos la ecuación diferencial

$$r_{k1}y_1(t) + r_{k2}y_2(t) + \ldots + r_{kn}y_n(t) + \\ + [m_k\ddot{y}_k(t) + P_k^* + R_k(t) = 0. \quad (3.8)$$

Esta es la k-ésima ecuación canónica dinámica de desplazamientos. Suponiendo en éste $k = 1, 2, \ldots, n$, obtendremos n ecuaciones diferenciales para determinar los desplazamientos $y_1(t)$, . . ., $y_n(t)$.

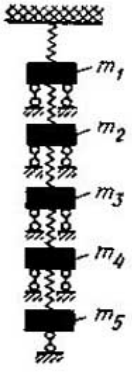


Fig. 54

Sin considerar las fuerzas de resistencia, la ecuación (3.8) tiene la siguiente forma:

$$r_{k1}y_1(t) + r_{k2}y_2(t) + \ldots + r_{kn}y_n(t) + m_k\ddot{y}_k(t) + R_k(t) = 0. \quad (3.9)$$

La ecuación de oscilaciones libres la obtendremos de (3.8) ó (3.9), considerando en ellas $R_k(t) = 0$.

La elección de las ecuaciones (3.3) — (3.5) ó (3.7) — (3.9) para investigar el movimiento del sistema depende de su tipo. Si estas ecuaciones resultan completas, entonces tomando en consideración que la determinación de los desplazamientos (coeficientes de las ecuaciones canónicas del método de fuerzas) corrientemente es más fácil que la determinación de las reacciones (coeficientes de las ecuaciones canónicas del método de desplazamientos), son más cómodas las ecuaciones (3.3) — (3.5). Las ecuaciones (3.7) — (3.9) se utilizan en los casos cuando algunas reacciones secundarias r_{ki} son iguales a cero, como, por ejemplo, en el sistema en la fig. 54.

§ 21. OSCILACIONES LIBRES DE SISTEMAS. Examinemos al principio, para simplificar los razonamientos, las oscilaciones de los sistemas sin considerar las resistencias ($P_k^* = 0$). Las ecuaciones diferenciales de esas oscilaciones según (3.5) son,

$$m_1\delta_{k1}\ddot{y}_1(t) + m_2\delta_{k2}\ddot{y}_2(t) + \ldots + \ldots + m_n\delta_{kn}\ddot{y}_n(t) + y_k(t) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \quad (3.10)$$

Supongamos que la solución de las ecuaciones (3.10) puede representarse en la siguiente forma:

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^{n} y_{ki}(t) = \sum_{i=1}^{n} y_{ki}\Phi_i(t), \quad (3.11)$$

siendo y_{ki} el número incógnito constante y $\Phi_i(t)$, la función incógnita de tiempo.

Veamos una integral particular para cada masa correspondiente al índice i:

$$y_{ki}(t) = y_{ki}\Phi_i(t) \ldots \quad (3.12)$$

Tenemos que

$$\left.\begin{aligned} y_{1i}(t) &= y_{1i}\Phi_i(t); \\ y_{2i}(t) &= y_{2i}\Phi_i(t); \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y_{ni}(t) &= y_{ni}\Phi_i(t). \end{aligned}\right\} \quad (3.13)$$

De las expresiones (3.13) se desprende que las relaciones de los desplazamientos de las masas en cualquier momento de tiempo son constantes, y por esto en adelante consideremos los desplazamientos $y_{1i}, y_{2i}, \ldots, y_{ni}$ como forma principal de oscilaciones propias (véase el § 4) correspondientes al índice i.

Sustituyendo (3.13) en (3.10) obtendremos:

$$(m_1\delta_{k1}y_{1i} + m_2\delta_{k2}y_{2i} + \ldots + m_n\delta_{kn}y_{ni})\,\ddot{\Phi}_i(t) + \\ + y_{ki}\Phi_i(t) = 0.$$

Representaremos esta igualdad en la siguiente forma:

$$\frac{\ddot{\Phi}_i(t)}{\Phi_i(t)} = -\frac{y_{ki}}{m_1\delta_{k1}y_{1i} + m_2\delta_{k2}y_{2i} + \ldots + m_n\delta_{kn}y_{ni}}.$$

El segundo miembro de la igualdad obtenida es una magnitud constante. Designémosla por $\pm\omega_i^2$:

$$\frac{\ddot{\Phi}_i(t)}{\Phi_i(t)} = -\frac{y_{ki}}{m_1\delta_{k1}y_{1i} + m_2\delta_{k2}y_{2i} + \ldots + m_n\delta_{kn}y_{ni}} = \pm\omega_i^2. \quad (3.14)$$

De aquí se obtienen dos ecuaciones:

$$1)\ \ddot{\Phi}_i(t) \mp \omega_i^2\Phi_i(t) = 0; \quad (3.15)$$

$$2)\ \mp m_1\delta_{k1}\omega_i^2y_{1i} \mp m_2\delta_{k2}\omega_i^2y_{2i} \mp \ldots \mp m_n\delta_{kn}\omega_i^2y_{ni} - y_{ki} = 0. \quad (3.16)$$

Como las oscilaciones propias siempre son de dos signos, los signos superiores en (3.14)—(3.16) no sirven. La solución de la ecuación (3.15) para el signo inferior será:

$$\Phi_i(t) = A_i \operatorname{sen} \omega_i t + B_i \cos \omega_i t. \quad (3.17)$$

Las oscilaciones suceden según la ley armónica, lo que no contradice a la admisión hecha anteriormente sobre la forma principal.

De (3.17) se ve que la magnitud ω_i introducida anteriormente es la i-ésima frecuencia de oscilaciones *propias*, e $y_{1i}, \ldots, y_{ni}$ son, según (3.12), los desplazamientos de las masas $m_1, \ldots, m_n$, los cuales determinan la forma *principal* que le corresponden.

Por consiguiente, la ecuación (3.16) es la ecuación canónica con desplazamientos incógnitos y_{ki} de cada masa m_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ escrita según el método de fuerzas. Esta, a diferencia de la ecuación (3.10), se hizo algebraica ya que en este caso es conocida la ley de movimiento de las masas en el tiempo (3.17).

Basándose en la ecuación (3.16) para $k = 1, 2, \ldots, n$ se obtienen n ecuaciones canónicas para determinar las incógnitas y_{ki} en

la siguiente forma:

$$\left.\begin{aligned}
&(m_1\delta_{11}\omega_i^2 - 1)\, y_{1i} + m_2\delta_{12}\omega_i^2 y_{2i} + \ldots + m_n\delta_{1n}\omega_i^2 y_{ni} = 0;\\
&m_1\delta_{21}\omega_i^2 y_{1i} + (m_2\delta_{22}\omega_i^2 - 1)\, y_{2i} + \ldots + m_n\delta_{2n}\omega_i^2 y_{ni} = 0;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&m_1\delta_{n1}\omega_i^2 y_{1i} + m_2\delta_{n2}\omega_i^2 y_{2i} + \ldots + (m_n\delta_{nn}\omega_i^2 - 1)\, y_{ni} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.18)$$

Por lo tanto, cualquier oscilación libre del sistema en caso general según (3.11) es de n tonos, que consta de n oscilaciones propias.

Dividiendo (3.18) entre ω_i^2 y designando $\lambda_i = 1 : \omega_i^2$, obtendremos:

$$\begin{aligned}
&(m_1\delta_{11} - \lambda_i)\, y_{1i} + m_2\delta_{12} y_{2i} + \ldots + m_n\delta_{1n} y_{ni} = 0;\\
&m_1\delta_{21} y_{1i} + (m_2\delta_{22} - \lambda_i)\, y_{2i} + \ldots + m_n\delta_{2n} y_{ni} = 0;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&m_1\delta_{ni} y_{1i} + m_2\delta_{n2} y_{2i} + \ldots + (m_n\delta_{nn} - \lambda_i)\, y_{ni} = 0.
\end{aligned} \qquad (3.19)$$

Las mismas ecuaciones en la forma matricial:

$$\mathbf{AY}_i = \mathbf{DMY}_i = \lambda_i \mathbf{Y}_i, \qquad (3.20)$$

donde

$$\mathbf{A} = \mathbf{DM}; \qquad (3.21)$$

$$\mathbf{D} = \begin{Vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \ldots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \ldots & \delta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \ldots & \delta_{nn} \end{Vmatrix}$$ es la matriz de los desplazamientos unitarios; (3.22)

$$\mathbf{M} = \begin{Vmatrix} m_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & m_n \end{Vmatrix}$$ es la matriz diagonal de las masas; (3.23)

$\mathbf{Y}_i = |\{y_{1i}\ y_{2i}\ \ldots\ y_{ni}\}|$ es la matriz columna (vector) de los desplazamientos buscados. (3.24)

Si las masas son iguales, cuando $m_1 = m_2 = \ldots = m_n$, la matriz **A** será simétrica.

Cualquier vector de los desplazamientos $\mathbf{Y}_i$ (éstos como veremos más adelante, serán n) que satisface a la ecuación (3.20) se llama *vector propio* de la matriz **A**, y el valor de λ_i que le corresponde es su *número propio* (característico).

La ecuación (3.20) puede escribirse además así:

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})\, \mathbf{Y}_i = 0, \qquad (3.25)$$

donde **E** es la matriz unitaria.

Esta ecuación es homogénea puesto que no tiene término independiente. Es evidente que el valor nulo para el vector $\mathbf{Y}_i$ que satisface a la ecuación (3.25), llamado usualmente *solución trivial*, no corresponde al problema planteado, ya que con él no habrá movimiento. Los valores que difieren de cero para los vectores $\mathbf{Y}_i$ son posibles en el caso, cuando el determinante del coeficiente ante el vector de los desplazamientos será igual a cero, es decir,

$$|\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}| = 0. \tag{3.26}$$

Tal ecuación se denomina *ecuación característica* de la matriz **A**. Esta ecuación en forma desarrollada sera:

$$D = \begin{vmatrix} (m_1\delta_{11} - \lambda_i) & m_2\lambda_{12} & \dots & m_n\delta_{1n} \\ m_1\delta_{21} & (m_2\delta_{22} - \lambda_i) & \dots & m_n\delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1\delta_{n1} & m_2\delta_{n2} & \dots & (m_n\delta_{nn} - \lambda_i) \end{vmatrix} = 0. \tag{3.27}$$

Abriendo el determinante, se obtendrá la ecuación del n-ésimo grado con respecto a λ_i, y durante su solución obtendremos n valores de λ_i. A cada valor de λ_i le corresponderá su vector $\mathbf{Y}_i$, y su conjunto forma una matriz de los vectores que satisfacen a la ecuación (3.26):

$$\mathbf{Y} = \|\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_2 \dots \mathbf{Y}_n\| = \begin{Vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{1n} & y_{2n} & \dots & y_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{3.28}$$

El producto escalar del vector $\mathbf{Y}_i$ por sí mismo determina el cuadrado de su longitud convencional:

$$\mathbf{Y}_i' \cdot \mathbf{Y}_i = \|y_{1i}y_{2i} \dots y_{ni}\| \cdot |\{y_{1i}y_{2i} \dots y_{ni}\}| = \\ = y_{1i}^2 + y_{2i}^2 + \dots + y_{ni}^2 = l_i^2. \tag{3.29}$$

Vamos a crear, a la par con el vector $\mathbf{Y}_i$, el vector «corregido» $\mathbf{Y}_i^*$:

$$\mathbf{Y}_i^* = |\{y_{1i}\sqrt{m_1}\, y_{2i}\sqrt{m_2} \dots y_{ni}\sqrt{m_n}\}|. \tag{3.30}$$

La matriz de tales vectores será:

$$\mathbf{Y}^* = \|\mathbf{Y}_1^*\mathbf{Y}_2^* \dots \mathbf{Y}_n^*\| = \begin{Vmatrix} y_{11}\sqrt{m_1} & y_{12}\sqrt{m_1} & \dots & y_{1n}\sqrt{m_1} \\ y_{21}\sqrt{m_2} & y_{22}\sqrt{m_2} & \dots & y_{2n}\sqrt{m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}\sqrt{m_n} & y_{n2}\sqrt{m_n} & \dots & y_{nn}\sqrt{m_n} \end{Vmatrix}. \tag{3.31}$$

Por analogía con (3.29) tenemos

$$\mathbf{Y}_i^{*\prime} \cdot \mathbf{Y}_i^* = m_1y_{1i}^2 + m_2y_{2i}^2 + \dots + m_ny_{ni}^2 = l_i^{*2}. \tag{3.32}$$

Los vectores, en los cuales la longitud convencional es igual a la unidad, llamados normalizados, se obtendrán según las fórmulas:

$$\overline{\mathbf{Y}}_i = \mathbf{Y}_i : l_i; \tag{3.33}$$

$$\overline{\mathbf{Y}}_i^* = \mathbf{Y}_i^* : l_i^*. \tag{3.34}$$

Los vectores $\mathbf{Y}_i^*$, $\mathbf{Y}_i$ y los propios valores de λ_i poseen las siguientes propiedades.

1. Los vectores $\mathbf{Y}_i^*$ son ortogonales entre sí, es decir, sus productos escalares son iguales a cero (véase el § 22):

$$Y_i^{*\prime} \cdot Y_m^* = \| y_{1i} \sqrt{m_1}\, y_{2i} \sqrt{m_2} \ldots y_{ni} \sqrt{m_n} \| \times$$
$$\times |\{y_{1m} \sqrt{m_1}\, y_{2m} \sqrt{m_2} \ldots y_{nm} \sqrt{m_n}\}| =$$

$$= y_{1i} y_{1m} m_1 + y_{2i} y_{2m} m_2 + \ldots + y_{ni} y_{nm} m_n = \sum_{k=1}^{n} m_k y_{ki} y_{km} = 0. \tag{3.35}$$

Podemos escribir la misma propiedad de ortogonalidad (3.35) en forma de matriz directamente por medio de los vectores de desplazamientos $\mathbf{Y}_i$ sin recurrir a los vectores «corregidos» en la siguiente forma:

$$Y_i' \cdot M \cdot Y_m = 0. \tag{3.35'}$$

2. Si la matriz $\mathbf{A}$ es simétrica, entonces los vectores $\mathbf{Y}_i$ también son ortogonales entre sí:

$$\mathbf{Y}_i' \cdot \mathbf{Y}_m = y_{1i} y_{1m} + y_{2i} y_{2m} + \ldots + y_{ni} y_{nm} = \sum_{k=1}^{n} y_{ki} y_{km} = 0. \tag{3.36}$$

3. La suma de λ_i es igual a la traza de la matriz $\mathbf{A}$, es decir, a la suma de sus términos por la diagonal principal:

$$\Sigma \lambda_i = S_p \mathbf{A}. \tag{3.37}$$

4. El producto de λ_i es igual al determinante de la matriz $\mathbf{A}$:

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n = |\mathbf{A}|. \tag{3.38}$$

5. El producto de la matriz transpuesta $\overline{\mathbf{Y}}^{*\prime}$ por la matriz $\overline{\mathbf{Y}}^*$ o de la matriz transpuesta $\mathbf{Y}'$ por la matriz $\overline{\mathbf{Y}}$, cuando se cumple la condición (3.36), es igual a la matriz unitaria:

$$\overline{\mathbf{Y}}^{*\prime} \cdot \overline{\mathbf{Y}}^* = \overline{\mathbf{Y}}' \cdot \overline{\mathbf{Y}} = \mathbf{E}. \tag{3.39}$$

Puesto que $\lambda_i = 1 : \omega_i^2$, entonces después de la solución de la ecuación (3.27) se obtienen fácilmente n frecuencias de oscilaciones propias. En virtud de esto, la ecuación (3.27) se llama ecuación de frecuencias o ecuación secular.

El conjunto de todas las frecuencias de oscilaciones propias del sistema, ordinariamente situadas según el crecimiento de sus valores numéricos, se denomina *espectro de frecuencias*. La primera frecuencia más inferior se llama *fundamental*.

Ahora la ecuación de oscilaciones de la masa k según (3.11) y (3.17) será:

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^{n} y_{ki}(A_i \operatorname{sen} \omega_i t + B_i \cos \omega_i t). \tag{3.40}$$

Es decir, el movimiento de cualquier masa k consta de la suma de las oscilaciones con n diferentes frecuencias.

Huelga señalar que sólo los determinantes de segundo o tercer orden conducen a tales ecuaciones de frecuencias, cuya solución sin técnica especial de cómputo no provoca grandes dificultades. En los demás casos, la determinación de las frecuencias de oscilaciones propias representa, hablando en general, un problema complicado. Para tales casos existen diferentes métodos especiales de determinación del espectro de las frecuencias de oscilaciones libres, cuyo examen está fuera del curso [1]. Además, al existir la técnica electrónica de cómputo, se han hecho no tan actuales.

Es imposible determinar los valores de y_{ki} directamente de las ecuaciones (3.18), incluso con frecuencias conocidas; ellos pueden hallarse sólo con una precisión de hasta cualquier multiplicador constante, es decir, en realidad pueden hallarse las relaciones entre $y_{1i}, \ldots, y_{ni}$ y uno de ellos.

Para determinar estas relaciones, transformaremos el sistema de ecuaciones (3.18) dividiendo cada una de las ecuaciones, por ejemplo, por y_{1i}, y lo reduciremos a la siguiente forma:

$$\left.\begin{aligned}
&(m_1\delta_{11}\omega_i^2 - 1) + m_2\delta_{12}\omega_i^2 \frac{y_{2i}}{y_{1i}} + \ldots + m_n\delta_{1n}\omega_i^2 \frac{y_{ni}}{y_{1i}} = 0;\\
&m_1\delta_{21}\omega_i^2 + (m_2\delta_{22}\omega_i^2 - 1) \frac{y_{2i}}{y_{1i}} + \ldots + m_n\delta_{2n}\omega_i^2 \frac{y_{ni}}{y_{1i}} = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&m_1\delta_{n1}\omega_i^2 + m_2\delta_{n2}\omega_i^2 \frac{y_{2i}}{y_{1i}} + \ldots + (m_n\delta_{nn}\omega_i^2 - 1) \frac{y_{ni}}{y_{1i}} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{3.41}$$

Precisamente a partir de estas ecuaciones pueden hallarse las relaciones del tipo y_{ki}/y_{1i}, las cuales serán en una unidad menos que el número de grados de libertad del sistema, es decir, $n - 1$, y las ecuaciones serán en una unidad más que el número de las incógnitas. Por consiguiente, una ecuación (cualquiera) de (3.41) será la combinación lineal de las demás. Ella será superflua y debe ser rechazada. Designemos luego $\frac{y_{ki}(t)}{y_{1i}(t)} = \frac{y_{ki}}{y_{1i}} = \rho_{ki}$, siendo en este caso todas las $\rho_{1i} = 1$.

Se puede hacer, por analogía, también con las ecuaciones (3.19). Respectivamente, el vector $\mathbf{Y}_i = |\{1, \rho_{2i}, \ldots, \rho_{ni}\}|$ es el vector de los desplazamientos $\mathbf{Y}_i$ que tiene $\rho_{1i} = 1$. La matriz de los vectores $\mathbf{Y}_i$

$$\mathbf{Y} = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \ldots & \rho_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \ldots & \rho_{nn} \end{array} \right\|. \tag{3.42}$$

Esta matriz, dividiendo cada vector $\mathbf{Y}_i$ por ρ_{ii}, puede reducirse también a la siguiente expresión:

$$\mathbf{Y} = \begin{Vmatrix} 1 & \frac{1}{\rho_{22}} & \dots & \frac{1}{\rho_{nn}} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \frac{\rho_{2n}}{\rho_{nn}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n1} & \frac{\rho_{n2}}{\rho_{22}} & \dots & 1 \end{Vmatrix}. \tag{3.43}$$

Ahora podemos escribir la ecuación (3.40) así:

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^{n} \rho_{ki} y_{1i} (A_i \operatorname{sen} \omega_i t + B_i \cos \omega_i r).$$

O bien, sustituyendo $y_{1i}A_i$ por C_i e $y_{1i}B_i$ por D_i obtendremos definitivamente

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^{n} \rho_{ki} (C_i \operatorname{sen} \omega_i t + D_i \cos \omega_i t). \tag{3.44}$$

En esta expresión se tienen $2n$ constantes arbitrarias del tipo de C_i y D_i, lo que corresponde a n ecuaciones diferenciales iniciales de segundo orden, siendo por eso (3.44) su integral total. Suponiendo luego que $C_i = E_i \cos \varphi_i$ y $D_i = E_i \operatorname{sen} \varphi_i$, reducimos la expresión (3.44) a la siguiente forma:

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^{n} \rho_{ki} E_i \operatorname{sen} (\omega_i t + \varphi_i). \tag{3.45}$$

Todas las $2n$ constantes arbitrarias del tipo de E_i y φ_i pueden expresarse por medio de las condiciones iniciales del movimiento de cada masa para $t = 0$, las cuales son el desplazamiento de la masa $y_k(0)$ y su velocidad $\dot{y}_k(0)$, y el problema sobre las oscilaciones libres estará resuelto.

Las ecuaciones (3.18) pueden representarse también en otra forma, expresadas por medio de las fuerzas de inercia de cada masa para sus oscilaciones con la frecuencia ω_i. Con este fin hallaremos la fuerza de inercia $J^*_{ki}(t)$ de cualquier masa k para su oscilación con esta frecuencia utilizando (3.13):

$$J^*_{ki}(t) = -m_k \ddot{y}_{ki}(t) = -m_k y_{ki} \ddot{\Phi}_i(t).$$

Tomando en consideración (3.15) tenemos

$$J^*_{ki}(t) = m_k \omega_i^2 y_{ki} \Phi_i(t) = J^*_{ki} \Phi_i(t), \tag{3.46}$$

siendo $J^*_{ki} = m_k \omega_i^2 y_{ki}$ el número constante.

Ahora las ecuaciones (3.18), sacando en ellas de los paréntesis $m_k\omega_i^2$, pueden escribirse así:

$$\left.\begin{aligned}
&\delta_{11}^* J_{1i}^* + \delta_{12} J_{2i}^* + \ldots + \delta_{1n} J_{ni}^* = 0;\\
&\delta_{21} J_{1i}^* + \delta_{22}^* J_{2i}^* + \ldots + \delta_{2n} J_{ni}^* = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\delta_{ni} J_{1i}^* + \delta_{n2} J_{2i}^* + \ldots + \delta_{nn}^* J_{ni}^* = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (3.47)$$

donde

$$\delta_{kk}^* = \delta_{kk} - \frac{1}{m_k\omega_i^2} = \delta_{kk} - \frac{\lambda_i}{m_k}; \quad \lambda_i = \frac{1}{\omega_i^2}. \qquad (3.48)$$

Las ecuaciones (3.47) en la forma matricial serán:

$$\mathbf{D}^*\mathbf{J}_i^* = 0; \qquad (3.49)$$

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} \delta_{11}^* & \delta_{12} & \ldots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22}^* & \ldots & \delta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \ldots & \delta_{nn} \end{bmatrix}; \qquad (3.50)$$

$$\vec{\mathbf{J}}_i^* = \omega_i^2 \mathbf{M}\vec{\mathbf{Y}}_i. \qquad (3.51)$$

La ecuación matricial (3.49) es homogénea, por eso para obtener las fuerzas de inercia que difieren del cero, es necesario igualar su determinante a cero:

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} \left(\delta_{11} - \frac{\lambda_i}{m_1}\right) & \delta_{12} & \ldots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \left(\delta_{22} - \frac{\lambda_i}{m_2}\right) & \ldots & \delta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \ldots & \left(\delta_{nn} - \frac{\lambda_i}{m_n}\right) \end{bmatrix} = 0. \qquad (3.52)$$

De lo expuesto se desprende el orden general de determinación de oscilaciones libres:

1) a partir de las ecuaciones de frecuencias (3.27) ó (3.52) se determinan las frecuencias ω_i;

2) respectivamente a cada frecuencia ω_i, a partir de las ecuaciones (3.41) se hallan las relaciones $y_{ki}/y_{1i} = \rho_{ki}$;

3) para cada masa, a base de (3.44) ó (3.45), se componen las condiciones iniciales del movimiento, a partir de las cuales se determinan las constantes C_i y D_i o E_i y φ_i.

Tomando en consideración, *aproximadamente*, como anteriormente, que la resistencia al movimiento de la masa k es proporcional a su velocidad de movimiento, la k-ésima ecuación canónica de os-

cilaciones libres según (3.4) será

$$m_1\delta_{k1}\left[\ddot{y}_1(t)+\frac{\beta_1}{m_1}\dot{y}_1(t)\right]+m_2\delta_{k2}\left[\ddot{y}_2(t)+\frac{\beta_2}{m_2}\dot{y}_2(t)\right]+$$
$$+\ldots+m_n\delta_{kn}\left[\ddot{y}_n(t)+\frac{\beta_n}{m_n}\dot{y}_n(t)\right]+y_k(t)=0 \qquad (3.53)$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$.

También en este caso buscaremos sus soluciones en la misma forma que las de las ecuaciones (3.10):

$$y_k(t)=\sum_{i=1}^{n} y_{ki}(t)=\sum_{i=1}^{n} y_{ki}F_i(t), \qquad (3.54)$$

donde y_{ki} tienen los mismos valores que en (3.11), es decir, determinan la forma principal.

Veamos, igual que antes, para cada masa una integral particular que corresponde al índice i:

$$\left.\begin{aligned} y_{1i}(t)&=y_{1i}F_i(t);\\ y_{2i}(t)&=y_{2i}F_i(t);\\ &\cdots\cdots\cdots\\ y_{ni}(t)&=y_{ni}F_i(t). \end{aligned}\right\} \qquad (3.55)$$

Sustituyendo (3.55) en (3.53) obtendremos:

$$m_1\delta_{k1}\left[\ddot{F}_i(t)+\frac{\beta_1}{m_1}\dot{F}_i(t)\right]y_{1i}+m_2\delta_{k2}\left[\ddot{F}_i(t)+\frac{\beta_2}{m_2}\dot{F}_i(y)\right]y_{2i}+$$
$$+\ldots+m_n\delta_{kn}\left[\ddot{F}_i(t)+\frac{\beta_n}{m_n}\dot{F}_i(t)\right]y_{ni}+y_{ki}F_i(t)=0. \qquad (3.56)$$

Si se supone *complementariamente*, para simplificar, que $\beta_i/m_i = c = \text{const}$, entonces se puede representar (3.56) así:

$$[\ddot{F}_i(t)+c\dot{F}_i(t)]\,[m_1\delta_{k1}y_{1i}+m_2\delta_{k2}y_{2i}+\ldots+m_n\delta_{kn}y_{ni}]+$$
$$+y_{ki}F_i(t)=0. \qquad (3.57)$$

De esta expresión obtenemos

$$\frac{\ddot{F}_i(t)+c\dot{F}_i(t)}{F_i(t)}=-\frac{y_{ki}}{m_1\delta_{k1}y_{1i}+m_2\delta_{k2}y_{2i}+\ldots+m_n\delta_{kn}y_{ni}},$$

donde el segundo miembro es igual a $-\omega_i^2$ [véase (3.14)]. Por eso tendremos dos ecuaciones:

$$1)\quad \ddot{F}_i(t)+2\alpha\dot{F}_i(t)+\omega_i^2F_i(t)=0, \qquad (3.58)$$

siendo $2\alpha = c$;

$$2)\quad m_1\delta_{k1}\omega_i^2y_{1i}+m_2\delta_{k2}\omega_i^2y_{2i}+\ldots+m_n\delta_{kn}\omega_i^2y_{ni}-y_{ki}=0. \qquad (3.59)$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$.

De nuevo nemos obtenido la k-ésima ecuación canónica (3.59) en la forma algebraica. Esta coincide con (3.16), por eso todos los razonamientos expuestos a base de (3.16) son aplicables también para (3.59). La solución de la ecuación (3.58) tendrá la misma expresión que (2.29):

$$F_i(t) = e^{-\alpha t}(A_i \operatorname{sen} \omega_i^* t + B_i \cos \omega_i^* t), \tag{3.60}$$

donde

$$\omega_i^* = \sqrt{\omega_i^2 - \alpha^2}. \tag{3.61}$$

La ecuación de oscilaciones de cualquier masa k, consideradas las resistencias, tendrá el siguiente aspecto:

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^{n} \rho_{ki} e^{-\alpha t}(C_i \operatorname{sen} \omega_i^* t + D_i \cos \omega_i^* t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \rho_{ki} e^{-\alpha t} E_i \operatorname{sen}(\omega_i^* t + \varphi_i). \tag{3.62}$$

La ecuación diferencial de oscilaciones libres sin considerar las resistencias a partir de (3.9) será:

$$r_{k1} y_1(t) + r_{k2} y_2(t) + \ldots + r_{kn} y_n(t) + m_k \ddot{y}_k(t) = 0. \tag{3.63}$$

Apliquemos, como anteriormente, las expresiones (3.11), (3.13):

$$(r_{k1} y_{1i} + r_{k2} y_{2i} + \ldots + r_{kn} y_{ni})\, \Phi_i(t) + m_k y_{ki} \ddot{\Phi}_i(t) = 0.$$

De esta igualdad se desprende que

$$\frac{\ddot{\Phi}_i(t)}{\Phi_i(t)} = -\frac{r_{k1} y_{1i} + r_{k2} y_{2i} + \ldots + r_{kn} y_{ni}}{m_k y_{ki}}. \tag{3.64}$$

Aquí el segundo miembro es constante. Denominemos a este miembro constante con $-\omega_i^2$. Entonces, introduciéndolo en (3.64) obtendremos dos ecuaciones:

$$1)\ \ddot{\Phi}_i(t) + \omega_i^2 \Phi_i(t) = 0; \tag{3.65}$$

$$2)\ r_{k1} y_{1i} + r_{k2} y_{2i} + \ldots + r_{kn} y_{ni} - m_k \omega_i^2 y_{ki} = 0. \tag{3.66}$$

En lo que se refiere a la ecuación (3.65), todo está dicho anteriormente [véase (3.15)]. La ecuación (3.66) es la k-ésima ecuación canónica de los desplazamientos y_{ki} de cualquier masa k escrita según el método de desplazamientos, la cual, siendo conocida la ecuación de movimiento (3.65), se convierte en algebraica con las incógnitas y_{ki} para $k = 1, 2, \ldots, n$.

A partir de (3.66) se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} r\,(r_{11}-m_1\omega_i^2)\,y_{1i}+r_{12}y_{2i}+\ldots+r_{1n}y_{ni}=0;\\ r_{21}y_{1i}+(r_{22}-m_2\omega_i^2)\,y_{2i}+\ldots+r_{2n}y_{ni}=0;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ r_{n1}y_{1i}+r_{n2}y_{2i}+\ldots+(r_{nn}-m_n\omega_i^2)\,y_{ni}=0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.67)$$

Las ecuaciones (3.67) son homogéneas, por eso

$$D=\begin{vmatrix} (r_{11}-m_1\omega_i^2) & r_{12} & r_{1n}\\ r_{21} & (r_{22}-m_2\omega_i^2) & r_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ r_{n1} & r_{n2} & (r_{nn}-m_n\omega_i^2) \end{vmatrix}=0. \qquad (3.68)$$

Desarrollando el determinante y resolviendo la ecuación de frecuencias obtendremos n frecuencias de oscilaciones propias ω_i.

Las ecuaciones para determinar las relaciones $y_{ki}/y_{1i}=\rho_{ki}$ según (3.67) son las siguientes:

$$\left.\begin{aligned} (r_{11}-m_1\omega_i^2)+r_{12}\rho_{2i}+\ldots+r_{1n}\rho_{ni}=0;\\ r_{21}+(r_{22}-m_2\omega_i^2)\,\rho_{2i}+\ldots+r_{2n}\rho_{ni}=0;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ r_{n1}+r_{n2}\rho_{2i}+\ldots+(r_{nn}-m_n\omega_i^2)\,\rho_{ni}=0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.69)$$

Las oscilaciones de la masa k son determinadas por las expresiones (3.44) y (3.45). Las ecuaciones (3.67) y (3.68) en la forma matricial son:

$$(\mathbf{R}-\omega_i^2\mathbf{M})\,\mathbf{Y}_i=0; \qquad (3.70)$$

$$D=|\mathbf{R}-\omega_i^2\mathbf{M}|=0, \qquad (3.71)$$

donde,

$$\mathbf{R}=\begin{Vmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1n}\\ r_{21} & r_{22} & \ldots & r_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ r_{n1} & r_{n2} & \ldots & r_{nn} \end{Vmatrix} \quad \text{es la matriz de las reacciones.} \qquad (3.72)$$

Si se considera la resistencia al movimiento de la masa k proporcional a su velocidad, entonces la k-ésima ecuación canónica de oscilaciones libres (propias) la obtendremos según (3.8):

$$r_{k1}y\,(t)+r_{k2}y_2\,(t)+\ldots+r_{kn}y_n\,(t)+[m_k\ddot{y}_k\,(t)+\beta_k\dot{y}_k\,(t)]=0 \qquad (3.73)$$

Apliquemos para la solución las expresiones (3.54) y (3.55):

$$(r_{k1}y_{1i}+r_{k2}y_{2i}+\ldots+r_{kn}y_{ni})\,F_i\,(t)+$$
$$+m_k\left[\ddot{F}_i\,(t)+\frac{\beta_k}{m_k}\dot{F}_i\,(t)\right]y_{ki}=0.$$

Representemos, como antes, esta igualdad así:

$$\frac{\ddot{F}_i(t)+\frac{\beta_k}{m_k}\dot{F}_i(t)}{F_i(t)}=-\frac{r_{k1}y_{1i}+r_{k2}y_{2i}+\ldots+r_{kn}y_{ni}}{m_k y_{ki}}. \qquad (3.74)$$

El segundo miembro según (3.64) es igual a $-\omega_i$. Para el cumplimiento de la igualdad (3.74), la relación β_k/m_k no debe depender del índice k, es decir, $\beta_k/m_k = c = \text{const}$. En estas condiciones, igualando (3.74) al valor $-\omega_i^2$, tendremos dos ecuaciones:

1) $\ddot{F}_i(t) + 2\alpha\dot{F}_i(t) + \omega_i^2 F_i(t) = 0$

coincide con (3.58);

2) $r_{k1}y_{1i} + r_{k2}y_{2i} + \ldots + r_{kn}y_{ni} - m_k\omega_i^2 y_{ki} = 0$

coincide con (3.66). Por consiguiente, de nuevo llegamos a los resultados (3.60) y (3.62).

Vale señalar que todas las expresiones anteriormente expuestas pueden adaptarse también para los casos cuando por $y_{1i}, y_{2i}, \ldots$ $\ldots, y_{ni}$ se toman los desplazamientos generalizados.

§ 22. FORMAS PRINCIPALES DE OSCILACIONES PROPIAS. La posición de las masas durante el movimiento libre del sistema determina su forma en cualquier momento de tiempo. Puesto que el movimiento libre de las masas en un sistema con n grados de libertad es compuesto, que consta de n oscilaciones con n diferentes frecuencias ω_i, la forma del movimiento del sistema en caso general será variable: las relaciones de los desplazamientos de las masas aisladas varían constantemente.

Sin embargo, siempre se puede fijar tales condiciones iniciales del movimiento del sistema, en que las oscilaciones de todas las masas sucedan con una frecuencia cualquiera ω_i del espectro de frecuencias. Tales oscilaciones, y las formas que les corresponden, se denominan *principales* o *normales*. Es evidente que el número de formas principales de las oscilaciones es igual al número de grados de libertad del sistema. En las formas principales de las oscilaciones, las relaciones de los desplazamientos de cualesquiera masas siempre son constantes y no dependen del tiempo. Por consiguiente, las formas principales son determinadas por los desplazamientos $y_{1i}(t) \ldots y_{ni}(t)$ o por sus relaciones en cualquier momento de tiempo.

La forma principal de las oscilaciones con la frecuencia ω_i puede determinarse por medio de los desplazamientos de las masas debidos a las fuerzas de inercia que actúan sobre el sistema (fig. 55, *a*). Dividiéndolas por la fuerza de inercia de cualquier masa, por ejemplo, la primera, obtendremos el esquema de las fuerzas que determinan la forma principal, en la cual las fuerzas dependen no de los pro-

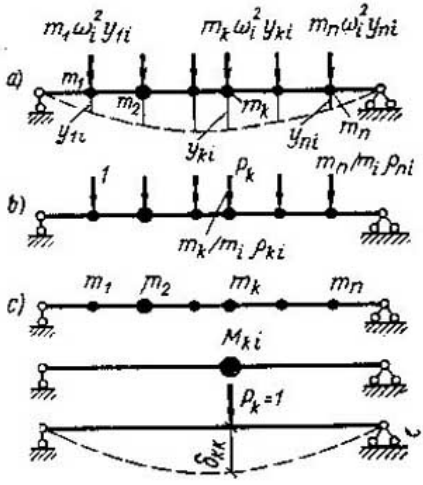


Fig. 55

pios desplazamientos, sino de sus relaciones $\rho_{ki} = y_{ki} : y_{1i}$ (fig. 55, *b*). Huelga señalar que, siendo iguales las masas, la relación de las fuerzas que determinan la forma principal es igual a la relación de los desplazamientos bajo estas fuerzas. Así, por ejemplo, la fuerza P_k (fig. 55, *b*) es igual a $y_{ki} : y_{1i}$.

Mostremos ahora que el desplazamiento de cualquier masa en la forma principal o de todas las masas juntas puede determinarse como el desplazamiento de cierto sistema imaginario con un grado de libertad. Con este propósito multipliquemos la ecuación (3.58) por y_{ki} y, tomando en consideración (3.55) y (3.59), podemos escribir la ecuación diferencial de oscilaciones de la masa m_k en la forma principal con frecuencia ω_i:

$$\ddot{y}_{ki}(t) + 2\alpha\dot{y}_{ki}(t) + \omega_i^2 y_{ki}(t) = 0, \tag{3.75}$$

donde

$$\omega_i^2 = \frac{y_{ki}}{m_1\delta_{k1}y_{1i} + m_2\delta_{k2}y_{2i} + \ldots + m_n\delta_{kn}y_{ni}}. \tag{3.76}$$

De (3.76) se determina fácilmente la frecuencia si está dada la forma principal de las oscilaciones. Esta expresión puede también representarse así:

$$\omega_i^2 = \frac{1}{M_{ki}\delta_{kk}}, \tag{3.77}$$

donde

$$M_{ki} = m_1\frac{\delta_{k1}}{\delta_{kk}}\cdot\frac{y_{1i}}{y_{ki}} + m_2\frac{\delta_{k2}}{\delta_{kk}}\cdot\frac{y_{2i}}{y_{ki}} + \ldots + m_k + \\ + \ldots + m_n\frac{\delta_{kn}}{\delta_{kk}}\cdot\frac{y_{ni}}{y_{ki}}. \tag{3.78}$$

La masa M_{ki} es la masa reducida correspondiente a la frecuencia ω_i, la cual se debe situar en el lugar de la masa m_k, quitando las demás de la viga para obtener el sistema con un grado de libertad (fig. 55, *c*).

§ 23. ORTOGONALIDAD DE LAS FORMAS PRINCIPALES DE OSCILACIONES. La ortogonalidad de las formas principales consiste en que el trabajo de las fuerzas exteriores (interiores) de una forma principal en los desplazamientos (deformaciones) de la

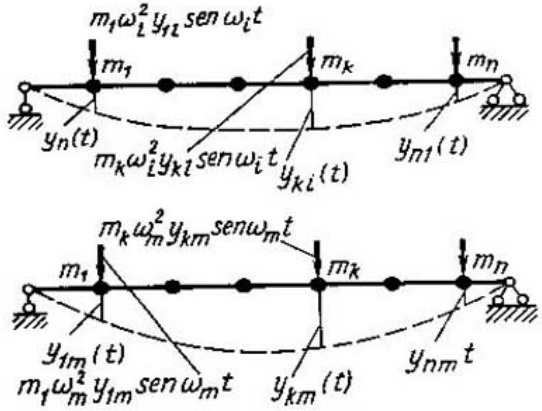


Fig. 56

otra es igual a cero. Vamos a demostrarlo, examinando con este fin dos formas principales de las oscilaciones del sistema con las frecuencias ω_i y ω_m (fig. 56). Durante las oscilaciones libres, los sistemas tendrán en calidad de las fuerzas exteriores las fuerzas de inercia de las masas mostradas en la fig. 56.

Compongamos la ecuación de reciprocidad de los trabajos de las fuerzas exteriores:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k\omega_i^2 y_{ki}\,\mathrm{sen}\,\omega_i t y_{km}\,\mathrm{sen}\,\omega_m t = \sum_{k=1}^{n} m_k\omega_m^2 y_{km}\,\mathrm{sen}\,\omega_m t y_{ki}\,\mathrm{sen}\,\omega_i t \tag{3.79}$$

o bien

$$(\omega_i^2 - \omega_m^2)\sum_{k=1}^{n} m_k y_{ki} y_{km} = 0. \tag{3.80}$$

Como $\omega_i \neq \omega_m$, entonces la igualdad es posible sólo cuando cada miembro de (3.79) es igual a cero por separado, es decir, cuando

$$\sum_{k=1}^{n} m_k y_{ki} y_{km} = 0. \tag{3.81}$$

La última igualdad expresa la propiedad de ortogonalidad de las formas principales de las oscilaciones.

La propiedad de ortogonalidad de las formas principales de las oscilaciones expresada mediante las fuerzas interiores, para los sistemas planos es,

$$\sum \int N_i N_m \frac{ds}{EF} + \sum \int M_i M_m \frac{ds}{EJ} + \sum \int \mu Q_i Q_m \frac{ds}{GF} = 0. \tag{3.82}$$

§ 24. DESCOMPOSICIÓN DE LA CARGA Y DE LOS DESPLAZAMIENTOS RESPECTO A LAS FORMAS PRINCIPALES DE OSCILACIONES. **Descomposición de la carga.** Supongamos que la fuerza $P_k(t)$, que actúa sobre cualquier masa m_k, para cualquier valor incluido el cero, descompuesta respecto a las formas principales de las oscilaciones del sistema en forma de componentes $P_{ki}(t)$ (fig. 57, *a*):

$$P_k(t) = \sum_{i=1}^{n} P_{ki}(t) = \sum_{i=1}^{n} m_k y_{ki} H_i(t), \tag{3.83}$$

donde

$$P_{ki}(t) = m_k y_{ki} H_i(t);$$

k es el número de la masa del sistema; i, el número de la frecuencia de las oscilaciones libres.

Compongamos el trabajo de las fuerzas dadas $P_k(t)$ (fig. 57, *a*) y sus descomposiciones según (3.83) en los desplazamientos y_{ki} de la i-ésima forma principal:

$$\sum_{k=1}^{n} P_k(t)\, y_{ki} = \sum_{k=1}^{n} y_{ki} \sum_{i=1}^{n} m_k y_{ki} H_i(t) = \sum_{k=1}^{n} y_{ki} [m_k y_{k1} H_1(t) +$$

$$+ m_k y_{k2} H_2(t) + \ldots + m_k y_{ki} H_i(t) + \ldots + m_k y_{kn} H_n(t)].$$

Utilizando la propiedad de ortogonalidad (3.81) obtendremos:

$$\sum_{k=1}^{n} p_k(t)\, y_{ki} = H_i(t) \sum_{k=1}^{n} m_k y_{ki}^2.$$

De aquí se tiene

$$H_i(t) = \sum_{k=1}^{n} P_k(t)\, y_{ki} : \sum_{k=1}^{n} m_k y_{ki}^2. \tag{3.84}$$

Ahora

$$P_{ki}(t) = m_k y_{ki} \left[\sum_{k=1}^{n} P_k(t)\, y_{ki} : \sum_{k=1}^{n} m_k y_{ki}^2 \right] =$$

$$= m_k y_{ki} \frac{P_1(t)\, y_{1i} + P_2(t)\, y_{2i} + \ldots + P_{ni} y_{ni}}{m_1 y_{1i}^2 + m_2 y_{2i}^2 + \ldots + m_n y_{ni}^2}. \tag{3.85}$$

Las fuerzas correspondientes a la forma principal con la frecuencia ω_i, una vez realizada la descomposición de todas las cargas, pueden verse en la fig. 57, *d*. Dichas fuerzas van a provocar los desplazamientos del sistema proporcionales a sus desplazamientos respecto a la forma principal con la frecuencia ω_i; por eso se puede examinar el sistema con tales cargas como el sistema con un grado de libertad. Precisamente en esto consiste la esencia de la descomposición de la carga respecto a las formas principales.

Como verificación de la descomposición sirve la igualdad

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ki} = P_k(t) \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \ldots, n. \tag{3.86}$$

Si cualquier cantidad de fuerzas $P_i(t)$ está aplicada no a las masas (fig. 58), entonces se debe sustituirlas por las cargas $P_i^*(t)$ que actúan sobre las masas calculando, que los desplazamientos estáticos de las masas debidos a ellos sean iguales con los desplazamientos debidos a las fuerzas dadas $P_i(t)$. Las cargas de sustitución se hallan a base de las ecuaciones

$$\delta_{k1}P_1^*(t) + \delta_{k2}P_2^*(t) + \ldots + \delta_{kn}P_n^*(t) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{kpi}P_i(t)$$

$$\text{para } k = 1, 2, \ldots, n.$$

A partir de tales n ecuaciones se determinan n fuerzas: $P_1^*(t)$, ..., $P_n^*(t)$, con las cuales se debe operar después, como ha sido demostrado anteriormente.

En la forma matricial, el vector de las fuerzas $\mathbf{P}_{ki}$ que corresponde a la i-ésima forma principal, se escribe a base de la fórmula (3.85)

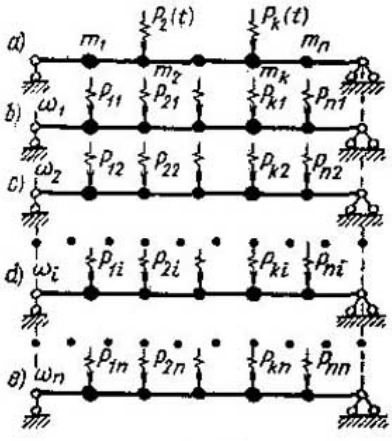


Fig. 57

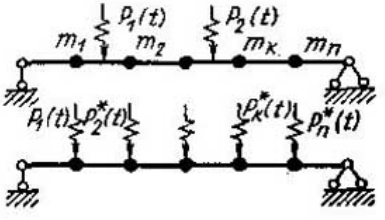


Fig. 58

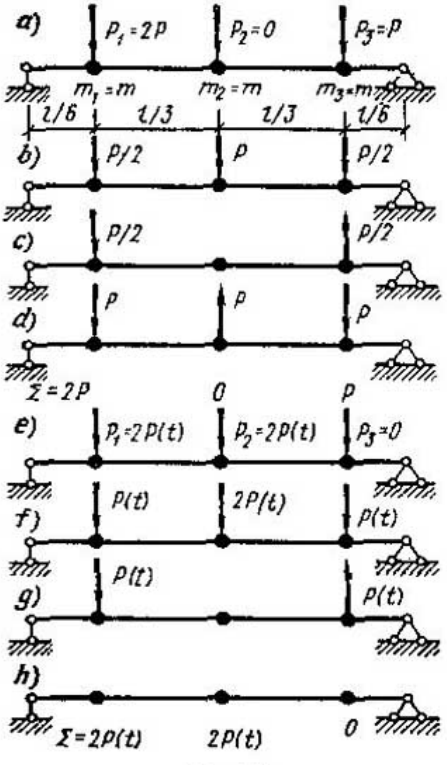


Fig. 59

así:

$$1)\quad \mathbf{P}_{kl} = \frac{(\mathbf{Y}_i' \mathbf{P}_k)_{\text{número}}}{(\mathbf{Y}_i' \mathbf{M} \mathbf{Y}_i)_{\text{número}}} (\mathbf{M}\mathbf{Y}_i)_{\text{matriz}}, \tag{3.87}$$

donde,

$$\mathbf{P}_{kl} = |\{P_{1i},\ P_{2i},\ \ldots,\ P_{ni}\}| \tag{3.88}$$

es la matriz-columna (vector) de las fuerzas buscadas correspondientes a la i-ésima forma principal;

$$2)\quad \mathbf{Y}_i = |\{y_{1i} y_{2i} \ \ldots \ y_{ni}\}| \tag{3.89}$$

es la matriz-columna de los desplazamientos de la i-ésima forma principal;

$$3)\quad \mathbf{M} = \left\| \begin{matrix} m_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & m_n \end{matrix} \right\| \tag{3.90}$$

es la matriz diagonal de las masas del sistema;

$$4)\quad \mathbf{P}_k = |\{P_1 P_2 \ \ldots \ P_n\}| \tag{3.91}$$

es la matriz-columna de las fuerzas dadas.

Ejemplo 19 Descomponer la carga sobre la viga (fig. 59, *a*) respecto a las formas principales, si $m_1 = m_2 = m_3 = m$ y se da la matriz de los desplazamientos de las formas principales:

$$Y = \left\| \begin{matrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

1. SOLUCIÓN EN LA FORMA USUAL SEGÚN LA FÓRMULA (3.85)

1) Fuerzas que corresponden a la primera forma principal ($i = 1$):

$$P_{k1} = m_k y_{k1} \frac{P_1(t)\, y_{11} + P_2(t)\, y_{21} + P_3(t)\, y_{31}}{m_1 y_{11}^2 + m_2 y_{21}^2 + m_3 y_{31}^2} =$$

$$= m_k y_{k1} \frac{2P \cdot 1 + 0 \cdot 2 + P \cdot 1}{m1^2 + m2^2 + m1^2} = m_k y_{k1} \frac{P}{2m}.$$

Ahora

$$P_{11} = m y_{11} \frac{P}{2m} = 1 \frac{P}{2} = \frac{P}{2}; \qquad P_{21} = m y_{21} \frac{P}{2m} = 2 \frac{P}{2} = P;$$

$$P_{31} = m y_{31} \frac{P}{2m} = 1 \frac{P}{2} = \frac{P}{2}.$$

2) Fuerzas que corresponden a la segunda forma principal ($i = 2$):

$$P_{k2} = m_k y_{k2} \frac{P_1(t)\, y_{12} + P_2(t)\, y_{22} + P_3(t)\, y_{32}}{m_1 y_{12}^2 + m_2 y_{22}^2 + m_3 y_{32}^2} =$$

$$= m_k y_{k2} \frac{2P1 + 0 \cdot 0 + P(-1)}{m1^2 + m \cdot 0 + m1^2} = m_k y_{k2} \frac{P}{2m}.$$

Por consiguiente,

$$P_{12} = my_{12}\frac{P}{2m} = m1\frac{P}{2m} = \frac{P}{2}; \qquad P_{22} = my_{22}\frac{P}{2m} = m0\frac{P}{2m} = 0;$$

$$P_{32} = my_{32}\frac{P}{2m} = m(-1)\frac{P}{2m} = -\frac{P}{2}.$$

3) Fuerzas que corresponden a la tercera forma principal. Por analogía se obtiene: $P_{13} = P$; $P_{23} = -P$; $P_{33} = P$.

Las fuerzas halladas se dan en la fig. 59, *b*, *c* y *d*.

La comprobación se realiza según la fórmula (3.86):

$$P_1 = P/2 + P/2 + P = 2P;$$
$$P_2 = P + 0 - P = 0;$$
$$P_3 = P/2 - P/2 + P = P.$$

2. SOLUCIÓN EN LA FORMA MATRICIAL SEGÚN LA FÓRMULA (3.87)

Limitémonos con el cálculo de las fuerzas que corresponden a la primera forma principal,

$$\mathbf{P}_{k1} = \left(\frac{\mathbf{Y}_1' P_k}{\mathbf{Y}_1' \mathbf{M} \mathbf{Y}_1}\right)(\mathbf{M}\mathbf{Y}_1).$$

Hagamos la preparación:

$$\mathbf{Y}_1' P_k = \| 1\ 2\ 1 \| \cdot \begin{Vmatrix} 2P \\ 0 \\ P \end{Vmatrix} = 2P + 0 + P = 3P;$$

$$\mathbf{Y}_1' \mathbf{M} \mathbf{Y}_1 = \| 1\ 2\ 1 \| \cdot \begin{Vmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix} = \| m\ 2m\ m \| \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix} = m + 4m + m = 6m;$$

$$\mathbf{M}\mathbf{Y}_1 = \begin{Vmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} m \\ 2m \\ m \end{Vmatrix}.$$

Ahora

$$P_{k1} = \frac{3P}{6m} \begin{Vmatrix} m \\ 2m \\ m \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} P/2 \\ P \\ P/2 \end{Vmatrix}.$$

Los valores de la fuerza P_{k1} coinciden con los calculados anteriormente.

En este caso la carga dada se ha descompuesto respecto a todas las tres formas principales.

Si la carga fuese dada según la fig. 59, *d*, entonces ésta se descompondría *sólo* respecto a las dos primeras formas principales (fig. 59, *f*, *g*).

Si la carga dada correspondiese por casualidad a la carga de una de las formas principales (por ejemplo, según la fig. 59, *b*), entonces al descomponerla respecto a las formas principales, toda la carga caería *sólo* en la forma principal correspondiente a la carga.

Descomposición de los desplazamientos. Vamos a descomponer, por analogía a las fuerzas, el desplazamiento $\Delta_{kp}(t)$ de la masa, m_k respecto a las formas principales:

$$\Delta_{kp}(t) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{kp,\,i}(t) = \sum_{i=1}^{n} y_{ki} H_i^*(t). \qquad (3.92)$$

Multipliquemos (3.92) por $m_k y_{ki}$ y tomemos la suma respecto a todas las masas:

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta_{kp}(t)\, m_k y_{ki} = \sum_{k=1}^{n} m_k y_{ki} \sum_{i=1}^{n} y_{ki} H_i^*(t) = \sum_{k=1}^{n} m_k y_{kl} \times$$

$$\times [y_{k1} H_1^*(t) + y_{k2} H_2^*(t) + \ldots + y_{ki} H_i^*(t) + \ldots + y_{kn} H_n^*(t)].$$

Aplicando la propiedad de ortogonalidad se tiene

$$\sum_{k=1}^{m} \Delta_{kp}(t)\, m_k y_{ki} = H_i^*(t) \sum_{k=1}^{n} m_k y_{ki}^2.$$

De aquí obtenemos

$$H_i^*(t) = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{kp}(t)\, m_k y_{ki} : \sum_{k=1}^{n} m_k y_{ki}^2. \tag{3.93}$$

Por consiguiente,

$$\Delta_{kp,\,i}(t) = y_{ki} \left[\sum_{k=1}^{n} \Delta_{kp}(t)\, m_k y_{ki} : \sum_{k=1}^{n} m_k y_{ki}^2 \right]. \tag{3.94}$$

En las expresiones obtenidas, bajo $\Delta_{kp}(t)$ puede también sobreentenderse el desplazamiento debido al corrimiento de los vínculos $\Delta_{k_\Delta}(t)$.

§ 25. MOVIMIENTOS FORZADOS PERMANENTES DEL SISTEMA SIN CONSIDERAR LAS RESISTENCIAS. La ecuación deferencial de movimientos según (3.5) es:

$$m_1 \delta_{k1} \ddot{y}_1(t) + m_2 \delta_{k2} \ddot{y}_2(t) + \ldots + m_n \delta_{kn} \ddot{y}_n(t) + y_k(t) =$$
$$= \Delta_{kp}(t) = \delta_{k1} P_1(t) + \delta_{k2} P_2(t) + \ldots + \delta_{kn} P_n(t). \tag{3.95}$$

Hallemos la solución en la siguiente forma:

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^{n} y_{ki} \Phi_i(t) \tag{3.96}$$

1. Está dada la carga $P_k(t)$. Suponemos que

$$P_k(t) = \sum_{i=1}^{n} m_k y_{ki} H_i(t) \text{ [véase (3.83)]}. \tag{3.97}$$

Según (3.96)

$$y_1(t) = \sum_{i=1}^{n} y_{1i} \Phi_i(t);$$

$$y_2(t) = \sum_{i=1}^{n} y_{2i} \Phi_i(t);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n(t) = \sum_{i=1}^{n} y_{ni} \Phi_i(t).$$

Según (3.97)

$$P_1(t) = \sum_{i=1}^{n} m_1 y_{1i} H_i(t);$$

$$P_2(t) = \sum_{i=1}^{n} m_2 y_{2i} H_i(t);$$

. . . . . .

$$P_n(t) = \sum_{i=1}^{n} m_n y_{ni} H_i(t).$$

Sustituyamos en (3.95) uno a uno el valor particular de (3.96) y de (3.97):

$$m_1\delta_{k1}y_{1i}\ddot{\Phi}_i + m_2\delta_{k2}y_{2i}\ddot{\Phi}_i + \ldots + m_n\delta_{kn}y_{ni}\ddot{\Phi}_i + y_{ki}\Phi_i = \delta_{k1}m_1y_{1i}H_i(t) + \delta_{k2}m_2y_{2i}H_i(t) + \ldots + \delta_{kn}m_ny_{ni}H_i(t)$$

o bien

$$\ddot{\Phi}_i(m_1\delta_{k1}y_{1i} + m_2\delta_{k2}y_{2i} + \ldots + m_n\delta_{kn}y_{ni}) = H_i(t)(m_1\delta_{k1}y_{1i} + m_2\delta_{k2}y_{2i} + \ldots + m_n\delta_{kn}y_{ni}) - y_{ki}\Phi_i.$$

Anteriormente se ha mostrado la expresión de ω_i^2 según (3.76), utilizando la cual se tendrá

$$\ddot{\Phi}_i + \omega_i^2\Phi_i = H_i(t). \tag{3.98}$$

La solución particular (integral particular) de esta ecuación será

$$\Phi_i = \frac{1}{\omega_i}\int_0^t H_i(u)\,\operatorname{sen}\omega_i(t-u)\,du. \tag{3.99}$$

La ecuación de movimiento de la masa k según (3.96) es,

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^{n} y_{ki}\frac{1}{\omega_i}\int_0^t H_i(u)\,\operatorname{sen}\omega_i(t-u)\,du.$$

Tomando en consideración que en este caso

$$H_i(t) = \sum_{k=1}^{n} P_k(t)\,y_{ki} : \sum_{k=1}^{n} m_k y_{ki}^2 = \frac{P_1(t)\,y_{1i} + P_2(t)\,y_{2i} + \ldots + P_n(t)\,y_{ni}}{m_1y_{1i}^2 + m_2y_{2i}^2 + \ldots + m_ny_{ni}^2},$$

obtendremos definitivamente:

$$y_k(t) = \sum_{i=1} \frac{\rho_{ki}}{\omega_i} \int_0 \frac{P_1(u) + P_2(u)\rho_{2i} + \ldots + P_n(u)\rho_{ni}}{m_1 + m_2\rho_{2i}^2 + \ldots + m_n\rho_{ni}^2} \operatorname{sen} \omega_i (t-u)\, du, \tag{3.100}$$

donde

$$\rho_{ki} = y_{ki} : y_{1i};\ \rho_{1i} = 1.$$

Mostremos ahora cómo, examinando el sistema con un grado de libertad (fig. 57, *b*), se obtiene la expresión (3.100). La ecuación diferencial de movimiento de la primera masa (la cual, hablando en general, puede ser cualquier masa)

$$y_{1i} = \delta_{11}(-m_1\ddot{y}_{1i}) + \delta_{12}(-m_2\ddot{y}_{2i}) + \ldots + \delta_{1n}(-m_n\ddot{y}_{ni}) + \\ + \delta_{11}P_{1i} + \delta_{12}P_{2i} + \ldots + \delta_{1n}P_{ni}.$$

O bien, tomando en consideración que $y_{ki} : y_{1i} = \rho_{ki}$ tenemos:

$$\ddot{y}_{1i}[m_1\delta_{11} + m_2\delta_{12}\rho_{2i} + \ldots + m_n\delta_{1n}\rho_{ni}] + y_{1i} = \\ = \delta_{11}P_{1i} + \delta_{12}P_{2i} + \ldots + \delta_{1n}P_{ni}.$$

Definitivamente,

$$\ddot{y}_{1i} + \omega_i^2 y_{1i} = \omega_i^2[\delta_{11}P_{1i} + \delta_{12}P_{2i} + \ldots + \delta_{1n}P_{ni}],$$

donde,

$$\omega_i^2 = 1 : [m_1\delta_{11} + m_2\delta_{12}\rho_{2i} + \ldots + m_n\delta_{1n}\rho_{ni}];$$
$$\rho_{ki} = y_{ki} : y_{1i};\ \rho_{1i} = 1.$$

Tomando en consideración (3.85) obtendremos

$$\ddot{y}_{1i} + \omega_i^2 y_{1i} = \frac{\omega_i^2}{\sum_{i=1}^{n} m_k\rho_{ki}^2}\Big[m_1\delta_{1i}\sum_{k=1} P_k(t)\rho_{ki} + \\ + m_2\delta_{12}\rho_{2i}\sum_{k=1}^{n} P_k(t)\rho_{ki} + \ldots + m_n\delta_{1n}\rho_{ni}\sum_{k=1}^{n} P_k(t)\rho_{ki}\Big];$$

$$\ddot{y}_{1i} + \omega_i^2 y_{1i} = \sum_{k=1}^{n} P_k(t)\rho_{ki} : \sum_{k=1}^{n} m_k\rho_{ki}^2.$$

De aquí la solución particular

$$y_{1i} = \frac{1}{\omega_i}\int_0^t \Big[\sum_{k=1}^{n} P_k(u)\rho_{ki} : \sum_{k=1}^{n} m_k\rho_{ki}^2\Big] \operatorname{sen} \omega_i (t-u)\, du.$$

Por consiguiente,

$$y_{ki} = \frac{\rho_{ki}}{\omega_i}\int_0^t \Big[\sum_{k=1}^{n} P_k(u)\rho_{ki} : \sum_{k=1}^{n} m_k\rho_{ki}^2\Big] \operatorname{sen} \omega_i (t-u)\, du.$$

Y, por fin,

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_{ki}}{\omega_i} \int_0^t \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k(u)\,\rho_{ki}}{\sum_{k=1}^{n} m_k \rho_{ki}^2} \operatorname{sen} \omega_i (t-u)\, du.$$

2. Están dados los desplazamientos $\Delta_{kp}(t)$. Introduzcamos en la ecuación (3.95) un sumando de (3.92) y otro de (3.96):

$$m_1\delta_{k1}y_{1i}\ddot{\Phi}_i + m_2\delta_{k2}y_{2i}\ddot{\Phi}_i + \ldots + m_n\delta_{kn}y_{ni}\ddot{\Phi}_i + y_{ki}\Phi_i = y_{ki}H_i^*(t). \tag{3.101}$$

Representemos esta ecuación en la siguiente forma:

$$\frac{\ddot{\Phi}_i}{\Phi_i} + \frac{y_{ki}}{m_1\delta_{k1}y_{1i} + m_2\delta_{k2}y_{2i} + \ldots + m_n\delta_{kn}y_{ni}} =$$
$$= \frac{y_{ki}}{m_1\delta_{k1}y_{1i} + m_2\delta_{k2}y_{2i} + \ldots + m_n\delta_{kn}y_{ni}} \cdot \frac{H_i^*(t)}{\Phi_i}.$$

Tomando en consideración (3.76) obtendremos:

$$\ddot{\Phi}_i + \omega_i^2\Phi_i = \omega_i^2 H_i^*(t). \tag{3.102}$$

Su solución particular es,

$$\Phi_i = \omega_i \int_0^t H_i^*(u) \operatorname{sen} \omega_i (t-u)\, du. \tag{3.103}$$

Según (3.96) se obtiene

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^{n} y_{ki}\omega_i \int_t^0 H_i^*(u) \operatorname{sen} \omega_i (t-u)\, du. \tag{3.104}$$

Utilizando (3.93), tenemos,

$$H_i^*(t) = \sum_{n=1}^{n} \Delta_{kp}(t)\, m_k y_{ki} : \sum_{k=1}^{n} m_k y_{ki}^2 =$$
$$= \frac{\Delta_1 p(t)\, m_1 y_{1i} + \Delta_2 p(t)\, m_2 y_{2i} + \ldots + \Delta_n p(t)\, m_n y_{ni}}{m_1 y_{1i}^2 + m_2 y_{2i}^2 + \ldots + m_n y_{ni}^2}$$

o bien

$$H_i^*(t) = \frac{1}{y_{1i}} \cdot \frac{\Delta_1 p(t) + \Delta_2 p(t)\frac{m_2}{m_1}\rho_{2i} + \ldots + \Delta_n p(t)\frac{m_n}{m_1}\rho_{ni}}{1 + \frac{m_2}{m_1}\rho_{2i}^2 + \ldots + \frac{m_n}{m_1}\rho_{ni}^2},$$

donde $\rho_{ki} = y_{ki} : y_{1i}$.

Sustituyendo sus valores en (3.104) obtendremos definitivamente.

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^{n} \rho_{ki}\omega_i \times$$

$$\times \int_0^t \frac{\Delta_1 p(u) + \Delta_2 p(u)\frac{m_2}{m_1}\rho_{2i} + \ldots + \Delta_n p(u)\frac{m_n}{m_1}\rho_{ni}}{1 + \frac{m_2}{m_1}\rho_{2i}^2 + \ldots + \frac{m_n}{m_1}\rho_{ni}^2} \times$$

$$\times \operatorname{sen}\omega_i(t-u)\,du. \qquad (3.105)$$

Mostremos que si los desplazamientos $\Delta_{kp}(t)$ están provocados por las cargas $P_1(t)$, $P_2(t)$, . . ., $P_n(t)$ aplicadas a las masas, entonces las expresiones (3.100) y (3.105) son iguales:

$$A = \frac{\rho_{ki}}{\omega_i m_1} \cdot \frac{P_1(u) + P_2(u)\rho_{2i} + \ldots + P_n(u)\rho_{ni}}{1 + \frac{m_2}{m_1}\rho_{2i}^2 + \ldots + \frac{m_n}{m_1}\rho_{ni}^2}; \qquad (3.106)$$

$$B = \rho_{ki}\omega_i \frac{\Delta_1 p(u) + \Delta_2 p(u)\frac{m_2}{m_1}\rho_{2i} + \ldots + \Delta_n p(u)\frac{m_n}{m_1}\rho_{ni}}{1 + \frac{m_2}{m_1}\rho_{2i}^2 + \ldots + \frac{m_n}{m_1}\rho_{ni}^2}. \qquad (3.107)$$

Los denominadores de A y B son iguales. Comparamos los numeradores, donde según las designaciones del § 21

$$\rho_{ki} = y_{ki} : y_{1i};\ \rho_{1i} = 1. \qquad (3.108)$$

De acuerdo con (3.76) obtendremos:

$$\frac{\rho_{ki}}{m_1\omega_i^2} = \delta_{k1} + \frac{m_2}{m_1}\delta_{k2}\rho_{2i} + \ldots + \frac{m_n}{m_1}\delta_{kn}\rho_{ni}. \qquad (3.109)$$

Según esta igualdad:

$$\left.\begin{aligned}
&1)\ k=1: \frac{1}{m_1\omega_i^2} = \delta_{11} + \frac{m_2}{m_1}\delta_{12}\rho_{2i} + \ldots + \frac{m_n}{m_1}\delta_{1n}\rho_{ni};\\
&2)\ k=2: \frac{\rho_{2i}}{m_1\omega_i^2} = \delta_{21} + \frac{m_2}{m_1}\delta_{22}\rho_{2i} + \ldots + \frac{m_n}{m_1}\delta_{2n}\rho_{ni};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&n)\ k=n: \frac{\rho_{ni}}{m_1\omega_i^2} = \delta_{n1} + \frac{m_2}{m_1}\delta_{n2}\rho_{2i} + \ldots + \frac{m_n}{m_1}\delta_{nn}\rho_{ni}.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.110)$$

Puesto que hemos considerado las fuerzas aplicadas a las masas entonces

$$\left.\begin{aligned}
\Delta_{1p} &= \delta_{11}P_1 + \delta_{12}P_2 + \ldots + \delta_{1n}P_n;\\
\Delta_{2p} &= \delta_{21}P_1 + \delta_{22}P_2 + \ldots + \delta_{2n}P_n;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta_{np} &= \delta_{n1}P_1 + \delta_{n2}P_2 + \ldots + \delta_{nn}P_n.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.111)$$

Volvamos a escribir estas igualdades con algunos factores:

$$\Delta_{1p} = \delta_{11}P_1 + \delta_{12}P_2 + \ldots + \delta_{1n}P_n;$$

$$\Delta_{2p}\frac{m_2}{m_1}\rho_{2i} = (\delta_{21}P_1 + \delta_{22}P_2 + \ldots + \delta_{2n}P_n)\frac{m_2}{m_1}\rho_{2i};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta_{np}\frac{m_n}{m_1}\rho_{ni} = (\delta_{n1}P_1 + \delta_{n2}P_2 + \ldots + \delta_{nn}P_n)\frac{m_n}{m_1}\rho_{ni}. \quad (3.112)$$

Adicionando por columnas y tomando en consideración (3.110) tendremos:

$$\Delta_{1p} + \Delta_{2p}\frac{m_2}{m_1}\rho_{2i} + \ldots + \Delta_{np}\frac{m_n}{m_1}\rho_{ni} =$$

$$= P_1\frac{1}{m_1\omega_i^2} + P_2\frac{\rho_{2i}}{m_1\omega_i^2} + \ldots + P_n\frac{\rho_{ni}}{m_1\omega_i^2}. \quad (3.113)$$

Sustituyendo el valor de la expresión obtenida en (3.107) se tendrá la expresión (3.106).

§ 26. OSCILACIONES FORZADAS DE LOS SISTEMAS CON CARGA VIBRATORIA P sen θt. Examinamos las oscilaciones permanentes sin considerar la resistencia. En este caso todas las magnitudes que dependen del movimiento varían la ley sen θt, por ejemplo:

$$\Delta_{kp}(t) = \Delta_{kp}\operatorname{sen}\theta t;\ R_{kp}(t) = R_{kp}\operatorname{sen}\theta t.$$

ECUACIONES DEL MÉTODO DE FUERZAS

Las ecuaciones canónicas del método de fuerzas se obtienen según (3.3). Tomando en consideración que en estas ecuaciones las incógnitas X_i representan las fuerzas de inercia J_i^*, escribiremos de inmediato que

$$\delta_{k1}J_1^* + \delta_{k2}J_2^* + \ldots + \delta_{kn}J_n^* + \frac{J_k^*}{c_k} + \Delta_{kp}\operatorname{sen}\theta t = 0$$

$$(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \quad (3.114)$$

De acuerdo con (3.1) se obtiene

$$c_k = \frac{m_k\ddot{y}_k(t)}{y_k(t)} = -\frac{m_k y_k\theta^2\operatorname{sen}\theta t}{y_k\operatorname{sen}\theta t} = -m_k\theta^2.$$

Por consiguiente, (3.114) será:

$$\delta_{k1}J_1^* + \delta_{k2}J_2^* + \ldots + \delta_{kn}J_n^* - \frac{J_k^*}{m_k\theta^2} + \Delta_{kp}\operatorname{sen}\theta t = 0$$

$$(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \quad (3.115)$$

Las fuerzas de inercia positivas están dirigidas hacia el lado de los desplazamientos positivos. Ellas variarán según la ley sen θt.

En forma desarrollada estas ecuaciones serán así:

$$\begin{aligned}
&\delta_{11}^* J_1^* + \delta_{12} J_2^* + \ldots + \delta_{1n} J_n^* + \Delta_{1p} \operatorname{sen} \theta t = 0;\\
&\delta_{21} J_1^* + \delta_{22}^* J_2^* + \ldots + \delta_{2n} J_n^* + \Delta_{2p} \operatorname{sen} \theta t = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\delta_{n1} J_1^* + \delta_{n2} J_2^* + \ldots + \delta_{nn}^* J_n^* + \Delta_{np} \operatorname{sen} \theta t = 0,
\end{aligned} \tag{3.116}$$

donde

$$\delta_{kk}^* = \delta_{kk} - \frac{1}{m_k \theta^2} = \delta_{kk} - \frac{\lambda}{m_k}.$$

A partir de éstas se obtiene

$$J_i^* = D_i : D, \tag{3.117}$$

donde,

$$D = \begin{Vmatrix} \delta_{11}^* & \delta_{12} & \ldots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22}^* & \ldots & \delta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \ldots & \delta_{nn}^* \end{Vmatrix} \tag{3.118}$$

es el determinante común de las ecuaciones (3.116);

$$D_i = -\begin{vmatrix} \delta_{11}^* & \delta_{12} & \overset{i\text{-ésima columna}}{\Delta_{1p} \operatorname{sen} \theta t} & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22}^* & \Delta_{2p} \operatorname{sen} \theta t & \delta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \Delta_{np} \operatorname{sen} \theta t & \delta_{nn}^* \end{vmatrix}, \tag{3.119}$$

es el determinante D con i-ésima columna sustituida por los término independientes con signo inverso.

El determinante (3.118) coincide, por su forma, con el determinante (3.52) de las ecuaciones (3.49), por eso si la frecuencia de la carga que acciona θ coincide con cualquier frecuencia de oscilaciones libres ω_i, entonces el determinante (3.118) en este caso se convierte en cero, y las expresiones (3.117), cuando el numerador D_i difiere de cero, dará los valores de $J_i^* = \infty$.

Esto quiere decir que en este caso tiene lugar la *resonancia*.

Por lo tanto, en el sistema con n grados de libertad, siendo vibratoria la carga, en caso general puede haber n resonancias, cuando la frecuencia de la carga θ (para $D_i \neq 0$) coincida con la frecuencia de oscilaciones propias ω_i. En aquellos casos cuando $\theta \neq \omega_i$, la fórmula (3.117) determina la fuerza de inercia de cualquier masa m_i en cualquier momento de tiempo en la forma finita.

Todas las fuerzas de inercia han de seguir la ley de la carga, es decir, sen θt.

Los desplazamientos $y_i(t)$ se determinan según la fórmula

$$y_i(t) = J_i^* : m_i \theta^2. \tag{3.120}$$

La forma matricial de la ecuación (3.116) es,

$$(\mathbf{MD} - \lambda \mathbf{E})\, \mathbf{J}^* + \mathbf{M}\Delta_p = 0, \tag{3.121}$$

donde,

$$J^* = |\{J_1^*,\ J_2^*,\ \ldots,\ J_n^*\}|$$

es la matriz-columna de las fuerzas buscadas de inercia:

$$\Delta_p = |\{\Delta_{1p},\ \Delta_{2p},\ \ldots,\ \Delta_{np}\}| \operatorname{sen} \theta t$$

es la matriz-columna de los términos independientes;

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \ldots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \ldots & \delta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \ldots & \delta_{nn} \end{bmatrix}$$

es la matriz de los coeficientes δ_{km}; **M**, la matriz diagonal de las masas.

El determinante de las ecuaciones (3.121) $|\,\mathbf{MD} - \lambda \mathbf{E}\,|$ coincide también, por su forma, con el determinante de (3.52), por lo tanto la coincidencia de λ y λ_i evidencia la resonancia.

Sustituyendo (3.120) en la ecuación (3.115) se tendrá:

$$\delta_{k1} m_1 \theta^2 y_1 + \delta_{k2} m_2 \theta^2 y_2 + \ldots + \delta_{km} m_n \theta^2 y_n - \\ - y_k + \Delta_{kp} \operatorname{sen} \theta t = 0. \tag{3.122}$$

En forma desarrollada obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} (m_1\delta_{11}\theta^2 - 1)\, y_1 + m_2\delta_{12}\theta^2 y_2 + \ldots + \delta_{1n} m_n \theta^2 y_n + \\ \qquad + \Delta_{1p} \operatorname{sen} \theta t = 0; \\ m_1\delta_{21}\theta^2 y_1 + (m_2\delta_{22}\theta^2 - 1)\, y_2 + \ldots + \delta_{2n} m_n \theta^2 y_n + \\ \qquad + \Delta_{2p} \operatorname{sen} \theta t = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_1\delta_{n1}\theta^2 y_1 + m_2\delta_{n2}\theta^2 y^2 + \ldots + (\delta_{nn} m_n \theta^2 - 1)\, y_n + \\ \qquad + \Delta_{np} \operatorname{sen} \theta t = 0. \end{array}\right\} \tag{3.123}$$

A partir de éstas se obtiene

$$y_i = D_i : D,$$

donde

$$D = \begin{vmatrix} (m_1\delta_{11}\theta^2 - 1) & m_2\delta_{12}\theta^2 & \ldots & m_n\delta_{1n}\theta^2 \\ m_1\delta_{21}\theta^2 & (m_2\delta_{22}\theta^2 - 1) & \ldots & m_n\delta_{2n}\theta^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_1\delta_{n1}\theta^2 & m_2\delta_{n2}\theta^2 & \ldots & (m_n\delta_{nn}\theta^2 - 1) \end{vmatrix}; \tag{3.124}$$

$$D_i = -\begin{vmatrix} (m_1\delta_{11}\theta^2-1) & m_2\delta_{12}\theta^2 & \Delta_{1p}\,\text{sen}\,\theta t & m_n\delta_{1n}\theta^2 \\ m_1\delta_{21}\theta^2 & (m_2\delta_{12}\theta^2-1) & \Delta_{2p}\,\text{sen}\,\theta t & m_n\delta_{2n}\theta^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ m_1\delta_{n1}\theta^2 & m_2\delta_{n2}\theta^2 & \Delta_{np}\,\text{sen}\,\theta t & (m_n\delta_{nn}\theta^2-1) \end{vmatrix}. \quad (3.125)$$

(i-ésima columna)

Los desplazamientos también variarán según la ley sen θt.

También en este caso la forma del determinante (3.124) coincide con el determinante de las ecuaciones (3.18) y, por consiguiente, al coincidir la frecuencia de la carga que actúa θ con cualquier frecuencia de oscilaciones propias ω_i, cuando D_i según (3.125) difiere de cero, habrá resonancia.

La ecuación (3.123) en la forma matricial es,

$$(\mathbf{DM} - \lambda\mathbf{E})\,\mathbf{Y} + \lambda\Delta_p = 0, \quad (3.126)$$

donde,

$$\mathbf{Y} = |\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}|$$

es la matriz-columna de los desplazamientos buscados;

$$\Delta_P = |\{\Delta_{1p}, \Delta_{2p}, \ldots, \Delta_{np}\}|\,\text{sen}\,\theta t,$$

es la matriz-columna de los términos independientes;

$$\lambda = 1 : \theta^2.$$

El determinante de las ecuaciones (3.126) es,

$$\mathbf{D} = |\,\mathbf{DM} - \lambda\mathbf{E}\,|. \quad (3.127)$$

El coincide por la forma con el determinante (3.26), por eso la coincidencia de λ con λ_i para las condiciones anteriormente indicadas evidencia sobre la resonancia.

Notemos, sin embargo, que si la carga vibratoria corresponde a cualquier forma principal de oscilaciones propias, entonces la coincidencia de la frecuencia de la carga que acciona con la frecuencia de oscilaciones propias de otra forma principal no provoca, *teóricamente*, la resonancia.

Esta tesis importante puede ser demostrada a base de las ecuaciones canónicas (3.5), si por las incógnitas $y_1(t)$, $y_2(t)$ . . . $y_n(t)$ se toman los desplazamientos de grupo según las formas principales, y la carga que acciona se descompone respecto a éstas.

Para tales condiciones tendremos lo siguiente:

1) las ecuaciones canónicas serán monomiales, ya que todos los desplazamientos secundarios de grupo δ_{kl} son iguales a cero de acuerdo con la propiedad de ortogonalidad de las formas principales;

2) la carga componente $P_k\ (t)$ que corresponde a la forma principal $y_k\ (t)$ dará por las mismas razones sólo el desplazamiento $\Delta_{kp}\ (t)$ diferente de cero.

Así pues, en caso general van a diferir de cero sólo tales desplazamientos de carga respecto a las formas principales $y_k\ (t)$, en dirección de los cuales existe la componente $P_k\ (t)$ de la carga descompuesta.

En otras palabras, la resonancia puede surgir *teóricamente* al coincidir la frecuencia de la carga que actúa θ sólo con *aquella frecuencia de oscilaciones propias*, por cuya forma principal se tiene la componente de la carga dada, descompuesta respecto a las formas principales.

Esta deducción es justa para cualquier frecuencia de la carga que actúa.

Como consecuencia de lo expuesto, por ejemplo, la carga simétrica en los sistemas simétricos, en vista de que todos sus componentes respecto a las formas principales serán sólo simétricos, no provoca desplazamientos antisimétricos, y por lo tanto la coincidencia de la frecuencia de la carga simétrica que actúa con la frecuencia de oscilaciones propias antisimétricas no provoca la resonancia.

Al mismo tiempo, tomando en consideración la presencia constante de imperfecciones del sistema y de la carga, se debe considerar prácticamente que la resonancia llega al coincidir la frecuencia de cualquier carga que actúa con *cualquier* frecuencia de oscilaciones propias.

Las ecuaciones canónicas (3.116) y (3.123) son aplicables igualmente a cualquier sistema con n grados de libertad, independientemente de si el sistema sea isostático o hiperestático. La diferencia sólo consiste en la determinación de los desplazamientos δ_{km}, los cuales se hallan con más facilidad en los sistemas isostáticos que en los hiperestáticos.

La determinación de las fuerzas de inercia a partir de las ecuaciones canónicas (3.116) permite calcular las fuerzas interiores en el sistema, cuya expresión general puede escribirse en la misma forma que para los sistemas hiperestáticos:

$$S = \overline{S}_1 J_1^* + \overline{S}_2 J_2^* + \ldots + \overline{S}_n J_n^* + S_p, \qquad (3.128)$$

donde $\overline{S}_i$ es el esfuerzo debido a $J_i^* = 1$ y S_p, el esfuerzo debido a la carga.

Puesto que muy frecuentemente el cálculo se reduce, en primer lugar, a la determinación de las fuerzas interiores, la forma de las ecuaciones canónicas (3.116) es más cómoda.

ECUACIONES DEL MÉTODO DE DESPLAZAMIENTOS

Las ecuaciones canónicas del método de desplazamientos según (3.9) son:

$$\left.\begin{aligned} &r_{11}y_1(t)+r_{12}y_2(t)+\ldots+r_{1n}y_n(t)+\\ &\quad+m_1\ddot{y}_1(t)+R_{1p}\operatorname{sen}\theta t=0;\\ &r_{21}y_1(t)+r_{22}y_2(t)+\ldots+r_{2n}y_n(t)+\\ &\quad+m_2\ddot{y}_2(t)+R_{2p}\operatorname{sen}\theta t=0;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &r_{n1}y_1(t)+r_{n2}y_2(t)+\ldots+r_{nn}y_n(t)+\\ &\quad+m_n\ddot{y}_n(t)+R_{np}\operatorname{sen}\theta t=0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.129)$$

Buscaremos las soluciones particulares en la misma forma $y_i(t) = C_i \operatorname{sen}\theta t$, obteniendo como resultado las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} &(r_{11}-m_1\theta^2)\,y_1(t)+r_{12}y_2(t)+\ldots+r_{1n}y_n(t)+\\ &\quad+R_{1p}\operatorname{sen}\theta t=0;\\ &r_{21}y_1(t)+(r_{22}-m_2\theta^2)\,y_2(t)+\ldots+r_{2n}y_n(t)+\\ &\quad+R_{2p}\operatorname{sen}\theta t=0;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &r_{n1}y_1(t)+r_{n2}y_2(t)+\ldots+(r_{nn}-m_n\theta^2)\,y_n(t)+\\ &\quad+R_{np}\operatorname{sen}\theta t=0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.130)$$

De aquí

$$y_i(t) = D_i : D, \qquad (3.131)$$

donde,

$$D=\begin{vmatrix} (r_{11}-m_1\theta^2) & r_{12} & \ldots & r_{1n}\\ r_{21} & (r_{22}-m_2\theta^2) & \ldots & r_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ r_{n1} & r_{n2} & \ldots & (r_{nn}-m_n\theta^2) \end{vmatrix}; \qquad (3.132)$$

$$D_i=-\begin{vmatrix} (r_{11}-m_1\theta^2) & r_{12} & \overset{i\text{-ésima columna}}{\overbrace{R_{1p}\operatorname{sen}\theta t}} & r_{1n}\\ r_{21} & (r_{22}-m_2\theta^2) & R_{2p}\operatorname{sen}\theta t & r_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ r_{n1} & r_{n2} & R_{n1}\operatorname{sen}\theta t & (r_{nn}-m_n\theta^2) \end{vmatrix}. \qquad (3.133)$$

El determinante común (3.132) coincide por la forma con el (3.68), por eso para $\theta = \omega_i$, $D = 0$ e $y_i = \infty$ tiene lugar la resonan-

cia. Las fuerzas de inercia se determinan según (3.120) y las interiores, según (3.128).

La forma matricial de las ecuaciones (3.130) es,

$$(\mathbf{R} - \theta^2 \mathbf{M})\,\mathbf{Y} + \mathbf{R}_p = 0, \tag{3.134}$$

siendo

$$\mathbf{R}_p = |\{R_{1p}, R_{2p}, \ldots, R_{np}\}| \operatorname{sen} \theta\, t \tag{3.135}$$

es la matriz de las reacciones de carga.

El determinante de la ecuación (3.134) es,

$$D = |\mathbf{R} - \theta^2 \mathbf{M}\,|\,. \tag{3.136}$$

Este determinante coincide con el (3.71). Por eso también en este caso, al coincidir θ con ω_l, tiene lugar la resonancia.

§ 27. UTILIZACIÓN DE LA SIMETRÍA DEL SISTEMA

OSCILACIONES LIBRES

En los sistemas simétricos, las formas principales de oscilaciones libres pueden ser de dos tipos, a saber: simétricas y antisimétricas. Ellas deben estudiarse por separado, para lo que es necesario utilizar debidamente la simetría, lo que puede realizarse mediante dos métodos.

Sustitución del sistema dado por su mitad. El sistema dado con las masas se divide por el eje de simetría en dos mitades. En los lugares de secciones se imponen enlaces complementarios o condiciones complementarias que corresponden a los desplazamientos en el eje de simetría para las oscilaciones simétricas y antisimétricas.

Para las oscilaciones simétricas, los puntos y nudos del sistema que se encuentran en el eje de simetría pueden tener sólo desplazamientos de avance por la vertical, y no pueden tener desplazamientos horizontales y giros. Para las oscilaciones antisimétricas, los puntos y nudos del sistema que se hallan en el eje de simetría pueden tener desplazamientos de avance por la horizontal y los giros, pero no pueden tener desplazamientos verticales.

De acuerdo con esto, si el eje de simetría corta una barra (fig. 60, *a*), entonces al estudiar las oscilaciones simétricas se introduce un enlace en forma de empotramiento deslizante con posible desplazamiento vertical (fig. 60, *b*), y al estudiar las oscilaciones antisimétricas, un apoyo móvil con posible desplazamiento horizontal (fig. 60, *c*).

Cuando el eje de simetría divide un montante a lo largo en dos mitades (fig. 61, *a*), entonces al estudiar las oscilaciones simétricas se debe considerar infinita la rigidez del montante ($EJ = \infty$), lo que excluirá el giro de los nudos contiguos a éste. Además, si el montante puede trasladarse por la vertical, es necesario un enlace complementario en forma de un empotramiento deslizante (fig. 61, *b*). Estudiando las oscilaciones antisimétricas, debe tomarse la mitad

de la rigidez del montante y, si éste puede desplazarse por la vertical se debe poner un apoyo móvil (fig. 61, *c*). En la fig. 62 pueden verse los ejemplos de sustitución del sistema por sus mitades para el estudio separado de las oscilaciones simétricas y antisimétricas.

Utilización de los desplazamientos pares de grupo. Si para cualquier oscilación libre del sistema que consta de todos los tonos de oscilaciones se examinan los desplazamientos de las masas situadas simétricamente, se descomponen dichos desplazamientos en simétricos y antisimétricos tomándolos después por incógnitas, entonces

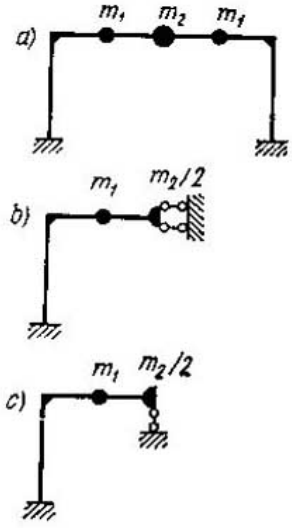


Fig. 60

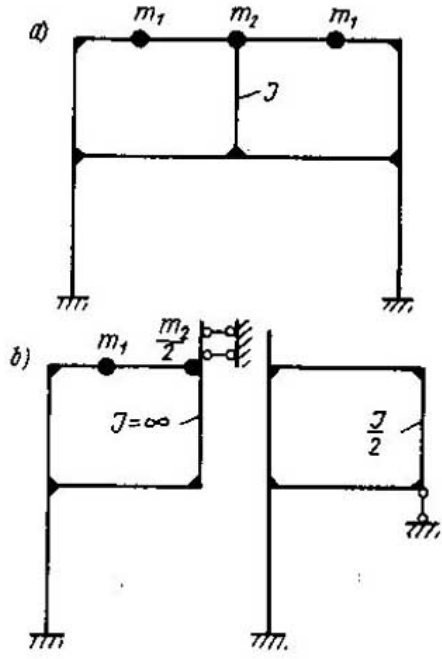


Fig. 61

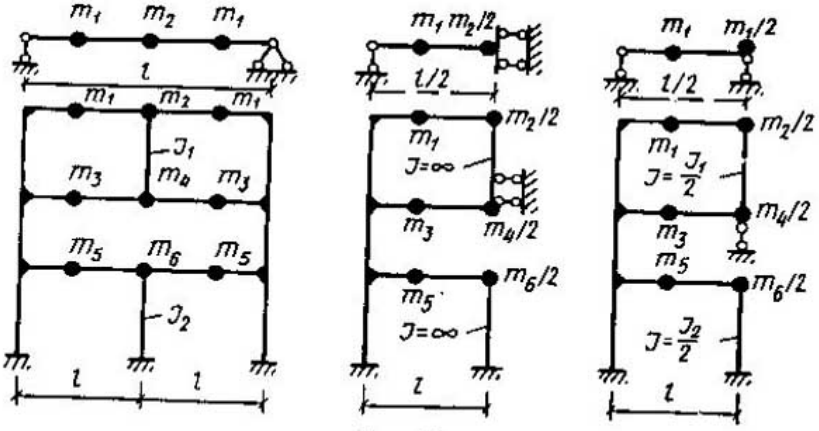


Fig. 62

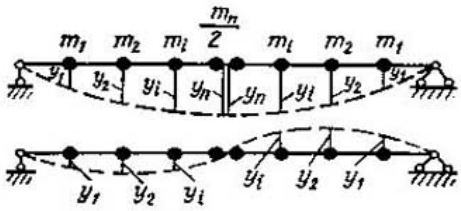


Fig. 63

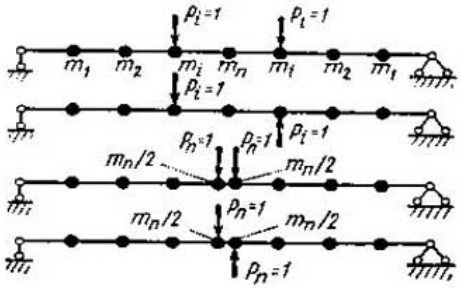


Fig. 64

el sistema de las ecuaciones canónicas de los desplazamientos dinámicos se divide en dos grupos independientes: las oscilaciones simétricas y las antisimétricas.

Asignemos las masas situadas simétricamente sobre el sistema (fig. 63) y sus desplazamientos con letras de iguales índices. Vamos a sustituir la masa sobre el eje de simetría m_n por dos masas situadas infinitamente cerca $m_n/2$.

Tomemos, en calidad de los desplazamientos incógnitos, la suma de los valores absolutos de los desplazamientos de las masas ubicadas simétricamente:

$$\Delta_1 = 2y_1;\ \Delta_2 = 2y_2$$
$$\Delta_i = 2y_i \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \Delta_n = 2y_n.$$

La fuerza de inercia de una masa m_i situada simétricamente, el desplazamiento en dirección de la cual es igual a $\Delta_i/2$, será:

$$J_i^* = -m_i\ddot{y}_i = -m_i\frac{\ddot{\Delta}_i}{2}. \qquad (3.137)$$

El desplazamiento par Δ_{ki} en dirección del movimiento de las masas m_k ubicadas simétricamente debido a las fuerzas de inercia (3.137) de las masas m_i situadas simétricamente se escribirá así:

$$\Delta_{ki} = \delta_{ki}\left(-m_i\frac{\ddot{\Delta}_i}{2}\right), \qquad (3.138)$$

donde δ_{ki} es el desplazamiento par en dirección de las masas m_k situadas simétricamente, debido a dos fuerzas unitarias de inercia en dirección del movimiento de las masas simétricas m_i.

De esta expresión se desprende que para aplicar todas las expresiones anteriormente obtenidas es necesario para los desplazamientos pares sustituir los desplazamientos unitarios simples por los unitarios pares, tomando respectivamente en calidad de la masa $m_i/2$, es decir, la mitad de la masa situada en la mitad del sistema. Esto quiere decir que la masa m_n en el eje de simetría se toma en consideración mediante el valor $m_n/4$.

Es necesario también prestar atención al hecho de que en el estado unitario par n, por analogía con el estado i, deben haber dos fuerzas $P_n = 1$ situadas cerca, o una fuerza $P_n = 2$ (fig. 64).

Se deben escribir por separado las ecuaciones canónicas de los desplazamientos dinámicos para las oscilaciones simétricas y para las antisimétricas.

DESPLAZAMIENTOS FORZADOS

Tanto las cargas como los desplazamientos originados por ellas se descomponen en simétricos y antisimétricos, utilizando después uno de los métodos examinados para las oscilaciones libres.

CAPITULO 4 * SISTEMAS CON DOS Y TRES GRADOS DE LIBERTAD

Los sistemas con dos y tres grados de libertad son casos particulares de los sistemas con varios grados de libertad. Pero dichos sistemas, sobre todo los de dos grados de libertad, son más simples, que admiten soluciones en forma acabada (como fórmulas), examinándolos por esta razón en un capítulo independiente.

§ 28. OSCILACIONES LIBRES DE SISTEMAS CON DOS GRADOS DE LIBERTAD.

Las ecuaciones canónicas de oscilaciones según (3.18) son:

$$\left.\begin{aligned} (m_1\delta_{11}\omega_i^2 - 1)\, y_{1i} + m_2\delta_{12}\omega_i^2 y_{2i} = 0; \\ m_1\delta_{21}\omega_i^2 y_{1i} + (m_2\delta_{22}\omega_i^2 - 1)\, y_{2i} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

La ecuación de frecuencias en la forma no desarrollada respecto al determinante de las ecuaciones (4.1) es

$$D = \begin{vmatrix} (m_1\delta_{11}\omega_i^2 - 1) & m_2\delta_{12}\omega_i^2 \\ m_1\delta_{21}\omega_i^2 & (m_2\delta_{22}\omega_i^2 - 1) \end{vmatrix} = 0. \tag{4.2}$$

Esta misma en la forma desarrollada será:

$$\begin{aligned} &(m_1\delta_{11}\omega_i^2 - 1)\,(m_2\delta_{22}\omega_i^2 - 1) - m_1 m_2 \delta_{12}^2 \omega_i^4 = \\ &= \omega_i^4\,(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)\, m_1 m_2 - \omega_i^2\,(m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22}) + 1 = 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Suponiendo que $\omega_i^2 = z_i$, obtendremos:

$$z_i^2\,(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)\, m_1 m_2 - z_i\,(m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22}) + 1 = 0.$$

De aquí que

$$z_{1,2} = \frac{(m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22}) \mp \sqrt{(m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22})^2 - 4m_1 m_2\,(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}}{2m_1 m_2\,(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}$$

Una vez hechas las transformaciones tenemos

$$z_{1,2} = \frac{(m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22}) \pm \sqrt{(m_1\delta_{11} - m_2\delta_{22})^2 + 4m_1m_2\delta_{12}^2}}{2m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}. \qquad (4.4)$$

Respectivamente,

$$\omega_1 = \sqrt{z_1}; \quad \omega_2 = \sqrt{z_2}.$$

Los valores inversos de (4.4) son:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\omega_{1,2}^2} &= \frac{1}{2}\left[(m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22}) \pm \sqrt{(m_1\delta_{11} - m_2\delta_{22})^2 + 4m_1m_2\delta_{12}^2}\right]; \\ \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} &= m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.5)$$

A partir de las ecuaciones (4.1) se tiene ω_i^2 en dos formas:

$$\omega_i^2 = \frac{1}{m_1\delta_{11} + m_2\delta_{12}\rho_{2i}} = \frac{\rho_{2i}}{m_1\delta_{21} + m_2\delta_{22}\rho_{2i}}. \qquad (4.6)$$

Respectivamente,

$$\rho_{2i} = \frac{y_{2i}}{y_{1i}} = -\frac{m_1\delta_{11}\omega_i^2 - 1}{m_2\delta_{12}\omega_i^2} = -\frac{m_1\delta_{21}\omega_i^2}{m_2\delta_{22}\omega_i^2 - 1}. \qquad (4.7)$$

En virtud de la propiedad de ortogonalidad (3.81) tenemos que

$$m_1y_{11}y_{12} + m_2y_{21}y_{22} = m_1 + m_2\rho_{21}\rho_{22} = 0.$$

De aquí

$$\rho_{21}\rho_{22} = -m_1 : m_2. \qquad (4.8)$$

Los desplazamientos de las masas se obtienen según (3.45):

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= E_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \varphi_1) + E_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \varphi_2); \\ y_2 &= \rho_{21}E_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \varphi_1) + \rho_{22}E_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned}\right\} \qquad (4.9)$$

Para determinar las constantes E_1, E_2, φ_1 y φ_2 utilizamos las condiciones iniciales del movimiento para $t = 0$:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y_1(0) \\ y_2 &= y_2(0) \end{aligned}\right\} \text{ desplazamientos iniciales;}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_1 &= v_1(0) \\ \dot{y}_2 &= v_2(0) \end{aligned}\right\} \text{ velocidades iniciales.}$$

Luego compongamos primeramente las derivadas de (4.9):

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \omega_1E_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \omega_2E_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2); \\ \dot{y}_2 &= \rho_{21}\omega_1E_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \rho_{22}\omega_2E_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned}\right\} \qquad (4.10)$$

Escribamos las condiciones iniciales del movimiento:

$$y_1(0) = E_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + E_2 \operatorname{sen} \varphi_2; \tag{4.11}$$

$$v_1(0) = \omega_1 E_1 \cos \varphi_1 + \omega_2 E_2 \cos \varphi_2. \tag{4.12}$$

$$y_2(0) = \rho_{21} E_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + \rho_{22} E_2 \operatorname{sen} \varphi_2; \tag{4.13}$$

$$v_2(0) = \omega_1 \rho_{21} E_1 \cos \varphi_1 + \rho_{22} \omega_2 E_2 \cos \varphi_2. \tag{4.14}$$

Representemos la ecuación (4.13) así:

$$\frac{y_2(0)}{\rho_{21}} = E_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + \frac{\rho_{22}}{\rho_{21}} E_2 \operatorname{sen} \varphi_2.$$

A partir de ésta y de la ecuación (4.11) tenemos

$$E_2 \operatorname{sen} \varphi_2 = \frac{y_1(0)\rho_{21} - y_2(0)}{\rho_{21} - \rho_{22}}. \tag{4.15}$$

Por analogía, las ecuaciones (4.12) y (4.14) dan lo siguiente:

$$\frac{v_1(0)}{\omega_1} = E_1 \cos \varphi_1 + \frac{\omega_2}{\omega_1} E_2 \cos \varphi_2;$$

$$\frac{v_2(0)}{\omega_1 \rho_{21}} = E_1 \cos \varphi_1 + \frac{\rho_{22}}{\rho_{21}} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1} E_2 \cos \varphi_2.$$

De aquí

$$E_2 \cos \varphi_2 = \frac{v_1(0)\rho_{21} - v_2(0)}{\omega_2 \rho_{21} - \rho_{22}\omega_2}. \tag{4.16}$$

De las ecuaciones (4.15) y (4.16) tenemos

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = [y_1(0)\rho_{21} - y_2(0)]\,\omega_2 : [v_1(0)\rho_{21} - v_2(0)]; \tag{4.17}$$

$$E_2 = \sqrt{\left[\frac{y_1(0)\rho_{21} - y_2(0)}{\rho_{21} - \rho_{22}}\right]^2 + \left[\frac{v_1(0)\rho_{21} - v_2(0)}{\omega_2(\rho_{21} - \rho_{22})}\right]^2}. \tag{4.18}$$

Ahora escribamos la ecuación (4.13) de otra manera:

$$\frac{y_2(0)}{\rho_{22}} = \frac{\rho_{21}}{\rho_{22}} E_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + E_2 \operatorname{sen} \varphi_2.$$

De esta ecuación y de la (4.11) tenemos

$$E_1 \operatorname{sen} \varphi_1 = \frac{\rho_{22} y_1(0) - y_2(0)}{\rho_{22} - \rho_{21}}. \tag{4.19}$$

Las ecuaciones (4.12) y (4.14) dan, por analogía, lo siguiente:

$$\frac{v_1(0)}{\omega_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} E_1 \cos \varphi_1 + E_2 \cos \varphi_2.$$

$$\frac{v_2(0)}{\omega_2 \rho_{22}} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\rho_{21}}{\rho_{22}} E_1 \cos \varphi_1 + E_2 \cos \varphi_2.$$

De aquí

$$E_1 \cos \varphi_1 = \frac{\rho_{22} v_1(0) - v_2(0)}{\omega_1(\rho_{22} - \rho_{21})}. \tag{4.20}$$

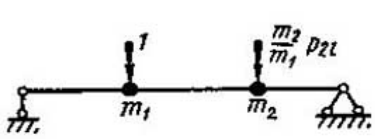


Fig. 65

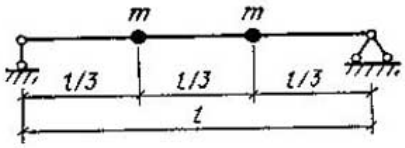


Fig. 66

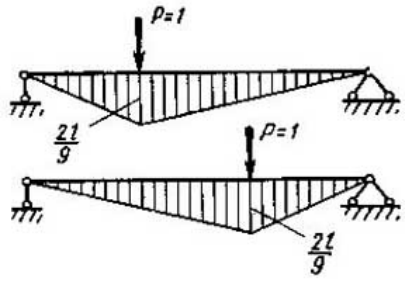


Fig. 67

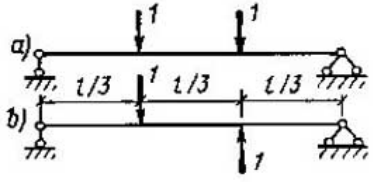


Fig. 68

Las ecuaciones (4.19) y (4.20) determinan lo siguiente:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \omega_1 [\rho_{22} y_1(0) - y_2(0)] : [\rho_{22} v_1(0) - v_2(0)]; \qquad (4.21)$$

$$E_1 = \sqrt{\left[\frac{\rho_{22} y_1(0) - y_2(0)}{\rho_{22} - \rho_{21}}\right]^2 + \left[\frac{\rho_{22} v_1(0) - v_2(0)}{\omega_1(\rho_{22} - \rho_{21})}\right]^2}. \qquad (4.22)$$

Así pues, todas las constantes E_1, E_2, φ_1, φ_2 están expresadas por medio de las condiciones iniciales del movimiento. Estas últimas pueden darse de tal manera, que las oscilaciones sucedan sólo con una frecuencia ω_1 o ω_2, es decir, se efectúen respecto a una de las dos formas principales.

El esquema de las fuerzas que determinan la forma principal de las oscilaciones puede verse en la fig. 65. La utilización de la simetría se hace sobre la base de las reglas expuestas en el capítulo 3.

Ejemplo 20. Obtener las fórmulas de las frecuencias de oscilaciones libres para una viga imponderable con dos masas iguales (fig. 66) y determinar las formas principales de oscilaciones.

Realicemos primeramente la solución sin hacer uso de la simetría.

Según el método de «multiplicación» de los diagramas (fig. 67) se tiene:

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}\frac{l}{3}\frac{2l}{9}\frac{2}{3}\frac{2l}{9} + \frac{1}{2}\frac{2l}{3}\frac{2l}{9}\frac{2}{3}\frac{2l}{9}\right) = \frac{8l^3}{486\,EJ};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\frac{l}{3}\frac{2l}{9}\frac{2}{3}\frac{l}{9}\right)2 + \right.$$

$$\left. + \frac{l}{9}\frac{l}{3}\frac{l+2l}{2\cdot 9} + \frac{1}{2}\frac{l}{9}\frac{l}{3}\left(\frac{l}{9} + \frac{l}{3\cdot 9}\right)\right] = \frac{7l^3}{486\,EJ}.$$

Según (4.4) obtenemos:

$$\omega^2_{1,2} = \frac{\left(m\frac{8l^3}{486\,EJ}+m\frac{8l^3}{486\,EJ}\right) \mp \sqrt{\left(m\frac{8l^3}{486\,EJ}-m\frac{8l^3}{486\,EJ}\right)^2+4mm\left(\frac{7l^3}{486\,EJ}\right)^2}}{2mm\left[\frac{8l^3}{486\,EJ}\frac{8l^3}{486\,EJ}-\left(\frac{7l^3}{486\,EJ}\right)^2\right]},$$

o bien

$$\omega^2_1 = \frac{486\,EJ}{15ml^3}; \quad \omega^2_2 = 486\,EJ : ml^3.$$

La verificación según (4.5) será:

$$\frac{15ml^3}{486\,EJ}+\frac{ml^3}{486\,EJ} = m\left(\frac{8l^3}{486\,EJ}+\frac{8l^3}{486\,EJ}\right).$$

Determinamos las formas principales:

la 1ª forma principal es con la frecuencia $\omega_1 = \sqrt{486\,EJ : 15ml^3}$; según la fórmula (4.7) tenemos que

$$\rho_{21} = -\left(m\frac{7}{486}\frac{l^3}{EJ}\frac{486}{15}\frac{EJ}{ml^3}\right) : \left(m\frac{8}{486}\frac{l^3}{EJ}\frac{486\,EJ}{15ml^3}-1\right) = 1;$$

el esquema de las fuerzas que determinan la forma principal de las oscilaciones se da en la fig. 68, *a*;

la 2ª forma principal con la frecuencia $\omega_2 = \sqrt{486\,EJ : ml^3}$;

$$\rho_{22} = -\left(m\frac{7}{486}\frac{l^3}{EJ}\frac{486\,EJ}{ml^3}\right) : \left(m\frac{8}{486}\frac{l^3}{EJ}\frac{486\,EJ}{ml^3}-1\right) = -1;$$

el esquema de las fuerzas puede verse en la fig. 68, *b*.

Determinemos las frecuencias respecto a las formas principales:

la 1ª forma simétrica de las oscilaciones da $y_{2i}/y_{1i} = 1$; según (4.6) tenemos

$$\omega^2_1 = \frac{1}{m(\delta_{11}+\delta_{12})} = \frac{1}{m\left(\frac{8l^3}{486\,EJ}+\frac{7l^3}{486\,EJ}\right)} = \frac{486\,EJ}{15ml^3};$$

la 2ª forma antisimétrica de las oscilaciones determina $y_{2i}/y_{1i} = -1$;

$$\omega^2_2 = \frac{1}{m(\delta_{11}-\delta_{12})} = \frac{1}{m\left(\frac{8l^3}{486\,EJ}-\frac{7l^3}{486\,EJ}\right)} = \frac{486\,EJ}{ml^3}.$$

Ahora utilizaremos la simetría para solucionar el problema.

SUSTITUCIÓN DE LA VIGA POR SU MITAD

En la fig. 69 está construido el diagrama unitario de los momentos flectores para la forma simétrica de las oscilaciones. El sistema tiene un grado de libertad por lo tanto, la frecuencia se determina según la fórmula

$$\omega^2 = 1/m\delta_{11}.$$

Multiplicando el diagrama unitario por sí mismo se halla lo siguiente:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}\frac{l}{3}\frac{l}{3}\frac{2}{3}\frac{l}{3}+\frac{l}{3}\frac{l}{6}\frac{l}{3}\right) = \frac{15l^3}{486\,EJ};$$

$$\omega^2_1 = 1 : (15l^3 : 486\,EJ).$$

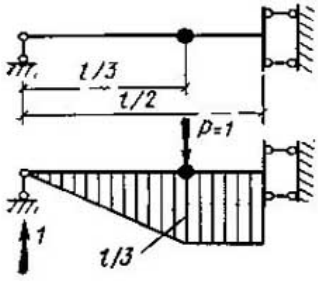


Fig. 69

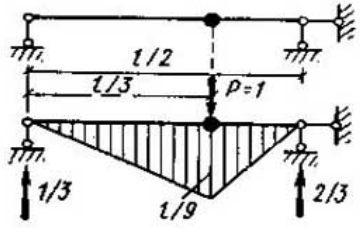


Fig. 70

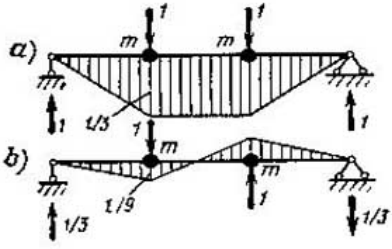


Fig. 71

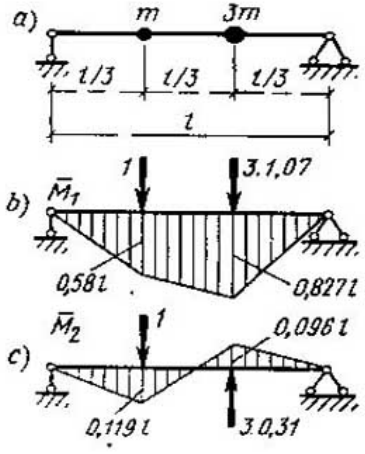


Fig. 72

Para la forma antisimétrica de las oscilaciones (fig. 70) tenemos

$$\delta_{22}=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}\,\frac{l}{3}\,\frac{l}{9}\,\frac{2}{3}\,\frac{l}{9}+\frac{1}{2}\,\frac{l}{6}\,\frac{l}{9}\,\frac{2}{3}\,\frac{l}{9}\right)=\frac{l^3}{486\,EJ};$$

$$\omega_2^2=1:(ml^3:486\,EJ).$$

APLICACIÓN DE LOS DESPLAZAMIENTOS PARES DE GRUPO

Los estados unitarios para determinar las formas simétricas y antisimétricas de las oscilaciones se dan en la fig. 71.

Para la forma simétrica de las oscilaciones (fig. 71, *a*) tenemos

$$\omega_1^2=\frac{1}{(m/2)\,\delta_{11}}$$

Aquí δ_{11} es el desplazamiento par de grupo, y la masa m está introducida con el factor $^1/_2$ (véase el § 27):

$$\delta_{11}=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}\,\frac{l}{3}\,\frac{l}{3}\,\frac{2}{3}\,\frac{l}{3}+\frac{l}{6}\,\frac{l}{3}\,\frac{l}{3}\right)2=\frac{15l^3}{486\,EJ}\,2;$$

$$\omega_1^2=1:\frac{m}{2}\left(\frac{30l^3}{486\,EJ}\right)=486\,EJ:15ml^3.$$

Para la forma antisimétrica de las oscilaciones (fig. 71, *b*) tenemos

$$\omega_2^2 = \frac{1}{\frac{m}{2}\delta_{22}};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}\frac{l}{3}\frac{l}{9}\frac{2}{3}\frac{l}{9} + \frac{1}{2}\frac{l}{6}\frac{l}{9}\frac{2}{3}\frac{l}{9}\right)2 = \frac{2l^3}{486\,EJ};$$

$$\omega_2^2 = 1 : \frac{m}{2}\frac{2l^3}{486\,EJ} = \frac{486\,EJ}{ml^3}.$$

Ejemplo 21. Determinar las frecuencias y las formas principales de las oscilaciones libres de una viga imponderable con dos masas (fig. 72, *a*):

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{8}{486}\frac{l^3}{EJ}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{7l^3}{486\,EJ} \text{ (véase el ejemplo 20).}$$

Según la fórmula (4.5) tenemos que

$$\frac{1}{\omega_{1,2}^2} = \frac{1}{2}\left[\left(m\frac{8l^3}{486\,EJ} + 3m\frac{8l^3}{486\,EJ}\right) \pm \right.$$

$$\left. \pm \sqrt{\left(m\frac{8l^3}{486\,EJ} - 3m\frac{8l^3}{486\,EJ}\right)^2 + 12m^2\left(\frac{7l^3}{486\,EJ}\right)^3}\right].$$

De aquí se desprende:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{\omega_{1,2}^2} = \frac{ml^3}{243\,EJ}(8 \pm 7{,}2629).$$

1ª forma principal con la frecuencia más baja (fundamental):

$$\omega_1^2 = \frac{243\,EJ}{ml^3}\,0{,}0655.$$

Según (4.7)

$$\rho_{21} = \frac{y_{21}}{y_{11}} = -\frac{\frac{4l^3}{243\,EJ}\,m\frac{243\,EJ}{ml^3}\,0{,}0655 - 1}{\frac{7}{486}\cdot\frac{l^3}{EJ}\,3m\frac{243\,EJ}{ml^3}\,0{,}0655} = 1{,}074.$$

Las fuerzas que determinan la forma principal de las oscilaciones se dan en la fig. 72, *b*.

2ª forma principal con la frecuencia $\omega_2^2 = \frac{243\,EJ}{ml^3}\,1{,}358$;

$$\rho_{22} = \frac{y_{22}}{y_{12}} = -\frac{\frac{4}{243}\cdot\frac{l^3}{EJ}\,m\frac{243\,EJ}{ml^3}\,1{,}358 - 1}{\frac{7}{486}\cdot\frac{l^3}{EJ}\,3m\frac{243\,EJ}{ml^3}\,1{,}358} = -0{,}311.$$

La verificación según la fórmula (4.8) da lo siguiente:

$$1{,}074\,(-0{,}311) \approx -\frac{m}{3m}.$$

El esquema de las fuerzas para la 2ª forma principal se da en la fig. 72, *c*. Puede demostrarse que según las propiedades de la ortogonalidad de las formas principales debe ser $(\overline{M}_1)\,(\overline{M}_2) = 0$.

Ahora démoslo en la forma matricial. Según (3.21) tenemos

$$\mathbf{A} = \mathbf{DM} = \frac{l^3}{486\,EJ} \begin{Vmatrix} 8m & 21m \\ 7m & 24m \end{Vmatrix};$$

$$S_p\mathbf{A} = \frac{32ml^3}{486\,EJ}; \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{16ml^3}{243\,EJ};$$

$$|\mathbf{A}| = \left(\frac{l^3}{486\,EJ}\right)^2 45m^2; \quad \lambda_1\lambda_2 = \left(\frac{ml^3}{243\,EJ}\right)^2 11{,}2503.$$

Las igualdades (3.37) y (3.38) están cumplidas.
La matriz de los vectores de los desplazamientos según (3.42) será:

$$\mathbf{Y} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1{,}074 & -0{,}311 \end{Vmatrix}.$$

Como la matriz A es asimétrica, entonces para verificar la ortogonalidad de los vectores es necesario componer una matriz de los vectores «rectificados» según la expresión (3.30):

$$\mathbf{Y}^* = \begin{Vmatrix} \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ 1{,}074\sqrt{3m} & -0{,}311\sqrt{3m} \end{Vmatrix}.$$

Verificamos su ortogonalidad:

$$\mathbf{Y}_1^{*\prime} \cdot \mathbf{Y}_2^* = \| \sqrt{m}\ 1{,}074\sqrt{3m} \| \cdot | \{\sqrt{m} - 0{,}311\sqrt{3m}\} | =$$
$$= m - 1{,}074 \cdot 0{,}311 \cdot 3m = 0.$$

Expongamos además la rectificación según la fórmula (3.35'):

$$\mathbf{Y}_1' \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{Y}_2 = \| 1\ \ 1{,}074 \| \cdot \begin{Vmatrix} m & 0 \\ 0 & 3m \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ -0{,}311 \end{Vmatrix} =$$

$$= \| m\ \ 1{,}074 \cdot 3m \| \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ -0{,}311 \end{Vmatrix} = m - 0{,}311 \cdot 1{,}074 \cdot 3m = 0.$$

§ 29. OSCILACIONES FORZADAS DEL SISTEMA CON DOS GRADOS DE LIBERTAD DEBIDAS A LA ACCIÓN SOBRE LAS MASAS DE LOS IMPULSOS APLICADOS SIMULTÁNEAMENTE (FIG. 73).

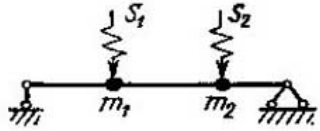


Fig. 73

Los impulsos S_1 y S_2 comunican a las masas las velocidades iniciales:

$$v_1(0) = S_1 : m_1; \quad v_2(0) = S_2 : m_2.$$

En este caso los desplazamientos iniciales son iguales a cero.

Terminada la acción de los impulsos, el sistema realiza oscilaciones libres, las cuales hallamos según (4.9), mas según (4.17) y

(4.21) $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Así pues,

$$y_1(t) = E_1 \operatorname{sen} \omega_1 t + E_2 \operatorname{sen} \omega_2 t; \tag{4.23}$$

$$y_2(t) = \rho_{21} E_1 \operatorname{sen} \omega_1 t + \rho_{22} E_2 \operatorname{sen} \omega_2 t, \tag{4.24}$$

donde, según (4.18) y (4.22):

$$E_1 = \frac{\rho_{22} v_1(0) - v_2(0)}{\omega_1(\rho_{22} - \rho_{21})} = \frac{\rho_{22}\dfrac{S_1}{m_1} - \dfrac{S_2}{m_2}}{\omega_1(\rho_{22} - \rho_{21})}; \tag{4.25}$$

$$E_2 = \frac{\rho_{21} v_1(0) - v_2(0)}{\omega_2(\rho_{21} - \rho_{22})} = \frac{\rho_{21}\dfrac{S_1}{m_1} - \dfrac{S_2}{m_2}}{\omega_2(\rho_{21} - \rho_{22})}. \tag{4.26}$$

§ 30. CASO GENERAL DE ACCIÓN DE LAS FUERZAS SOBRE LAS MASAS EN EL SISTEMA CON DOS GRADOS DE LIBERTAD.

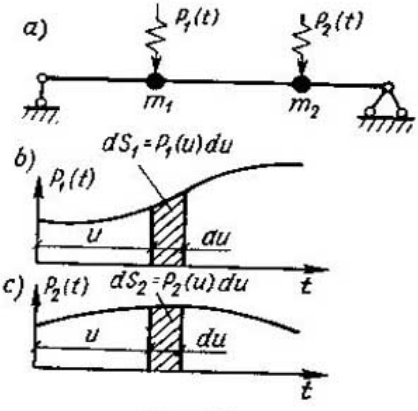


Fig. 74

Supongamos que sobre las masas m_1 y m_2 actúan las fuerzas $P_1(t)$ y $P_2(t)$ (fig. 74, *a*), cuyos diagramas de variación en función del tiempo se dan en la fig. 74, *b* y *c*. Sustituyamos la acción de las fuerzas por la acción de un número infinitamente grande de impulsos infinitamente pequeños: $dS_1 = P_1(u)\,du$ y $dS_2 = P_2(u)\,du$. Empleando luego las expresiones para los desplazamientos (4.23)—(4.26) debidos a los impulsos, y teniendo en cuenta que desde el impulso infinitamente pequeño hasta el momento de tiempo examinado pasa el tiempo $t - u$, obtendremos con facilidad:

$$y_1(t) = y_{11} + y_{12} =$$

$$= \frac{1}{\omega_1(\rho_{22} - \rho_{21})} \int_0^t \left[\frac{\rho_{22}}{m_1} P_1(u) - \frac{P_2(u)}{m_2}\right] \operatorname{sen} \omega_1(t-u)\,du +$$

$$+ \frac{1}{\omega_2(\rho_{21} - \rho_{22})} \int_0^t \left[\frac{\rho_{21}}{m_1} P_1(u) - \frac{P_2(u)}{m_1}\right] \operatorname{sen} \omega_2(t-u)\,du; \tag{4.27}$$

$$y_2(t) = \rho_{21} y_{11} + \rho_{22} y_{12} =$$

$$= \frac{\rho_{21}}{\omega_1(\rho_{22} - \rho_{21})} \int_0^t \left[\frac{\rho_{22}}{m_1} P_1(u) - \frac{P_2(u)}{m_2}\right] \operatorname{sen} \omega_1(t-u)\,du +$$

$$+ \frac{\rho_{22}}{\omega_2(\rho_{21} - \rho_{22})} \int_0^t \left[\frac{\rho_{21}}{m_1} P_1(u) - \frac{P_2(u)}{m_2}\right] \operatorname{sen} \omega_2(t-u)\,du. \tag{4.28}$$

Las expresiones de la acción de las fuerzas $P_1(t)$ y $P_2(t)$ en otra forma pueden obtenerse según (3.100):

$$y_1(t) = y_{11} + y_{12} = \frac{1}{\omega_1}\int_0^t \frac{P_1(u) + P_2(u)\rho_{21}}{m_1 + m_2\rho_{21}^2} \operatorname{sen}\omega_1(t-u)\,du +$$

$$+ \frac{1}{\omega_2}\int_0^t \frac{P_1(u) + P_2(u)\rho_{22}}{m_1 + m_2\rho_{22}^2} \operatorname{sen}\omega_2(t-u)\,du; \qquad (4.29)$$

$$y_2(t) = \rho_{21}y_{11} + \rho_{22}y_{12}. \qquad (4.30)$$

Es posible mostrar, utilizando (4.8), que las expresiones (4.27) y (4.29) son idénticas.

Si están dados los desplazamientos $\Delta_{1p}(t)$ y $\Delta_{2p}(t)$, entonces según (3.105) tenemos

$$y_1(t) = y_{11} + y_{12} = \omega_1\int_0^t \frac{\Delta_{1p}(u) + \Delta_{2p}(u)\frac{m_2}{m_1}\rho_{21}}{1 + \frac{m_2}{m_1}\rho_{21}^2} \operatorname{sen}\omega_1(t-u)\,du +$$

$$+ \omega_2\int_0^t \frac{\Delta_{1p}(u) + \Delta_{2p}(u)\frac{m_2}{m_1}\rho_{22}}{1 + \frac{m_2}{m_1}\rho_{22}^2} \operatorname{sen}\omega_2(t-u)\,du; \qquad (4.31)$$

$$y_2(t) = \rho_{21}y_{11} + \rho_{22}y_{12}. \qquad (4.32)$$

§ 31. CASO DE APLICACIÓN REPENTINA DE LAS FUERZAS (FIG. 75). Según las expresiones (4.29) y (4.30) se tiene lo siguiente:

$$y_1(t) = y_{11} + y_{12} = \frac{P_1 + P_2\rho_{21}}{\omega_1^2(m_1 + m_2\rho_{21}^2)}(1 - \cos\omega_1 t) +$$

$$+ \frac{P_1 + P_2\rho_{22}}{\omega_2^2(m_1 + m_2\rho_{22}^2)}(1 - \cos\omega_2 t); \qquad (4.33)$$

$$y_2(t) = \rho_{21}y_{11} + \rho_{22}y_{12}. \qquad (4.34)$$

Estas mismas expresiones según (4.27) y (4.28) son:

$$y_1(t) = y_{11} + y_{12} = \left(\frac{\rho_{22}}{m_1}P_1 - \frac{P_2}{m_2}\right)(1 - \cos\omega_1 t) : \omega_1^2(\rho_{22} - \rho_{21}) +$$

$$+ \left(\frac{\rho_{21}}{m_1}P_1 - \frac{P_2}{m_2}\right)(1 - \cos\omega_2 t) : \omega_2^2(\rho_{21} - \rho_{22}); \qquad (4.35)$$

$$y_2(t) = \rho_{21}y_{11} + \rho_{22}y_{12}. \qquad (4.36)$$

§ 32. ACCIÓN DE LA CARGA VIBRATORIA $P \operatorname{sen}\theta t$ SOBRE EL SISTEMA CON DOS GRADOS DE LIBERTAD. Las ecuaciones canónicas de las fuerzas de inercia según (3.116) son:

$$\left.\begin{aligned} \delta_{11}^* J_1^* + \delta_{12} J_2^* + \Delta_{1p}\operatorname{sen}\theta t = 0; \\ \delta_{21} J_1^* + \delta_{22}^* J_2^* + \Delta_{2p}\operatorname{sen}\theta t = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (4.37)$$

donde

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{m_1\theta^2}; \quad \delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{1}{m_2\theta^2}.$$

De aquí

$$J_1^* = D_1 : D; \; J_2^* = D_2 : D, \tag{4.38}$$

siendo

$$D = \delta_{11}^*\delta_{22}^* - \delta_{12}^2;$$
$$\left.\begin{aligned} D_1 &= -\Delta_{1p}\,\text{sen}\,\theta t\delta_{22}^* + \Delta_{2p}\,\text{sen}\,\theta t\delta_{12}; \\ D_2 &= -\Delta_{2p}\,\text{sen}\,\theta t\delta_{11}^* + \Delta_{1p}\,\text{sen}\,\theta t\delta_{21}. \end{aligned}\right\} \tag{4.39}$$

Los desplazamientos a través de las fuerzas de inercia se determinan según (3.120).

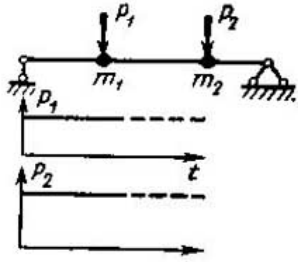


Fig. 75

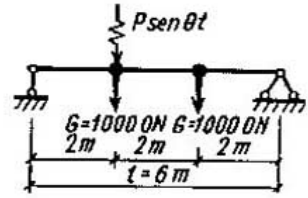


Fig. 76

Las ecuaciones canónicas del método de desplazamientos según (3.129) son:

$$\begin{aligned} (r_{11} - m_1\theta^2)\, y_1(t) + r_{12}y_2(t) + R_{1p}\,\text{sen}\,\theta t = 0; \\ r_{21}y_1(t) + (r_{22} - m_2\theta^2)\, y_2(t) + R_{2p}\,\text{sen}\,\theta t = 0. \end{aligned} \tag{4.40}$$

De aquí se obtiene [véase (3.131)—(3.133)]

$$y_1(t) = D_1 : D; \; y_2(t) = D_2 : D, \tag{4.41}$$

donde

$$\begin{aligned} D &= (r_{11} - m_1\theta^2)(r_{22} - m_2\theta^2) - r_{21}r_{12}; \\ D_1 &= -R_{1p}\,\text{sen}\,\theta t\,(r_{22} - m_2\,\theta^2) + R_{2p}\,\text{sen}\,\theta t r_{12}; \\ D_2 &= -R_{2p}\,\text{sen}\,\theta t\,(r_{11} - m_1\theta^2) + R_{1p}\,\text{sen}\,\theta t r_{21}. \end{aligned}$$

Las fuerzas de inercia se determinan según (3.120) y las interiores, según (3.128).

Ejemplo 22. Construir el diagrama dinámico de los momentos flectores debidos al funcionamiento de un motor (fig. 76) con los siguientes datos:

$$G = 10\,000\ \text{N}; \; l = 6\ \text{m}; \; J = 8880\ 10^{-8}\ \text{m}^4;$$
$$g = 9{,}81\ \text{m/s}^2; \; E = 2{,}1 \cdot 10^5\ \text{MPa}; \quad n = 480\ \text{rev/min}.$$

La masa desequilibrada provoca la fuerza centrífuga P, sobre cuyo componente vertical P sen θt se efectúa el cálculo. Prescindimos de la fuerza horizontal P cos θt, siendo por eso aproximado el cálculo.

La frecuencia de la carga que actúa es

$$\theta = \frac{480 \cdot 3{,}14 \cdot 2}{60} \approx 50 \text{ s}^{-1}.$$

La masa $m = G : g = 10\,000 : 9{,}81 = 1020$ kg.

Las frecuencias de propias oscilaciones (véase el ejemplo 20) es

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{486 \cdot 2{,}1 \cdot 10^{11} \cdot 8880 \cdot 10^{-8}}{15 \cdot 1020 \cdot 6^3}} = 52{,}37 \text{ s}^{-1};$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{486 \cdot 2{,}1 \cdot 10^{11} \cdot 8880 \cdot 10^{-8}}{1020 \cdot 6^3}} = 202{,}83 \text{ s}^{-1};$$

$$\delta_{11} = \frac{8}{486}\frac{l^3}{EJ} = \frac{8}{486}\frac{6^3}{2{,}1 \cdot 10^{11} \cdot 8880 \cdot 10^{-8}} = 1{,}908 \cdot 10^{-7} \text{ m/N};$$

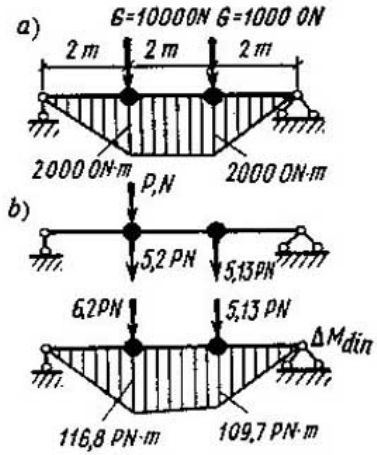


Fig. 77

$$\delta_{12} = \frac{7}{486}\frac{l^3}{EJ} = \frac{7}{486}\frac{6^3}{2{,}1 \cdot 10^{11} \cdot 8880 \cdot 10^{-8}} = 1{,}670 \cdot 10^{-7} \text{ m/N};$$

$$\Delta_{1p} = \delta_{11} P \operatorname{sen} \theta t = 1{,}908 \cdot 10^{-7} P \operatorname{sen} \theta t \text{ m};$$

$$\Delta_{2p} = \delta_{21} P \operatorname{sen} \theta t = 1{,}67 \cdot 10^{-7} P \operatorname{sen} \theta t \text{ m};$$

$$\left(1{,}908 \cdot 10^{-7} - \frac{1}{1020 \cdot 50^2}\right) J_1^* + 1{,}67 \cdot 10^{-7} J_2^* + P\, 1{,}908 \cdot 10^{-7} \operatorname{sen} \theta t = 0;$$

$$1{,}67 \cdot 10^{-7} J_1^* + \left(1{,}908 \cdot 10^{-7} - \frac{1}{1020 \cdot 50^2}\right) J_2^* + P\, 1{,}67 \cdot 10^{-7} \operatorname{sen} \theta t = 0$$

o bien

$$-2{,}016 J_1^* + 1{,}67 J_2^* = -1{,}908 P \operatorname{sen} \theta t;$$

$$1{,}67 J_1^* - 2{,}016 J_2^* = -1{,}67 P \operatorname{sen} \theta t.$$

Resolviendo estas ecuaciones hallamos:

$$J_1^* = 5{,}196\, P \operatorname{sen} \theta t; \quad J_2^* = 5{,}13\, P \operatorname{sen} \theta t.$$

Los desplazamientos de las masas según (3.120):

$$y_1 = J_1^* : m\theta^2 = \frac{5{,}196 P \operatorname{sen} \theta t}{1020 \cdot 50^2} = 0{,}000002038 P \operatorname{sen} \theta t \text{ m};$$

$$y_2 = J_2^* : m\theta^2 = \frac{5{,}13 P \operatorname{sen} \theta t}{1020 \cdot 50^2} = 0{,}000002012 P \operatorname{sen} \theta t \text{ m}.$$

Los diagramas de los momentos flectores debidos a la carga estática y a las fuerzas dinámicas se dan en la fig. 77.

§ 33. OSCILACIONES LIBRES DE SISTEMAS CON TRES GRADOS DE LIBERTAD.

Las ecuaciones canónicas de los desplazamientos dinámicos escritas según el método de fuerzas de acuerdo

con (3.18) serán las siguientes:

$$\left.\begin{aligned}
&(m_1\delta_{11}\omega_i^2 - 1)\, y_{1i} + m_2\delta_{12}\omega_i^2 y_{2i} + m_3\delta_{13}\omega_i^2 y_{3i} = 0;\\
&m_1\delta_{21}\omega_i^2 y_{1i} + (m_2\delta_{22}\omega_i^2 - 1)\, y_{2i} + m_3\delta_{23}\omega_i^2 y_{3i} = 0;\\
&m_1\delta_{31}\omega_i^2 y_{1i} + m_2\delta_{32}\omega_i^2 y_{2i} + (m_3\delta_{33}\omega_i^2 - 1)\, y_{3i} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.42)$$

Su determinante es

$$D = \begin{vmatrix} (m_1\delta_{11}\omega_i^2 - 1) & m_2\delta_{12}\omega_i^2 & m_3\delta_{13}\omega_i^2 \\ m_1\delta_{21}\omega_i^2 & (m_2\delta_{22}\omega_i^2 - 1) & m_3\delta_{23}\omega_i^2 \\ m_1\delta_{31}\omega_i^2 & m_2\delta_{32}\omega_i^2 & (m_3\delta_{33}\omega_i^2 - 1) \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.43)$$

Aunque el desarrollo del determinante en la forma general no ofrece dificultades de principio, sin embargo, es más fácil desarrollarlo numéricamente en cada caso particular.

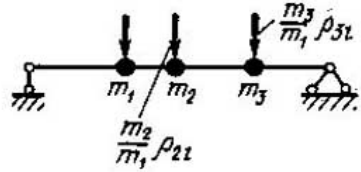


Fig. 78

Las ecuaciones para determinar los coeficientes $\rho_{ki} = y_{ki}/y_{1i}$ se obtienen a partir de (4.42) o según (3.41):

$$\left.\begin{aligned}
&(m_1\delta_{11}\omega_i^2 - 1) + m_2\delta_{12}\omega_i^2\rho_{2i} + m_3\delta_{13}\omega_i^2\rho_{3i} = 0;\\
&m_1\delta_{21}\omega_i^2 + (m_2\delta_{22}\omega_i^2 - 1)\,\rho_{2i} + m_3\delta_{23}\omega_i^2\rho_{3i} = 0;\\
&m_1\delta_{31}\omega_i^2 + m_2\delta_{32}\omega_i^2\rho_{2i} + (m_3\delta_{33}\omega_i^2 - 1)\,\rho_{3i} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.44)$$

Una de estas tres ecuaciones, cualesquiera que sea, puede omitirse, puesto que es superflua para hallar sólo dos incógnitas: ρ_{2i} y ρ_{3i}.

El esquema de las fuerzas que determinan las formas principales de las oscilaciones se da en la fig. 78. Las ecuaciones canónicas de los desplazamientos escritas según el método de desplazamientos, de acuerdo con (3.67) serán las siguientes:

$$\left.\begin{aligned}
&(r_{11} - m_1\omega_i^2)\, y_{1i} + r_{12}y_{2i} + r_{13}y_{3i} = 0;\\
&r_{21}y_{1i} + (r_{22} - m_2\omega_i^2)\, y_{2i} + r_{23}y_{3i} = 0;\\
&r_{31}y_{1i} + r_{32}y_{2i} + (r_{33} - m_3\omega_i^2)\, y_{3i} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.45)$$

Su determinante es

$$D = \begin{vmatrix} (r_{11} - m_1\omega_i^2) & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & (r_{22} - m_2\omega_i^2) & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & (r_{33} - m_3\omega_i^2) \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.46)$$

Las ecuaciones para determinar $\rho_{ki} = y_{ki}/y_{1i}$ según (3.69) son:

$$\left.\begin{aligned}(r_{11}-m_1\omega_i^2)+r_{12}\rho_{2i}+r_{13}\rho_{3i}=0;\\ r_{21}+(r_{22}-m_2\omega_i^2)\,\rho_{2i}+r_{23}\rho_{3i}=0;\\ r_{31}+r_{32}\rho_{2i}+(r_{33}-m_3\omega_i^2)\,\rho_{3i}=0.\end{aligned}\right\} \qquad (4.47)$$

Ejemplo 23. Determinar las frecuencias y las formas principales de las oscilaciones de una viga con tres masas (fig. 79, *a*). Los desplazamientos δ_{km},

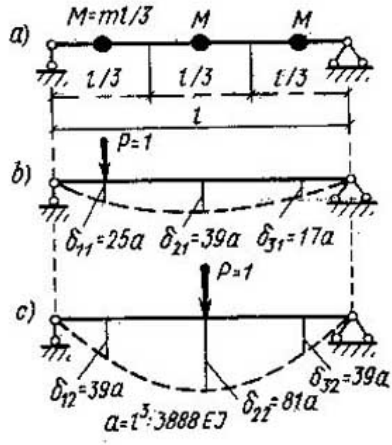


Fig. 79

que son las flechas de la viga bajo la acción de las fuerzas unitarias, se exponen en la fig. 79, *b* y *c*:

$$\delta_{11} = 25l^3 : 3888\ EJ; \quad \delta_{12} = 39l^3 : 3888\ EJ;$$
$$\delta_{13} = 17l^3 : 3888\ EJ; \quad \delta_{22} = 81l^3 : 3888\ EJ;$$
$$\delta_{23} = \delta_{12}; \quad \delta_{33} = 25l^3 : 3888\ EJ.$$

La resolución la haremos mediante diferentes métodos.

Solución sin utilizar la simetría

Las ecuaciones canónicas (4.42) son:

$$\left(\frac{25l^3\omega_i^2}{3888EJ}M-1\right)y_{1i}+\frac{39l^3\omega_i^2}{3888EJ}My_{2i}+\frac{17l^3\omega_i^2}{3888EJ}My_{3i}=0;$$
$$\frac{39l^3\omega_i^2}{3888EJ}My_{1i}+\left(\frac{81l^3\omega_i^2}{3888EJ}M-1\right)y_{2i}+\frac{39l^3\omega_i^2}{3888EJ}My_{3i}=0;$$
$$\frac{17l^3\omega_i^2}{3888EJ}My_{1i}+\frac{39l^3\omega_i^2}{3888EJ}My_{2i}+\left(\frac{25l^3\omega_i^2}{3888EJ}M-1\right)y_{3i}=0.$$

Una vez que se han hecho las simplificaciones tenemos

$$\left.\begin{aligned}(25-k_i)\,y_{1i}+39y_{2i}+17y_{3i}=0;\\ 39y_{1i}+(81-k_i)\,y_{2i}+39y_{3i}=0;\\ 17y_{1i}+39y_{2i}+(25-k_i)\,y_{3i}=0,\end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

donde,

$$k_i = 3888\ EJ : l^3\omega_i^2M. \qquad (b)$$

El determinante de estas ecuaciones lo igualamos a cero:

$$D=\begin{vmatrix}(25-k_i) & 39 & 17\\ 39 & (81-k_i) & 39\\ 17 & 39 & (25-k_i)\end{vmatrix}=0.$$

Este mismo en la forma desarrollada será:

$$k_i^3-131\,k_i^2+1344\,k_i-2880=0.$$

Las raíces de esta ecuación son: $k_1=120$, $k_2=8$, $k_3=3$.
Las frecuencias de oscilaciones libres según (b) son:

$$\omega_i^2=\frac{3888EJ}{l^3Mk_i}=\frac{3888EJ}{l^3\frac{ml}{3}k_i};$$

1) $k_1=120$

$$\omega_1=\sqrt{3888EJ:\frac{1}{3}ml^4120}=\frac{9{,}859}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}};$$

2) $k_2=8$

$$\omega_2=\sqrt{3888EJ:\frac{1}{3}ml^48}=\frac{38{,}184}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}};$$

3) $k_3=3$

$$\omega_3=\sqrt{3888EJ:\frac{1}{3}ml^43}=\frac{62{,}354}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

A base de las frecuencias halladas determinamos las formas principales. Con este fin es necesario emplear las ecuaciones (4.44). Pero como en las ecuaciones canónicas (4.42) se ha hecho la sustitución según (b), entonces aplicaremos para calcular las formas principales las ecuaciones (a), las cuales volvemos a escribir en la siguiente forma:

$$\left.\begin{aligned}&(25-k_i)+39\rho_{2i}+17\rho_{3i}=0;\\ &39+(81-k_i)\,\rho_{2i}+39\rho_{3i}=0;\\ &17+39\rho_{2i}+(25-k_i)\,\rho_{3i}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(c)$$

1ra forma principal con la frecuencia $\omega_1^2=3888/40ml$ para $k_1=120$. Las ecuaciones (c) serán:

$$\begin{aligned}&(25-120)+39\rho_{21}+17\rho_{31}=0;\\ &39+(81-120)\,\rho_{21}+39\rho_{31}=0;\\ &17+39\rho_{21}+(25-120)\,\rho_{31}=0.\end{aligned}$$

Una de las ecuaciones obtenidas es superflua. Omitimos la tercera, entonces

$$\rho_{21}=\frac{95\cdot39+39\cdot17}{39\cdot39+39\cdot17}=2;\qquad \rho_{31}=\frac{-39\cdot39+30\cdot95}{39\cdot39+39\cdot17}=1.$$

Es decir, la 1ra forma principal se determina por los valores:

$$y_{11};\ y_{21}=2y_{11};\ y_{31}=y_{11}.$$

En este caso la forma principal de las oscilaciones es simétrica y no tiene puntos nodales. El esquema de las fuerzas que determinan la forma principal puede verse en la fig. 80.

2da forma principal con la frecuencia $\omega_2^2 = 1458\ EJ/ml^4$ para $k_2 = 8$. Las ecuaciones (c) serán:

$$(25 - 8) + 39\ \rho_{22} + 17\ \rho_{32} = 0;$$
$$39 + (81 - 8)\ \rho_{23} + 39\ \rho_{32} = 0;$$
$$17 + 39\ \rho_{22} + (25 - 8)\ \rho_{32} = 0.$$

De las dos primeras ecuaciones obtenemos:

$$\rho_{22} = \frac{-17 \cdot 39 + 17 \cdot 39}{39 \cdot 39 - 73 \cdot 17} = 0; \qquad \rho_{32} = \frac{-39 \cdot 39 + 73 \cdot 17}{39 \cdot 39 - 73 \cdot 17} = -1.$$

El esquema de las fuerzas que determinan la forma principal se da en la fig. 81.

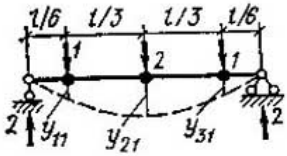


Fig. 80

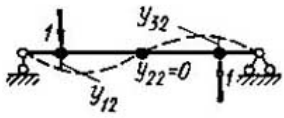


Fig. 81

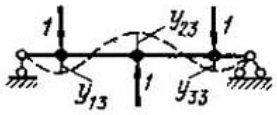


Fig. 82

La 2da forma principal es antisimétrica, teniendo, además, un punto nodal.

3ra forma principal con la frecuencia $\omega_3^2 = \frac{3888EJ}{ml^4}$ para $k_3 = 3$.

Hallamos por analogía: $\rho_{23} = -1$; $\rho_{33} = 1$. Es decir, $y_{23} = -y_{13}$; $y_{33} = y_{13}$.

El esquema de las fuerzas se expone en la fig. 82; las oscilaciones serán simétricas, pero ya con dos puntos nodales. En este ejemplo la matriz A para (3.20) con $\lambda_i = k_i$ será:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 25 & 39 & 17 \\ 39 & 81 & 39 \\ 17 & 39 & 25 \end{Vmatrix} \quad \text{(simétrica)}.$$

La matriz de los vectores de los desplazamientos según (3.42) será:

$$\mathbf{Y} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Componemos el producto

$$\mathbf{Y}' \cdot \mathbf{Y} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix},$$

lo que evidencia sobre la ortogonalidad de los vectores hallados para la matriz simétrica A.

Solución utilizando la simetría

A) SUSTITUCIÓN DE LA VIGA POR SUS MITADES

Con la oscilación antisimétrica (fig. 83), el sistema de sustitución tiene un grado de libertad

$$EJ\delta_{11}=\frac{1}{2}\frac{l}{6}\frac{l}{9}\frac{2}{3}\frac{l}{9}+\frac{1}{2}\frac{l}{3}\frac{l}{9}\frac{2}{3}\frac{l}{9}=\frac{l^3}{486}.$$

La frecuencia es,

$$\omega_1^2=\frac{1}{M\delta_{11}}=\frac{1}{\frac{ml}{3}\delta_{11}}=\frac{1458EJ}{ml^4}.$$

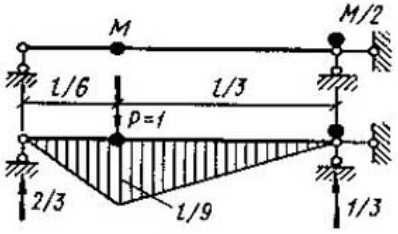


Fig. 83

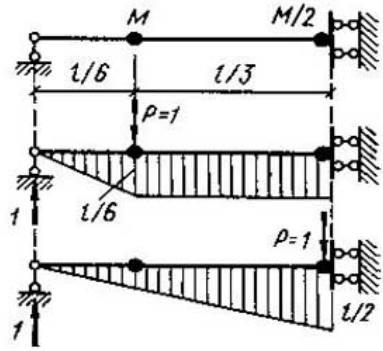


Fig. 84

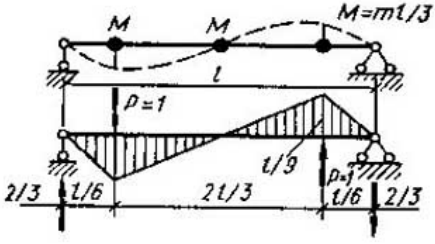


Fig. 85

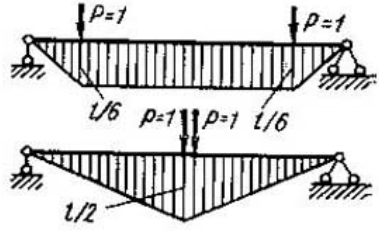


Fig. 86

En las oscilaciones simétricas (fig. 84), el sistema de sustitución tiene dos grados de libertad:

$$EJ\delta_{11}=\frac{1}{2}\frac{l}{6}\frac{l}{6}\frac{2}{3}\frac{l}{6}+\frac{l}{3}\frac{l}{6}\frac{l}{6}=\frac{7l^3}{648};$$

$$EJ\delta_{12}=\frac{1}{2}\frac{l}{6}\frac{l}{6}\frac{2}{3}\frac{l}{6}+\frac{\left(\frac{l}{6}+\frac{l}{2}\right)}{2}\frac{l}{3}\frac{l}{6}=\frac{13l^3}{648};$$

$$EJ\delta_{22}=\frac{1}{2}\frac{l}{2}\frac{l}{2}\frac{2}{3}\frac{l}{2}=\frac{27l^3}{648}.$$

Compongamos la ecuación de frecuencias según (4.2):

$$D=\begin{vmatrix}(14u_i-1) & 13u_i\\ 12u_i & (27u_i-1)\end{vmatrix}=0, \qquad (d)$$

donde,

$$u_i = Ml^3\omega_i^2 : 1296EJ.$$

Abriendo el determinante y resolviendo la ecuación obtendremos:

$$u_i = (41 \mp 39) : 80.$$

Las frecuencias de oscilaciones son:

$$\omega_1^2=\frac{u_1 1296EJ}{Ml^3}=\frac{1296EJ}{40\frac{ml}{3}l^3}=\frac{3888EJ}{40ml^4};$$

$$\omega_2^2=\frac{3888EJ}{ml^4}.$$

Ellas coinciden con las calculadas anteriormente.

B) APLICACIÓN DE LOS DESPLAZAMIENTOS PARES DE GRUPO

El desplazamiento unitario de grupo en la oscilación antisimétrica (fig. 85) es,

$$EJ\delta_{11}=2\left(\frac{1}{2}\frac{l}{6}\frac{l}{9}\frac{2}{3}\frac{l}{9}+\frac{1}{2}\frac{l}{3}\frac{l}{9}\frac{2}{3}\frac{l}{9}\right)=\frac{l^3}{243}.$$

La frecuencia de las oscilaciones

$$\omega_2^2=1:\frac{M\delta_{11}}{2}=1458EJ : ml^4.$$

Los desplazamientos unitarios de grupo en las oscilaciones simétricas (fig. 86) son:

$$EJ\delta_{11}=\left(\frac{1}{2}\frac{l}{6}\frac{l}{6}\frac{2}{3}\frac{l}{6}\right)2+\frac{2}{3}l\frac{l}{6}\frac{l}{6}=\frac{28l^3}{1296};$$

$$EJ\delta_{12}=\left(\frac{1}{2}\frac{l}{6}\frac{l}{6}\frac{2}{3}\frac{l}{6}+\frac{\frac{l}{6}+\frac{l}{2}}{2}\frac{l}{3}\frac{l}{6}\right)2=\frac{52l^3}{1296};$$

$$EJ\delta_{22}=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\frac{l}{2}\frac{2}{3}\frac{l}{2}\right)2=\frac{l^3}{12}.$$

La ecuación de frecuencias según (4.2) coincidirá con (d):

$$D=\begin{vmatrix}\left(\frac{M}{2}\frac{28l^3}{1296EJ}\omega_i^2-1\right) & \frac{M}{4}\frac{52l^3}{1296EJ}\omega_i^2\\ \frac{M}{2}\frac{52l^3}{1296EJ}\omega_i^2 & \left(\frac{M}{4}\frac{l^3}{12EJ}\omega_i^2-1\right)\end{vmatrix}=0.$$

§ 34. CASO GENERAL DE ACCIÓN DE LAS FUERZAS SOBRE EL SISTEMA CON TRES GRADOS DE LIBERTAD. Si están dadas las fuerzas $P_1(t)$, $P_2(t)$ y $P_3(t)$ que actúan sobre las masas

(fig. 87), entonces podemos escribir según (3.100):

$$y_1(t) = y_{11}(t) + y_{12}(t) + y_{13}(t) =$$

$$= \frac{1}{\omega_1} \int_0^t \frac{P_1(u) + P_2(u)\,\rho_{21} + P_3(u)\,\rho_{31}}{m_1 + m_2\rho_{21}^2 + m_3\rho_{31}^2} \operatorname{sen} \omega_1 (t-u)\, du +$$

$$+ \frac{1}{\omega_2} \int_0^t \frac{P_1(u) + P_2(u)\,\rho_{22} + P_3(u)\,\rho_{32}}{m_1 + m_2\rho_{22}^2 + m_3\rho_{32}^2} \operatorname{sen} \omega_2 (t-u)\, du +$$

$$+ \frac{1}{\omega_3} \int_0^t \frac{P_1(u) + P_2(u)\,\rho_{23} + P_3(u)\,\rho_{33}}{m_1 + m_2\rho_{23}^2 + m_3\rho_{33}^2} \operatorname{sen} \omega_3 (t-u)\, du; \quad (4.48)$$

$$y_2(t) = y_{21}(t) + y_{22}(t) + y_{23}(t) = \rho_{21} y_{11}(t) +$$

$$+ \rho_{22} y_{12}(t) + \rho_{23} y_{13}(t); \quad (4.49)$$

$$y_3(t) = y_{31}(t) + y_{32}(t) + y_{33}(t) = \rho_{31} y_{11}(t) +$$

$$+ \rho_{32} y_{12}(t) + \rho_{33} y_{13}(t); \quad (4.50)$$

donde

$$\rho_{kl} = y_{kl} : y_{1l}.$$

Si están dados los desplazamientos $\Delta_{1p}(t)$, $\Delta_{2p}(t)$ y $\Delta_{3p}(t)$,

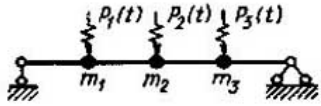


Fig. 87

entonces según (3.105) tenemos

$$y_1(t) = y_{11}(t) + y_{12}(t) + y_{13}(t) =$$

$$= \omega_1 \int_0^t \frac{\Delta_{1p}(u) + \Delta_{2p}(u)\frac{m_2}{m_1}\rho_{21} + \Delta_{3p}(u)\frac{m_3}{m_1}\rho_{31}}{1 + \frac{m_2}{m_1}\rho_{21}^2 + \frac{m_3}{m_1}\rho_{31}^2} \operatorname{sen} \omega_1 (t-u)\, du +$$

$$+ \omega_2 \int_0^t \frac{\Delta_{1p}(u) + \Delta_{2p}(u)\frac{m_2}{m_1}\rho_{22} + \Delta_{3p}(u)\frac{m_3}{m_1}\rho_{32}}{1 + \frac{m_2}{m_1}\rho_{22}^2 + \frac{m_3}{m_1}\rho_{32}^2} \operatorname{sen} \omega_2 (t-u)\, du +$$

$$+ \omega_3 \int_0^t \frac{\Delta_{1p}(u) + \Delta_{2p}(u)\frac{m_2}{m_1}\rho_{23} + \Delta_{3p}\frac{m_3}{m_1}\rho_{33}}{1 + \frac{m_2}{m_1}\rho_{23}^2 + \frac{m_3}{m_1}\rho_{33}^2} \operatorname{sen} \omega_3 (t-u)\, du. \quad (4.51)$$

Los desplazamientos $y_2(t)$ e $y_3(t)$ son determinados por las expresiones (4.49) y (4.50). En la expresión (4.51), por $\Delta_{ip}(u)$ pueden sobreentenderse también los desplazamientos debidos a los corrimientos de los enlaces $\Delta_{iA}(u)$.

§ 35. APLICACIÓN REPENTINA DE LAS FUERZAS A LAS TRES MASAS (FIG. 88). De acuerdo con las expresiones (4.48)—(4.50) obtenemos:

$$y_1(t) = y_{11}(t) + y_{12}(t) + y_{13}(t) =$$
$$= \frac{P_1 + P_2\rho_{21} + P_3\rho_{31}}{\omega_1^2 (m_1 + m_2\rho_{21}^2 + m_3\rho_{31}^2)} (1 - \cos\omega_1 t) +$$
$$+ \frac{P_1 + P_2\rho_{22} + P_3\rho_{32}}{\omega_2^2 (m_1 + m_2\rho_{22}^2 + m_3\rho_{32}^2)} (1 - \cos\omega_2 t) +$$
$$+ \frac{P_1 + P_2\rho_{23} + P_3\rho_{33}}{\omega_3^2 (m_1 + m_2\rho_{23}^2 + m_3\rho_{33}^2)} (1 - \cos\omega_3 t); \qquad (4.52)$$

$$y_2(t) = y_{21}(t) + y_{22}(t) + y_{23}(t) = \rho_{21}y_{11} + \rho_{22}y_{12} + \rho_{23}y_{13}; \qquad (4.53)$$

$$y_3(t) = y_{31}(t) + y_{32}(t) + y_{33}(t) = \rho_{31}y_{11} + \rho_{32}y_{12} + \rho_{33}y_{13}. \qquad (4.54)$$

Ejemplo 24. Escribir las ecuaciones de los desplazamientos de las masas, si sobre la masa central actúa repentinamente la fuerza P (fig. 89). En este caso $P_1 = 0$; $P_2 = P$; $P_3 = 0$.

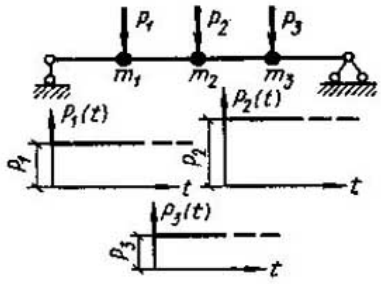


Fig. 88

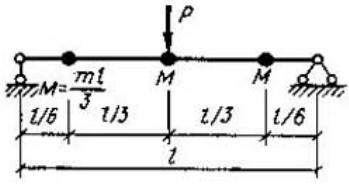


Fig. 89

Del ejemplo 23 se ve que $\rho_{21} = 2$; $\rho_{31} = 1$; $\rho_{22} = 0$; $\rho_{23} = -1$; $\rho_{32} = -1$; $\rho_{33} = 1$. Según las expresiones (4.52) — (4.54) tenemos

$$y_1(t) = \frac{P}{ml}\left(\frac{1-\cos\omega_1 t}{\omega_1^2} - \frac{1-\cos\omega_3 t}{\omega_3^2}\right) = y_3(t);$$

$$y_2(t) = \frac{2P}{ml}\left(\frac{1-\cos\omega_1 t}{\omega_1^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1-\cos\omega_3 t}{\omega_3^2}\right).$$

Vale señalar que como la fuerza $P_2 = P$ es simétrica, entonces el desplazamiento antisimétrico con la frecuencia ω_2 (véase el ejemplo 23) no ha entrado en los desplazamientos de las masas. Puesto que $\omega_3^2 = 3888\,EJ : ml^4$ es mucho más grande que $\omega_1^2 = 3888\,EJ : 40\,ml^4$, entonces podemos escribir aproxima-

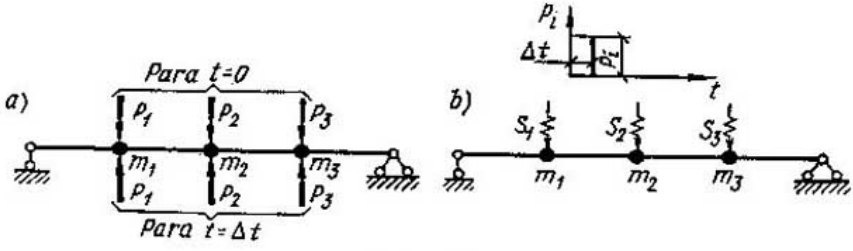


Fig. 90

damente así:

$$y_2(t) \approx \frac{2P}{ml} \frac{1-\cos \omega_1 t}{\omega_1^2};$$

$$y_{2,\,\text{máx}} \approx \frac{4P}{ml\omega_1^2} = \frac{4P}{ml\,(97{,}2EJ : ml^3)} = \frac{4Pl^3}{97{,}2EJ}$$

Tomando en consideración que $y_{\text{est}} = Pl^3 : 48EJ$, el coeficiente dinámico será:

$$\mu = 192 : 97{,}2 \approx 2.$$

El se aproxima al valor correspondiente en el sistema con un grado de libertad.

§ 36. APLICACIÓN REPENTINA DE LAS FUERZAS A LAS MASAS PARA $t = 0$ Y SU DESAPARICIÓN REPENTINA PARA $t = \Delta t$.

El movimiento de las masas para $t \leqslant \Delta t$ se determina mediante las expresiones (4.52) — (4.54). Para obtener las ecuaciones de movimiento de las masas para $t > \Delta t$, vamos a interpretar la desaparición de las fuerzas como la aplicación de las mismas fuerzas en el sentido inverso (fig. 90, *a*), lo que permitirá, según las expresiones (4.52) — (4.54), escribir:

$$y_1(t) = y_{11}(t) + y_{12}(t) + y_{13}(t) =$$

$$= \frac{P_1 + P_2\rho_{21} + P_3\rho_{31}}{\omega_1^2 (m_1 + m_2\rho_{21}^2 + m_3\rho_{31}^2)} \{(1 - \cos \omega_1 t) - [1 - \cos \omega_1 (t - \Delta t)]\} +$$

$$+ \frac{P_1 + P_2\rho_{22} + P_3\rho_{32}}{\omega_2^2 (m_1 + m_2\rho_{22}^2 + m_3\rho_{32}^2)} \{(1 - \cos \omega_2 t) - [1 - \cos \omega_2 (t - \Delta t)]\} +$$

$$+ \frac{P_1 + P_2\rho_{23} + P_3\rho_{33}}{\omega_3^2 (m_1 + m_2\rho_{23}^2 + m_3\rho_{33}^2)} \{(1 - \cos \omega_3 t) - [1 - \cos \omega_3 (t - \Delta t)]\}. \tag{4.55}$$

Representemos la misma expresión en la siguiente forma:

$$y_1(t) = y_{11}(t) + y_{12}(t) + y_{13}(t) =$$

$$= \frac{P_1 + P_2\rho_{21} + P_3\rho_{31}}{\omega_1^2 (m_1 + m_2\rho_{21}^2 + m_3\rho_{31})} 2 \operatorname{sen} \omega_1 \left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{\omega_1 \Delta t}{2} +$$

$$+ \frac{P_1 + P_2\rho_{22} + P_3\rho_{32}}{\omega_2^2 (m_1 + m_2\rho_{22}^2 + m_3\rho_{32}^2)} 2 \operatorname{sen} \omega_2 \left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{\omega_2 \Delta t}{2} +$$

$$+ \frac{P_1 + P_2\rho_{23} + P_3\rho_{33}}{\omega_3^2 (m_1 + m_2\rho_{23}^2 + m_3\rho_{33}^2)} 2 \operatorname{sen} \omega_3 \left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{\omega_3 \Delta t}{2}. \tag{4.56}$$

Los desplazamientos de las demás masas se determinan según (4.49) y (4.50).

Si el tiempo Δt es breve, cuando es posible sustituir, evitando grandes errores, sen $\omega_i\,(\Delta t/2)$ por $\omega_i\,(\Delta t/2)$, entonces la expresión (4.56) se simplificará aún más:

$$y_1(t) = y_{11}(t) + y_{12}(t) + y_{13}(t) =$$
$$= \frac{(P_1 + P_2\rho_{21} + P_3\rho_{31})\,\Delta t}{\omega_1 (m_1 + m_2\rho_{21}^2 + m_3\rho_{31}^2)} \operatorname{sen} \omega_1 \left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) +$$
$$+ \frac{(P_1 + P_2\rho_{22} + P_3\rho_{32})\,\Delta t}{\omega_2 (m_1 + m_2\rho_{22}^2 + m_3\rho_{32}^2)} \operatorname{sen} \omega_2 \left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) +$$
$$+ \frac{(P_1 + P_2\rho_{23} + P_3\rho_{33})\,\Delta t}{\omega_3 (m_1 + m_2\rho_{23}^2 + m_3\rho_{33}^2)} \operatorname{sen} \omega_3 \left(t - \frac{\Delta t}{2}\right). \qquad (4.57)$$

Si se supone que $P_1 dt = S_1$, $P_2 dt = S_2$ y $P_3 dt = S_3$, entonces a partir de la expresión (4.57) obtendremos para $\Delta t \to 0$ la ecuación de movimiento de la masa m_1 debido a los impulsos (fig. 90, *b*):

$$y_1(t) = y_{11}(t) + y_{12}(t) + y_{13}(t) = \frac{S_1 + S_2\rho_{21} + S_3\rho_{31}}{\omega_1 (m_1 + m_2\rho_{21}^2 + m_3\rho_{31}^2)} \operatorname{sen} \omega_1 t +$$
$$+ \frac{S_1 + S_2\rho_{22} + S_3\rho_{32}}{\omega_2 (m_1 + m_2\rho_{22}^2 + m_3\rho_{32}^2)} \operatorname{sen} \omega_2 t + \frac{S_1 + S_2\rho_{23} + S_3\rho_{33}}{\omega_3 (m_1 + m_2\rho_{23}^2 + m_3\rho_{33}^2)} \operatorname{sen} \omega_3 t. \qquad (4.58)$$

Huelga señalar que disponiendo de la solución sobre la acción del impulso se puede hallar la solución para el caso general de acción de las fuerzas $P_1(t)$, $P_2(t)$ y $P_3(t)$, tal como se ha hecho en el sistema con dos grados de libertad (véase el § 30).

§ 37. ACCIÓN DE LA CARGA VIBRATORIA P sen θt SOBRE EL SISTEMA CON TRES GRADOS DE LIBERTAD SIN CONSIDERAR LA RESISTENCIA. Las ecuaciones canónicas del método de fuerzas según (3.116) son:

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{11}^* J_1^* + \delta_{12} J_2^* + \delta_{13} J_3^* + \Delta_{1p} \operatorname{sen} \theta t = 0; \\ &\delta_{21} J_1^* + \delta_{22}^* J_2^* + \delta_{23} J_3^* + \Delta_{2p} \operatorname{sen} \theta t = 0; \\ &\delta_{31} J_1^* + \delta_{32} J_2^* + \delta_{33}^* J_3^* + \Delta_{3p} \operatorname{sen} \theta t = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (4.59)$$

donde,

$$\delta_{ii}^* = \delta_{ii} - \frac{1}{m_i \theta^2}.$$

De aquí

$$J_1^* = D_1 : D; \quad J_2^* = D_2 : D \quad \text{y} \quad J_3^* = D_3 : D, \qquad (4.60)$$

siendo

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11}^* & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22}^* & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33}^* \end{vmatrix}. \qquad (4.61)$$

Los determinantes D_1, D_2, D_3 se obtienen a partir del determinante (4.61) sustituyendo las columnas correspondientes por los términos independientes con signo inverso. Las ecuaciones canónicas del método de desplazamientos son:

$$\left.\begin{aligned}
&(r_{11} - m_1\theta^2)\, y_1\ (t) + r_{12} y_2\ (t) + r_{13} y_3\ (t) + R_{1p} \operatorname{sen} \theta t = 0;\\
&r_{21} y_1\ (t) + (r_{22} - m_2\theta^2)\, y_2\ (t) + r_{23} y_3\ (t) + R_{2p} \operatorname{sen} \theta t = 0;\\
&r_{31} y_1\ (t) + r_{32} y_2\ (t) + (r_{33} - m_3\theta^2)\, y_3\ (t) + R_{3p} \operatorname{sen}\ \theta t = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.62)$$

De aquí se desprende:

$$y_1\ (t) = D_1^* : D^*;\ \ y_2\ (t) = D_2^* : D^*;\ \ y_3\ (t) = D_3^* : D^*, \qquad (4.63)$$

donde,

$$D^* = \begin{vmatrix} (r_{11} - m_1\theta^2) & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & (r_{22} - m_2\theta^2) & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & (r_{33} - m_3\theta^2) \end{vmatrix}. \qquad (4.64)$$

Los determinantes D_1^*, D_2^* y D_3^* se obtienen del (4.64) sustituyendo las columnas correspondientes por los términos independientes con signo inverso. En este caso las fuerzas de inercia se hallan por medio de los desplazamientos [véase (3.120)]. Las fuerzas internas del sistema se determinan a partir de la expresión (3.128). Señalemos también aquí que, al coincidir la frecuencia θ de la carga que acciona con la de oscilaciones libres, tiene lugar la resonancia.

§ 38. ALGUNAS APLICACIONES TÉCNICAS DE LA TEORÍA DE LAS OSCILACIONES DE SISTEMAS CON DOS Y TRES GRADOS DE LIBERTAD

TEORÍA DE LA AMORTIGUACIÓN DE VIBRACIONES

Las frecuencias de oscilaciones libres y los movimientos forzados del sistema dependen del valor de las masas y de las características elásticas del sistema, variando las cuales, al igual que añadiendo nuevas masas sobre enlaces elásticos, se pueden lograr a veces resultados deseables, por ejemplo, en forma de disminución de tales o cuales tipos de oscilaciones.

Examinemos un sistema con dos grados de libertad (fig. 91) sujeto a la acción de las fuerzas vibratorias P_1 sen θt y P_2 sen θt aplicadas a las masas m_1 y m_2, respectivamente. Supongamos que las rigideces de los muelles elásticos (en N/m) son: c_1, la del muelle que une la masa m_1 con la base; c_2, la del muelle que une la masa m_1 con la m_2.

Solución según el método de desplazamientos. El sistema básico se da en la fig. 92. Las ecuaciones canónicas (3.130):

$$\left.\begin{aligned}
&(r_{11} - m_1\theta^2)\, y_1\ (t) + r_{12} y_2\ (t) + R_{1p} \operatorname{sen} \theta t = 0;\\
&r_{21} y_1\ (t) + (r_{22} - m_2\theta^2)\, y_2\ (t) + R_{2p} \operatorname{sen} \theta t = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.65)$$

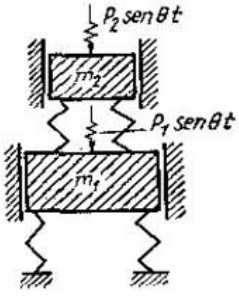


Fig. 91

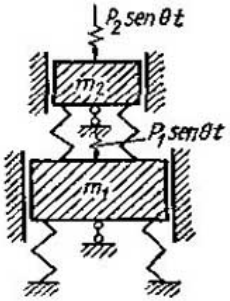


Fig. 92

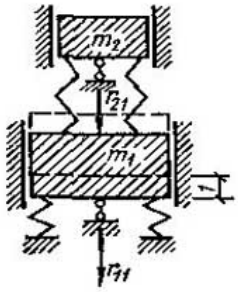


Fig. 93

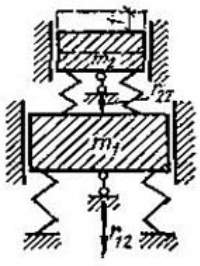


Fig. 94

Consideramos positivos los desplazamientos $y_1(t)$ e $y_2(t)$ hacia abajo. En relación con esto, las reacciones en las barras introducidas del sistema básico son positivas si las barras están traccionadas. Los desplazamientos unitarios se muestran en las figs. 93 y 94. Partiendo de éstos tenemos: $r_{11} = c_1 + c_2$; $r_{21} = -c_2$; $r_{22} = c_2$. A base del estado de carga (fig. 92) obtenemos:

$$R_{1p} = -P_1 \text{ y } R_{2p} = -P_2.$$

Ahora las ecuaciones canónicas (4.65) serán así:

$$\left.\begin{aligned} (c_1 + c_2 - m_1\theta^2)\, y_1(t) - c_2 y_2(t) - P_1 \operatorname{sen} \theta t = 0; \\ -c_2 y_1(t) + (c_2 - m_2\theta^2)\, y_2(t) - P_2 \operatorname{sen} \theta t = 0. \end{aligned}\right\} \quad (4.66)$$

Resolviéndolas en forma general tendremos:

$$y_1(t) = \frac{P_1 \operatorname{sen} \theta t\,(c_2 - m_2\theta^2) + c_2 P_2 \operatorname{sen} \theta t}{(c_1 + c_2 - m_1\theta^2)(c_2 - m_2\theta^2) - c_2^2}; \quad (4.67)$$

$$y_2(t) = \frac{(c_1 + c_2 - m_1\theta^2) P_2 \operatorname{sen} \theta t + c_2 P_1 \operatorname{sen} \theta t}{(c_1 + c_2 - m_1\theta^2)(c_2 - m_2\theta^2) - c_2^2}. \quad (4.68)$$

Si se exige que para $P_2 = 0$ no haya oscilaciones de la masa m_1, entonces es necesario satisfacer la condición

$$c_2 - m_2\theta^2 = 0. \quad (4.69)$$

Mas en este caso las oscilaciones de la masa m_2 serán

$$y_2(t) = -P_1 \operatorname{sen} \theta t : c_2. \quad (4.70)$$

La masa m_2, que satisface la condición (4.69), unida por un muelle a la masa m_1, es el amortiguador de las oscilaciones de la masa m_1, la que se utiliza en la práctica. En este caso la masa m_2 no debe tener grandes oscilaciones.

Está claro que todos los razonamientos son justos sólo para una frecuencia determinada θ de la carga que actúa. Para otra frecuencia, la igualdad (4.69) se alterará y la masa m_2 pierde la propiedad de amortiguador de oscilaciones.

Si se exige análogamente que para $P_1 = 0$ no haya oscilaciones de la masa m_2, entonces hay que cumplir la condición

$$c_1 + c_2 - m_1\theta^2 = 0; \tag{4.71}$$

siendo

$$y_1(t) = -P_2 \operatorname{sen} \theta t : c_2. \tag{4.72}$$

En este caso la masa m_1 es el amortiguador de las oscilaciones de la masa m_2.

OSCILACIONES DE LOS CIMIENTOS

Examinemos las oscilaciones planas de un cimiento sobre la base elástica (fig. 95), cuyas características se determinan mediante los

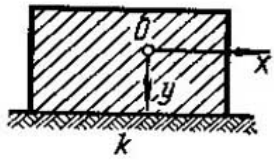


Fig. 95

siguientes coeficientes (en N/m³): c_y, para los desplazamientos verticales; c_x, para los desplazamientos horizontales; c_M, para el giro del cimiento.

Situemos en el centro de gravedad de la masa del cimiento m los ejes de coordenadas x e y, y asignemos:
$y_1(t) = u$ es el desplazamiento de avance respecto al eje x;
$y_2(t) = v$, el desplazamiento de avance respecto al eje y;
$y_3(t) = \alpha$, el giro del cimiento alrededor del eje z.

Así pues, las oscilaciones planas del cimiento no son sino los movimientos del sistema con tres grados de libertad. Como el tercer desplazamiento es angular, es necesario en vez de la masa m_3 considerar su momento de inercia.

a) Oscilaciones libres. Las ecuaciones canónicas según (4.42) son:

$$\left.\begin{aligned} &(m_1\delta_{11}\omega_i^2 - 1)\,u + m_2\delta_{12}\omega_i^2 v + J_m\delta_{13}\omega_i^2\alpha = 0;\\ &m_1\delta_{21}\omega_i^2 u + (m_2\delta_{22}\omega_i^2 - 1)\,v + J_m\delta_{23}\omega_i^2\alpha = 0;\\ &m_1\delta_{31}\omega_i^2 u + m_2\delta_{32}\omega_i^2 v + (J_m\delta_{33}\omega_i^2 - 1)\,\alpha = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.73}$$

donde $m_1 = m_2 = m$.

Su determinante lo igualamos a cero,

$$D = \begin{vmatrix} (m_1\delta_{11}\omega_i^2 - 1) & m_2\delta_{12}\omega_i^2 & J_m\delta_{13}\omega_i^2 \\ m_1\delta_{21}\omega_i^2 & (m_2\delta_{22}\omega_i^2 - 1) & J_m\delta_{23}\omega_i^2 \\ m_1\delta_{31}\omega_i^2 & m_2\delta_{32}\omega_i^2 & (J_m\delta_{33}\omega_i^2 - 1) \end{vmatrix} = 0. \tag{4.74}$$

Desarrollándolo obtendremos la ecuación de frecuencias.

b) Oscilaciones forzadas para la carga vibratoria P sen θt. Las ecuaciones canónicas según (3.123) son:

$$\left.\begin{aligned}
&(m_1\delta_{11}\theta^2 - 1)\,u + m_2\delta_{12}\theta^2 v + J_m\delta_{13}\theta^2\alpha + \Delta_{up}\operatorname{sen}\theta t = 0;\\
&m_1\delta_{21}\theta^2 u + (m_2\delta_{22}\theta^2 - 1)\,v + J_m\delta_{23}\theta^2\alpha + \Delta_{vp}\operatorname{sen}\theta t = 0;\\
&m_1\delta_{31}\theta^2 u + m_2\delta_{32}\theta^2 v + (J_m\delta_{33}\theta^2 - 1)\,\alpha + \Delta_{\alpha p}\operatorname{sen}\theta t = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.75)$$

De aquí se desprende:

$$u = D_u : D; \quad v = D_v : D \quad \text{y} \quad \alpha = D_\alpha : D, \qquad (4.76)$$

donde,

$$D = \begin{vmatrix} (m_1\delta_{11}\theta^2 - 1) & m_2\delta_{12}\theta^2 & J_m\delta_{13}\theta^2 \\ m_1\delta_{21}\theta^2 & (m_2\delta_{22}\theta^2 - 1) & J_m\delta_{23}\theta^2 \\ m_1\delta_{31}\theta^2 & m_2\delta_{32}\theta^2 & (J_m\delta_{33}\theta^2 - 1) \end{vmatrix}. \qquad (4.77)$$

Los determinantes D_u, D_v y D_α se obtienen a partir de (4.77), si en éste se sustituyen, respectivamente, las columnas por los términos independientes (4.75) con signo inverso. Los coeficientes de las ecuaciones canónicas para la base elástica se determinan según la fórmula

$$\delta_{km} = \frac{\overline{N}_k\overline{N}_m}{c_y F_{\text{cim}}} + \frac{\overline{Q}_k\overline{Q}_m}{c_x F_{\text{cim}}} + \frac{\overline{M}_k\overline{M}_m}{c_M J_{\text{cim}}}, \qquad (4.78)$$

siendo $\overline{N}_k$ y $\overline{N}_m$, $\overline{Q}_k$ y $\overline{Q}_m$, $\overline{M}_k$ y $\overline{M}_m$, respectivamente, las fuerzas perpendiculares a la base de cimentación N, las fuerzas tangenciales Q y los momentos M respecto al eje z_1 que pasa a través del centro de gravedad de la base de cimentación perpendicularmente al plano, provocadas por las fuerzas (o momentos) $P_k = 1$ y $P_m = 1$. Estas fuerzas o momentos unitarios están aplicados en el centro de gravedad de la masa del cimiento en dirección de los desplazamientos k y m; F_{cim}, es el área de la base de cimentación; J_{cim}, el momento de inercia de la base del cimiento respecto al eje señalado z_1.

Los términos independientes de las ecuaciones (4.75) se hallan según la fórmula

$$\Delta_{kp} = \overline{N}_k\frac{N_p}{c_y F_{\text{cim}}} + \overline{Q}_k\frac{Q_p}{c_x F_{\text{cim}}} + M_k\frac{M_p}{c_M J_{\text{cim}}}. \qquad (4.79)$$

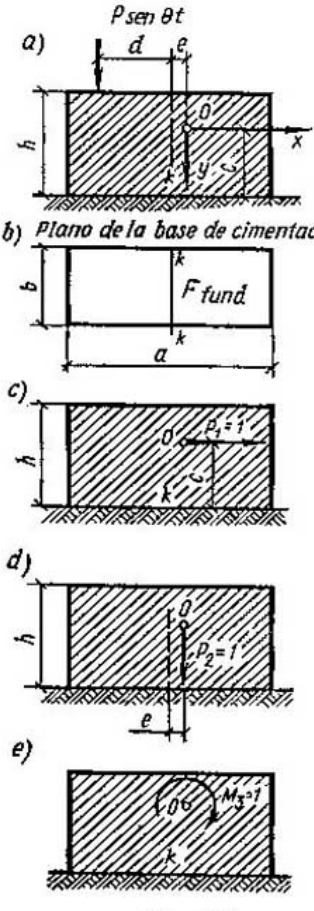


Fig. 96

En esta fórmula N_p, Q_p y M_p son, respectivamente, las fuerzas perpendicular y tangencial a la base del cimiento y el momento respecto al eje z_1 debido a la carga.

Mostremos la aplicación de las fórmulas (4.78) y (4.79) en el ejemplo del cimiento representado en la fig. 96, *a*, *b*, donde el punto *O* es el centro de gravedad de la masa del cimiento.

Tenemos lo siguiente:

1) debido a $P_1 = 1$; $\bar{N}_1 = 0$, $\bar{Q}_1 = 1$;
2) debido a $P_2 = 1$, $\bar{N}_2 = 1$, $\bar{Q}_2 = 0$;
3) debido a $M_3 = 1$, $\bar{N}_3 = 0$, $\bar{Q}_3 = 0$;
4) debido a P sen θt, $N_p = P$ sen θt, $Q_p = 0$;
1) $\bar{M}_1 = 1c$; (fig. 96, *c*)
2) $\bar{M}_2 = 1e$; (fig. 96, *d*)
3) $\bar{M}_3 = 1$; (fig. 96, *e*)
4) $M_p = -P$ sen θ *td*. (fig. 96, *a*)

Según la fórmula (4.78), tenemos:

$$\delta_{11} = \frac{1}{c_x F_{\text{cim}}} + \frac{c^2}{c_M J_{\text{cim}}}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{ce}{c_M J_{\text{cim}}}; \quad \delta_{13} = \delta_{31} = \frac{c}{c_M J_{\text{cim}}};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{c_y F_{\text{cim}}} + \frac{e^2}{c_M J_{\text{cim}}}; \quad \delta_{23} = \delta_{32} = \frac{e}{c_M J_{\text{cim}}}; \quad \delta_{33} = \frac{1}{c_M J_{\text{cim}}};$$

$$\Delta_{1p} = \frac{-cP \text{ sen } \theta \, td}{c_M J_{\text{cim}}}; \quad \Delta_{2p} = \frac{P \text{ sen } \theta t}{c_y F_{\text{cim}}} - \frac{eP \text{ sen } \theta \, td}{c_M J_{\text{cim}}}; \quad \Delta_{3p} = -\frac{P \text{ sen } \theta \, td}{c_M J_{\text{cim}}}.$$

Aquí $F_{\text{cim}} = ab$ y $J_{\text{cim}} = ba^3 : 12$.

El cálculo dado del cimiento es *bastante aproximado*, puesto que el modelo de la base elástica es bastante convencional. Además, no se considera la masa del terreno, puesta en movimiento durante las oscilaciones de la cimentación.

CAPÍTULO 5 ❋ SISTEMAS CON UN NÚMERO INFINITO DE GRADOS DE LIBERTAD

§ 39. ECUACIONES DIFERENCIALES DE MOVIMIENTO DURANTE LOS DESPLAZAMIENTOS TRANSVERSALES DE VIGAS (BARRAS) RECTAS. La viga con masa distribuida representa un sistema con un número infinito de grados de libertad, llamado también sistema con grado infinito de libertad. Su posición en cualquier momento de tiempo se determina por la línea elástica, la cual para las cargas dinámicas es función de dos variables: la coordenada de la sección z y el tiempo t, es decir,

$$y = f(z, t).$$

La dependencia diferencial entre la curvatura de la línea elástica y el momento flector para las flechas positivas de la viga hacia abajo tiene, como es sabido, la siguiente forma:

$$EJ(z)\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -M(z, t).$$

Diferenciamos esta expresión dos veces:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[EJ(z)\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right] = -\frac{\partial^2 M}{\partial z^2} = -p(z, t), \qquad (5.1)$$

donde $p(z, t)$ es la carga transversal que acciona sobre la viga, cuya dirección positiva se considera hacia arriba.

Durante el movimiento de la viga, la carga distribuida $p(z, t)$ consta, en el caso general, de los siguientes tipos de cargas (fig. 97):

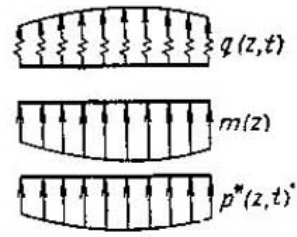


Fig. 97

1) de la carga activa dada, con una intensidad de $q(z, t)$;

2) de las fuerzas de inercia, con una intensidad de $m(z)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ dirigidas hacia arriba, si se prescinde de los desplazamientos longitudinales de las secciones, de sus giros y deslizamientos;

3) de las fuerzas de resistencia al movimiento dirigidas hacia arriba con una intensidad de $p^*(z, t)$:

$$p(z, t) = q(z, t) + m(z)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + p^*(z, t). \qquad (5.2)$$

Introduciendo (5.2) en (5.1) obtendremos,

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[EJ(z)\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right] + m(z)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + p^*(z, t) = -q(z, t). \qquad (5.3)$$

Precisamente esta ecuación será la ecuación diferencial de movimiento de la viga en forma general. Ella es lineal con coeficientes variables que no dependen de la carga que actúa. Por lo tanto, para examinar el movimiento $y(z, t)$ puede ser aplicado el principio de superposición de las fuerzas.

Obtendremos a partir de (5.3) la ecuación diferencial de oscilaciones libres suponiendo que $q(z, t) = 0$:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[EJ(z)\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right] + m(z)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + p^*(z, t) = 0. \qquad (5.4)$$

Si la rigidez de la viga EJ es constante, y la masa $m(z)$ es variable, entonces las ecuaciones (5.3) y (5.4) serán:

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + m(z)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + p^*(z, t) = -q(z, t); \qquad (5.5)$$

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + m(z)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + p^*(z, t) = 0. \qquad (5.6)$$

Si la masa es constante, hay que considerar en estas ecuaciones $m(z) = m$.

Si se adopta que $m(z)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + p^*(z, t) = cy(z, t)$, entonces según (5.3)

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[EJ(z)\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right] + cy(z, t) = -q(z, t). \tag{5.7}$$

Esta ecuación coincide por la forma con la ecuación de la viga sobre una base elástica, cuya característica es

$$c = \left[m(z)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + p^*(z, t)\right] : y(z, t). \tag{5.8}$$

Por consiguiente, el problema dinámico puede sustituirse por el problema estático introduciendo la base elástica con la característica según (5.8).

En los casos cuando $y(z, t) = y(z)\,\text{sen}\,(\theta t + \varphi)$ y $p^*(z, t) = 0$,

$$c = -m(z)\,\theta^2. \tag{5.9}$$

La característica negativa de la base elástica muestra que sus reacciones están dirigidas hacia el lado del desplazamiento.

§ 40. OSCILACIONES LIBRES DE LA VIGA CONSIDERANDO Y SIN CONSIDERAR LA RESISTENCIA. Examinemos la ecuación diferencial de oscilaciones libres (5.4)

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[EJ(z)\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right] + m(z)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + p^*(z, t) = 0.$$

Busquemos su resolución en la siguiente forma:

$$y(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(z)\,\Phi_k(t). \tag{5.10}$$

Hagamos también una suposición de que

$$p^*(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k^*(z, t). \tag{5.11}$$

Sustituyendo los valores de (5.10) y (5.11) en la ecuación inicial obtendremos lo siguiente:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[EJ(z)\sum_{k=1}^{\infty} y_k''(z)\,\Phi_k(t)\right] + m(z)\sum_{k=1}^{\infty} y_k(z)\,\ddot{\Phi}_k(t) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} p_k^*(z, t) = 0. \tag{5.12}$$

Igualamos a cero los sumandos con un mismo signo

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}[EJ(z)\,y_k''(z)\,\Phi_k(t)] + m(z)\,y_k(z)\,\ddot{\Phi}_k(t) + p_k^*(z, t) = 0.$$

Dividamos esta expresión por $m(z)\, y_k(z)\, \Phi_k(t)$ y representémosla así:

$$\frac{\frac{\partial^2}{\partial z^2}[EJ(z)\, y_k''(z)]}{m(z)\, y_k(z)} = -\frac{\ddot{\Phi}_k(t)}{\Phi_k(t)} - \frac{p_k^*(z,\ t)}{m(z)\, y_k(z)\, \Phi_k(t)}. \qquad (5.13)$$

De la igualdad obtenida se ve que la división de las variables es posible en los tres casos siguientes:

1) si $\frac{p_k^*(z,\ t)}{m(z)\, y_k(z)}$ no depende de z;

2) si $\frac{p_k^*(z,\ t)}{\Phi_k(t)}$ no depende de t;

3) si $\frac{p_k^*(z,\ t)}{m(z)\, y_k(z)\, \Phi_k(t)}$ es constante.

Consideremos *aproximadamente*, igual que antes, que la resistencia es proporcional a la masa de la viga y a la velocidad:

$$p_k^*(z,\ t) = 2\alpha_k m(z) \frac{\partial y_k}{\partial t} = 2\alpha_k m(z)\, y_k(z)\, \dot{\Phi}_k(t). \qquad (5.14)$$

Esto conducirá en la ecuación (5.13) a la separación de las variables:

$$\frac{\frac{\partial^2}{\partial z^2}[EJ(z)\, y_k''(z)]}{m(z)\, y_k(z)} = -\frac{\ddot{\Phi}_k(t)}{\Phi_k(t)} - 2\alpha_k \frac{\dot{\Phi}_k(t)}{\Phi_k(t)}. \qquad (5.15)$$

Su primer miembro no depende de t, ni tampoco el segundo de z, lo que permite igualar cada uno de ellos a una magnitud constante designada por ω_k^2. Acto seguido, obtendremos a partir de (5.15) dos ecuaciones independientes.

$$1)\ \ddot{\Phi}_k(t) + 2\alpha_k \dot{\Phi}_k(t) + \omega_k^2 \Phi_k(t) = 0. \qquad (5.16)$$

Véase su integral en (2.29):

$$\Phi_k(t) = e^{-\alpha_k t}(A_k \operatorname{sen} \bar{\omega}_k t + B_k \cos \bar{\omega}_k t) = e^{-\alpha_k t} C_k \operatorname{sen}(\bar{\omega}_k t + \varphi_k), \qquad (5.17)$$

donde

$$\bar{\omega}_k = \sqrt{\omega_k^2 - \alpha_k^2}.$$

De aquí se desprende que las oscilaciones propias $y_k(z,\ t)$ se realizan según una ley armónica amortiguada con la frecuencia $\bar{\omega}_k$, y que la magnitud constante introducida ω_k es la frecuencia de oscilaciones propias sin considerar las resistencias.

$$2)\ [EJ(z)\, y_k''(z)]'' - m(z)\, y_k(z)\, \omega_k^2 = 0. \qquad (5.18)$$

Esta es la ecuación diferencial de la forma fundamental de oscilaciones $y_k(z)$ que corresponde a la frecuencia ω_k con los coeficientes variables.

Si la sección de la viga es constante (EJ = const), la ecuación será

$$EJy_k^{IV}(z) - m(z)\, y_k(z)\, \omega_k^2 = 0. \tag{5.19}$$

Si también la masa es constante, entonces la ecuación será aún más simple:

$$y_k^{IV}(z) - s_k^4 y_k(z) = 0, \tag{5.20}$$

donde

$$s_k^4 = m\omega_k^2 : EJ\ (1/\text{cm})^4. \tag{5.21}$$

Si la resistencia al movimiento no se toma en consideración, es necesario considerar en (5.16) y (5.17) que $\alpha_k = 0$. Las demás ecuaciones se conservan en la forma anterior.

Si en (5.14) se adopta que $\alpha_k = \alpha$ const, entonces la resistencia total según (5.11) será la siguiente:

$$p^*(z,\ t) = 2\alpha m(z) \sum_{k=1}^{\infty} y_k(z)\, \dot{\Phi}_k(t) = 2\alpha m(z) \frac{\partial y}{\partial t}. \tag{5.22}$$

§ 41. ORTOGONALIDAD DE LAS FORMAS PRINCIPALES. Mostremos que las formas principales determinadas por la ecuación (5.18) poseen la propiedad de ortogonalidad. Con este propósito escribamos la ecuación diferencial de la línea elástica de la viga de sección variable en la flexión transversal:

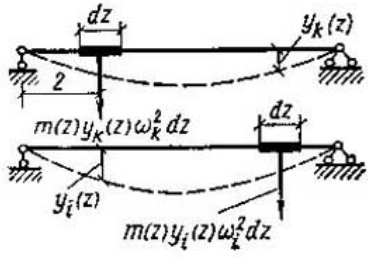


Fig. 98

$$\frac{d^2}{dz^2}\left[EJ(z)\frac{d^2y}{dz^2}\right] = -q(z). \tag{5.23}$$

Comparando esta ecuación con (5.18) llegamos a la conclusión de que las que actúan sobre la viga con la carga $q(z)$ durante las oscilaciones libres son las fuerzas de inercia $m(z)\, y_k(z)\, \omega_k^2$ dirigidas hacia abajo.

Ahora examinemos dos formas principales de oscilaciones: la k-ésima con la frecuencia ω_k y la i-ésima con la frecuencia ω_i (fig. 98). Las cargas exteriores que actúan, que son las fuerzas de inercia, están indicadas en el plano.

Apliquemos el teorema de reciprocidad de trabajos de las fuerzas exteriores:

$$\int m(z)\, y_k(z)\, \omega_k^2\, dz y_i(z) = \int m(z)\, y_i(z)\, \omega_i^2\, dz y_k(z). \tag{5.24}$$

Como en el caso general $\omega_k^2 \neq \omega_i^2$, entonces la igualdad (5.24) sólo es posible cuando

$$\int m(z)\, y_k(z)\, y_i(z)\, dz = 0. \tag{5.25}$$

Precisamente ésta es la propiedad de ortogonalidad de las formas principales. Ella se utiliza, como veremos más adelante, para la descomposición respecto a las formas principales de la carga que actúa y de los desplazamientos. Las series obtenidas en este caso, como está mostrado en [9], son convergentes. Tales descomposiciones se emplean al calcular la viga a la carga transversal que varía en el tiempo según cualquiera ley.

Si la viga, además de la masa distribuida, tiene masas concentradas, entonces, siguiendo los mismos propósitos obtendremos la propiedad de ortogonalidad en la siguiente forma:

$$\int m(z)\, y_k(z)\, y_l(z)\, dz + \sum_{\substack{\text{resp. a}\\ \text{masas}\\ \text{concent.}}} m_i y_k(z_i)\, y_i(z_i) = 0. \qquad (5.26)$$

§ 42. DESCOMPOSICIÓN DE LA CARGA RESPECTO A LAS FORMAS PRINCIPALES. Supongamos que

$$q(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t)\, m(z)\, y_k(z). \qquad (5.27)$$

Dejemos el trabajo de la carga dada $q(z, t)$ y sus descomposiciones según (5.27) en los desplazamientos de la k-ésima forma principal $y_k(z)$

$$\int q(z, t)\, y_k(z)\, dz = \int y_k(z) \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t)\, m(z)\, y_k(z)\, dz.$$

Para aclarar los razonamientos, representemos el segundo miembro de la igualdad en la forma desarrollada:

$$\int q(z, t)\, y_k(z)\, dz = \int y_k(z)\, [q_1(t)\, m(z)\, y_1(z) +$$
$$+ q_2(t)\, m(z)\, y_2(z) + \ldots + q_k(t)\, m(z)\, y_k(z) + \ldots +$$
$$+ q_n(t)\, m(z)\, y_n(z) + \ldots + \ldots]\, dz.$$

Puesto que $q_i(t)$ de cada sumando del segundo miembro puede sacarse fuera del signo de la integral, entonces de acuerdo con la propiedad de ortogonalidad (5.25) todas las integrales, con una excepción, se convierten en cero, y por lo tanto

$$\int q(z, t)\, y_k(z)\, dz = q_k(t) \int m(z)\, y_k^2(z)\, dz.$$

De aquí se obtiene la fórmula para determinar los coeficientes de descomposición (5.27):

$$q_k(t) = \frac{\int q(z, t)\, y_k(z)\, dz}{\int m(z)\, y_k^2(z)\, dz}. \qquad (5.28)$$

El numerador de esta expresión puede considerarse convencionalmente como la obtención de cierta magnitud debida a la carga distribuida $q\,(z,\ t)$ respecto a la línea de influencia determinada por la ecuación $y_k\,(z)$. Esto permite, análogamente a la «carga» de las líneas de influencia, escribir de inmediato $q_k\,(t)$ al actuar las fuerzas concentradas P_i, cuyas coordenadas de acción son z_i:

$$q_k\,(t) = \frac{\sum\limits_{\substack{\text{fuerzas}\\ \text{concent.}}} P_i\,(t)\,y_k\,(z_i)}{\int m\,(z)\,y_k^2\,(z)\,dz}. \qquad (5.29)$$

Al actuar simultáneamente la carga distribuida y las fuerzas concentradas, tenemos

$$q_k\,(t) = \frac{\int q\,(z,\ t)\,y_k\,(z)\,dz + \sum\limits_{\substack{\text{fuerzas}\\ \text{concent.}}} P_i\,(t)\,y_k\,(z_i)}{\int m\,(z)\,y_k^2\,(z)\,dz}. \qquad (5.30)$$

Ahora la expresión (5.27) puede escribirse así:

$$q\,(z,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} m\,(z)\,y_k\,(z)\,\frac{\int q\,(z,\ t)\,y_k\,(z)\,dz + \sum P_i\,(t)\,y_k\,(z_i)}{\int m\,(z)\,y_k^2\,(z)\,dz}. \qquad (5.31)$$

De aquí se desprende que la igualdad no varía si $y_k\,(z)$ se multiplica por cualquier número arbitrario. Esto permite emplear las llamadas formas principales normadas $\overline{y}_k\,(z)$ que satisfacen convencionalmente a

$$\int m\,(z)\,\overline{y}_k^2\,(z)\,dz = 1.$$

Utilizando las formas principales normadas, la fórmula (5.31) tendrá la siguiente expresión:

$$q\,(z,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} m\,(z)\,\overline{y}_k\,(z)\left[\int q\,(z,\ t)\,\overline{y}_k\,(z)\,dz + \sum P_i\,(t)\,\overline{y}_k\,(z_i)\right]. \qquad (5.32)$$

Ejemplo 25. Descomponer respecto a las formas principales de oscilaciones de la viga sobre dos apoyos la carga uniforme que actúa sobre dicha viga. La

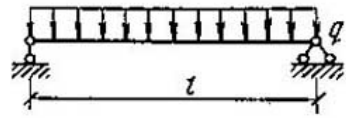


Fig. 99

masa de la viga es constante por la longitud. Las formas principales (fig. 99) de oscilaciones de tal viga [véase (6.6)] son determinadas por la ecuación

$$y_k\,(z) = \operatorname{sen}\frac{k\pi z}{l}.$$

Según la fórmula (5.28) para la carga dirigida hacia abajo tenemos:

$$q_k(t) = \frac{\int_0^l -q \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l}\, dz}{\int_0^l m \operatorname{sen}^2 \frac{k\pi z}{l}\, dz} = \frac{-2q(1-\cos k\pi)}{mk\pi}.$$

Por consiguiente, la carga q puede descomponerse en una serie infinita (5.27) respecto a las formas principales:

$$q = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2q(1-\cos k\pi)}{k\pi} \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l}. \tag{5.33}$$

§ 43. CASO GENERAL DE ACCIÓN DE LA CARGA $q(z, t)$ SOBRE LA VIGA. Escribamos la ecuación diferencial de movimiento con las fuerzas de resistencia según (5.3):

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[EJ(z)\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right] + m(z)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + P^*(z, t) = -q(z, t). \tag{5.34}$$

Supongamos que

$$y(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(z) F_k(t); \tag{5.35}$$

$$\left.\begin{aligned} q(z, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t)\, m(z)\, y_k(z); \\ P^*(z, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} P_k(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\alpha_k m(z) \frac{\partial y_k(z)}{\partial t} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\alpha_k m(z)\, y_k(z)\, \dot{F}_k(t). \end{aligned}\right\} \tag{5.36}$$

Sustituyendo uno a uno los sumandos en (5.34) tenemos:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}[EJ(z)\, y_k''(z)\, F_k(t)] + m(z)\, y_k(z)\, \ddot{F}_k(t) +$$

$$+ 2\alpha_k m(z)\, y_k(z)\, \dot{F}_k(t) = -q_k(t)\, m(z)\, y_k(z).$$

Dividamos entre $m(z)\, y_k(t)\, F_k(t)$:

$$\frac{\frac{\partial^2}{\partial z^2}[EJ(z)\, y_k''(z)]}{m(z)\, y_k(z)} + \frac{\ddot{F}_k(t)}{F_k(t)} + 2\alpha_k \frac{\dot{F}_k(t)}{F_k(t)} = -\frac{q_k(t)}{F_k(t)}.$$

El primer sumando en esta fórmula, según (5.15), es igual a ω_k^2, por eso se tiene:

$$\ddot{F}_k(t) + 2\alpha_k \dot{F}_k(t) + \omega_k^2 F_k(t) = -q_k(t). \tag{5.37}$$

Esta ecuación, por su forma, coincide con la ecuación análoga (2.50), por eso empleando (2.29) y (2.52) podemos escribir lo siguiente:

$$F_k(t) = e^{-\alpha_k t}(A_k \operatorname{sen} \bar{\omega}_k t + B_k \cos \bar{\omega}_k t) + \\ + \int_0^t \frac{-q_k(u)\, e^{-\alpha_k (t-u)} \operatorname{sen} \bar{\omega}_k (t-u)\, du}{\bar{\omega}_k};$$

$$\bar{\omega}_k = \sqrt{\omega_k^2 - \alpha_k^2}.$$

Ahora según (5.35) obtendremos:

$$y(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[e^{-\alpha_k t}(A_k \operatorname{sen} \bar{\omega}_k t + B_k \cos \bar{\omega}_k t) + \right. \\ \left. + \int_0^t \frac{-q_k(u)\, e^{-\alpha_k (t-u)} \operatorname{sen} \bar{\omega}_k (t-u)\, du}{\bar{\omega}_k} \right] y_k(z). \qquad (5.38)$$

Sin considerar las fuerzas de resistencia

$$y(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[(A_k \operatorname{sen} \omega_k t + B_k \cos \omega_k t) + \right. \\ \left. + \int_0^t \frac{-q_k(u) \operatorname{sen} \omega_k (t-u)\, du}{\omega_k} \right] y_k(z). \qquad (5.39)$$

§ 44. OSCILACIONES LIBRES TRANSVERSALES DE LA VIGA DE SECCIÓN CONSTANTE CON MASA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA SIN CONSIDERAR LAS RESISTENCIAS. Según (5.10), (5.17), (5.20) y (5.21) tenemos lo siguiente:

$$y(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(z)\, \Phi_k(t); \qquad (5.40)$$

$$\Phi_k(t) = A_k \operatorname{sen} \omega_k t + B_k \cos \omega_k t; \qquad (5.41)$$

$$y_k^{IV}(z) - s_k^4 y_k(z) = 0; \qquad (5.42)$$

$$s_k^4 = m\omega_k^2 : EJ. \qquad (5.43)$$

La función $\Phi_k(t)$ es conocida. Resta por hallar según (5.43) las formas principales. La ecuación característica para (5.43) será la siguiente:

$$r^4 - s_k^4 = 0.$$

Sus raíces son:

$$r_1 = s_k;\ r_2 = -s_k;\ r_3 = is_k;\ r_4 = -is_k.$$

La solución general con respecto a las raíces (5.42), una vez sustituidas $e^{s_k z}$ y $e^{-s_k z}$ por las funciones hiperbólicas, se representa en la

siguiente forma:

$$y_k(z) = A \operatorname{ch} s_k z + B \operatorname{sh} s_k z + C \cos s_k z + D \operatorname{sen} s_k z. \quad (5.44)$$

Esta expresión determina la forma fundamental de oscilaciones.

Apliquemos luego el método de parámetros iniciales [2], es decir, expresemos las constantes de integración (5.44) a través de las condiciones iniciales para $z = 0$. Con este propósito compongamos las derivadas consecutivas de (5.44):

$$y_k'(z) = s_k A \operatorname{sh} s_k z + s_k B \operatorname{ch} s_k z - s_k C \operatorname{sen} s_k z + s_k D \cos s_k z; \quad (5.45)$$

$$y_k''(z) = s_k^2 A \operatorname{ch} s_k z + s_k^2 B \operatorname{sh} s_k z - s_k^2 C \cos s_k z - s_k^2 D \operatorname{sen} s_k z; \quad (5.46)$$

$$y_k'''(z) = s_k^3 A \operatorname{sh} s_k z + s_k^3 B \operatorname{ch} s_k z + s_k^3 C \operatorname{sen} s_k z - s_k^3 D \cos s_k z. \quad (5.47)$$

Según las condiciones iniciales se tiene:

$$y_k(0) = A + C; \qquad y_k''(0) = s_k^2 (A - C);$$
$$y_k'(0) = s_k (B + D); \qquad y_k'''(0) = s_k^3 (B - D).$$

De estas igualdades se desprende:

$$A = \frac{1}{2}\left[y_k(0) + \frac{y_k''(0)}{s_k^2}\right]; \quad B = \frac{1}{2}\left[\frac{y_k'(0)}{s_k} + \frac{y_k'''(0)}{s^3}\right];$$
$$C = \frac{1}{2}\left[y_k(0) - \frac{y_k''(0)}{s_k^2}\right]; \quad D = \frac{1}{2}\left[\frac{y_k'(0)}{s_k} - \frac{y_k'''(0)}{s_k^3}\right].$$

Sustituyendo en (5.44) las constantes arbitrarias obtenidas se tendrá lo siguiente:

$$y_k(z) = y_k(0) A_{s_k z} + \frac{y_k'(0)}{s_k} B_{s_k z} + \frac{y_k''(0)}{s_k^2} C_{s_k z} + \frac{y_k'''(0)}{s_k^3} D_{s_k z}. \quad (5.48)$$

Aquí

$$A_{s_k z} = \frac{\operatorname{ch} s_k z + \cos s_k z}{2}; \quad B_{s_k z} = \frac{\operatorname{sh} s_k z + \operatorname{sen} s_k z}{2};$$
$$C_{s_k z} = \frac{\operatorname{ch} s_k z - \cos s_k z}{2}; \quad D_{s_k z} = \frac{\operatorname{sh} s_k z - \operatorname{sen} s_k z}{2} \quad (5.49)$$

son las soluciones particulares de (5.42) del Académico A. N. Krilov que satisfacen para $s_k = 1$ a la matriz unitaria:

$$A(0) = 1; \quad A'(0) = 0; \quad A''(0) = 0; \quad A'''(0) = 0;$$
$$B(0) = 0; \quad B'(0) = 1; \quad B''(0) = 0; \quad B'''(0) = 0;$$
$$C(0) = 0; \quad C'(0) = 0; \quad C''(0) = 1; \quad C'''(0) = 0;$$
$$D(0) = 0; \quad D'(0) = 0; \quad D''(0) = 0; \quad D'''(0) = 1.$$

Además, estas soluciones particulares poseen las siguientes propiedades:

$$1)\ A(0)=1;\quad B(0)=0;\quad C(0)=0;\quad D(0)=0;$$

$$2)\ A'_{s_kz}=s_kD_{s_kz};\qquad B'_{s_kz}=s_kA_{s_kz};$$

$$C'_{s_kz}=s_kB_{s_kz};\qquad D'_{s_kz}=s_kC_{s_kz}. \tag{5.50}$$

Los valores numéricos de estas funciones se dan en el suplemento 1.

Puesto que $y_k(z)$ es la línea elástica de la viga, entonces podemos escribir que

$$y''_k(0)=-M_k(0):EJ;\qquad y'''_k(0)=-Q_k(0):EJ.$$

Entonces la ecuación (5.48) puede escribirse en la siguiente forma definitiva:

$$y_k(z)=y_k(0)\,A_{s_kz}+\frac{y'_k(0)}{s_k}B_{s_kz}-\frac{M_k(0)}{s_k^2EJ}C_{s_kz}-\frac{Q_k(0)}{s_k^3EJ}D_{s_kz}. \tag{5.51}$$

Valiéndose de las propiedades (5.50) con facilidad obtenemos:

$$y'_k(z)=s_ky_k(0)\,D_{s_kz}+y'_k(0)\,A_{s_kz}-\frac{M_k(0)}{s_kEJ}B_{s_kz}-\frac{Q_k(0)}{s_k^2EJ}C_{s_kz}; \tag{5.52}$$

$$M_k(z)=-y''_k(z)\,EJ=-s_k^2y_k(0)\,EJC_{s_kz}-$$

$$-s_ky'_k(0)\,EJD_{s_kz}+M_k(0)\,A_{s_kz}+\frac{Q_k(0)}{s_k}B_{s_kz}; \tag{5.53}$$

$$Q_k(z)=-y'''_k(z)\,EJ=-s_k^3EJy_k(0)\,B_{s_kz}-s_k^2EJy'_k(0)\,C_{s_kz}+$$

$$+s_kM_k(0)\,D_{s_kz}+Q_k(0)\,A_{s_kz}. \tag{5.54}$$

Las ecuaciones (5.51)—(5.54) determinan todos los elementos necesarios para investigar las oscilaciones libres de la viga. El valor $s_k=\sqrt[4]{\frac{m\omega_k^2}{EJ}}$ que forma parte de dichas ecuaciones, relacionado con la frecuencia de oscilaciones libres ω_k, debe ser tal que se satisfagan las condiciones de frontera de la viga que dependen de sus fijaciones. No es difícil convencerse de que, siendo corrientes las fijaciones del extremo izquierdo de la viga, los dos parámetros iniciales son siempre conocidos.

Para hallar los otros dos parámetros iniciales incógnitos es necesario componer dos ecuaciones a base de las condiciones finales conocidas, lo más frecuente según las condiciones de fijación del extremo derecho de la viga. Como las dos ecuaciones compuestas no contendrán términos independientes, ya que no los hay en las ecuaciones (5.51)—(5.54), es decir, serán homogéneas, entonces para obtener los parámetros iniciales diferentes de cero, hay que igualar a cero el determinante de las dos ecuaciones compuestas, lo que dará precisamente la ecuación de frecuencias en forma general.

Formarán parte del determinante las funciones hiperbólicas trigonométricas con el argumento $\lambda_k = s_k l$. El determinante desarrollado dará la ecuación trascendente de frecuencias de las oscilaciones libres con un número infinito de raíces λ_k. Estas raíces determinan la cantidad infinita de frecuencias de oscilaciones libres ω_k. Por eso la integral general de la ecuación diferencial de oscilaciones libres se representa por una serie infinita (5.40).

La dependencia entre $\lambda_k = s_k l$ y la frecuencia ω_k se establece según (5.43):

$$\lambda_k^4 = s_k^4 l^4 = \frac{m\omega_k^2}{EJ} l^4,$$

de donde,

$$\omega_k = s_k^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{\lambda_k^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}. \qquad (5.55)$$

A cada frecuencia de oscilaciones libres ω_k le corresponde la forma principal $y_k(z)$. Generalmente, la primera frecuencia mínima determina la oscilación fundamental con amplitudes máximas, mientras que las frecuencias más altas corresponden a las oscilaciones con amplitudes mínimas; por eso el valor práctico de las frecuencias más altas es, hablando en general, menor que el valor de las oscilaciones con la primera frecuencia fundamental.

Las constantes arbitrarias A_k y B_k de la ecuación (5.41) se determinan por las condiciones iniciales del movimiento de la viga para $t = 0$.

La aplicación de las ecuaciones (5.51)—(5.54) se muestra en el capítulo 6.

§ 45. OSCILACIONES FORZADAS DE LA VIGA RECTA DE SECCIÓN CONSTANTE CON MASA m UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA DEBIDAS A LA CARGA VIBRATORIA $q(z)$ sen θt SIN CONSIDERAR LA RESISTENCIA.

La ecuación diferencial de oscilaciones según (5.5) es

$$\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \frac{m}{EJ} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{-q(z) \operatorname{sen} \theta t}{EJ}. \qquad (5.56)$$

La resolución de la ecuación (5.56) sin el segundo miembro, que determina las oscilaciones libres de la viga, ha sido examinada en el § 44. Aquí hallaremos la solución particular de la ecuación (5.56) con el segundo miembro, la cual dará las oscilaciones forzadas en el caso de cargas vibratorias.

Puesto que las oscilaciones libres de la viga se amortiguan con el tiempo debido a las resistencias, en las oscilaciones permanentes existirán solamente las oscilaciones forzadas determinadas por la solución particular buscada (5.56), si se prescinde del desfasaje debido a la resistencia no tomada en consideración.

La solución particular la hallaremos en la siguiente forma:

$$y_{\text{part}}(z, t) = y(z) \operatorname{sen} \theta t. \tag{5.57}$$

Introduciéndola en la ecuación inicial (5.56) obtendremos:

$$y^{\text{IV}}(z) - s^4 y(z) = -\frac{q(z)}{EJ}, \tag{5.58}$$

donde,

$$s^4 = m\theta^2 : EJ. \tag{5.59}$$

La solución general de la ecuación (5.58) sin el segundo miembro puede escribirse según (5.51) a través de las soluciones particulares (5.49) A_{sz}, B_{sz}, C_{sz} y D_{sz}, puesto que la ecuación (5.58) se parece a la (5.42):

$$y_{\text{gen}}(z) = aA_{sz} + bB_{sz} + cC_{sz} + dD_{sz}. \tag{5.60}$$

La solución particular de la ecuación (5.58), si $q(z)$ está expresada por medio de un polinomio, la escribamos así:

$$y_{\text{part}}(z) = \frac{q(z)}{s^4 EJ} + \frac{q^{\text{IV}}(z)}{s^8 EJ} + \frac{q^{\text{VIII}}(z)}{s^{12} EJ} + \ldots$$

Es decir, la solución general (integral total) de (5.58) será:

$$y(z) = y_{\text{gen}}(z) + y_{\text{part}}(z) = aA_{sz} + bB_{sz} + \\ + cC_{sz} + dD_{sz} + \frac{q(z)}{s^4 EJ} + \frac{q^{\text{IV}}(z)}{s^8 EJ} + \frac{q^{\text{VIII}}(z)}{s^{12} EJ} + \ldots \tag{5.61}$$

En lo adelante, para simplificar la exposición, limitémonos al caso cuando la carga $q(z) = q(0) = q = \text{const}$. Para este caso se tiene lo siguiente:

$$y(z) = aA_{sz} + bB_{sz} + cC_{sz} + dD_{sz} + \frac{q(0)}{s^4 EJ}. \tag{5.62}$$

Expresemos las constantes arbitrarias a través de las condiciones iniciales para $z = 0$. Con este propósito diferenciamos consecuentemente (5.62):

$$y'(z) = asD_{sz} + bsA_{sz} + csB_{sz} + dsC_{sz}; \tag{5.63}$$

$$y''(z) = as^2 C_{sz} + bs^2 D_{sz} + cs^2 A_{sz} + ds^2 B_{sz}; \tag{5.64}$$

$$y'''(z) = as^3 B_{sz} + bs^3 C_{sz} + cs^3 D_{sz} + ds^3 A_{sz}. \tag{5.65}$$

Supongamos que para $z = 0$ tenemos los parámetros iniciales $y(0)$, $y'(0)$, $M(0)$ y $Q(0)$. Escribámoslos según las ecuaciones (5.62)—(5.65):

$$y(0) = a + \frac{q(0)}{s^4 EJ}; \quad y'(0) = bs;$$

$$M(0) = -EJy''(0) = -EJcs^2;$$

$$Q(0) = -EJy'''(0) = -EJ\,ds^3.$$

De aquí se obtiene lo siguiente:

$$a = y(0) - \frac{q(0)}{s^4 EJ}; \quad c = -\frac{M_0}{EJs^2};$$

$$b = \frac{y'(0)}{s}; \quad d = -\frac{Q(0)}{EJs^3}.$$

Ahora las ecuaciones (5.62)—(5.65) serán como sigue:

$$y(z) = y(0) A_{sz} + \frac{y'(0)}{s} B_{sz} - \frac{M(0)}{s^2 EJ} C_{sz} -$$

$$- \frac{Q(0)}{s^3 EJ} D_{sz} - \frac{q(0)}{s^4 EJ} (A_{sz} - 1); \qquad (5.66)$$

$$y'(z) = sy(0) D_{sz} + y'(0) A_{sz} - \frac{M_0}{sEJ} B_{sz} - \frac{Q(0)}{s^2 EJ} C_{sz} - \frac{q(0)}{s^3 EJ} D_{sz}; \qquad (5.67)$$

$$M(z) = -EJy''(z) = -s^2 EJy(0) C_{sz} -$$

$$- sEJy'(0) D_{sz} + M(0) A_{sz} + Q(0) \frac{B_{sz}}{s} + \frac{q(0)}{s^2} C_{sz}; \qquad (5.68)$$

$$Q(z) = -EJy'''(z) = -s^3 EJy(0) B_{sz} -$$

$$- s^2 EJy'(0) C_{sz} + sM(0) D_{sz} + Q(0) A_{sz} + \frac{q(0)}{s} B_{sz}. \qquad (5.69)$$

Estas ecuaciones son válidas hasta los lugares de discontinuidad de $y(z)$, $y'(z)$, $M(z)$ y $Q(z)$. Si para la coordenada $z = a_i$ hay las siguientes discontinuidades:

$\Delta y(a_i)$, en la línea elástica;
$\Delta y'(a_i)$, en la primera derivada de la línea elástica;
$\Delta M(a_i)$, en el diagrama de los momentos flectores;
$\Delta Q(a_i)$, en el diagrama de las fuerzas transversales;
$\Delta q(a_i)$, en la intensidad de la carga q,

entonces a las expresiones (5.66)—(5.69), valiéndose del principio de superposición y considerando que la distancia desde las discontinuidades hasta la sección con coordenada z será $z - a_i$, se suman, respectivamente:

$$\Delta y = \Delta y(a_i) A_{s(z-a_i)} + \frac{\Delta y'(a_i)}{s} B_{s(z-a_i)} -$$

$$- \frac{\Delta M(a_i)}{s^2 EJ} C_{s(z-a_i)} - \frac{\Delta Q(a_i)}{s^3 EJ} D_{s(z-a_i)} - \frac{\Delta q(a_i)}{s^4 EJ} [A_{s(z-a_i)} - 1]; \qquad (5.70)$$

$$\Delta y' = s\Delta y(a_i) D_{s(z-a_i)} + \Delta y'(a_i) A_{s(z-a_i)} -$$

$$- \frac{\Delta M(a_i)}{sEJ} B_{s(z-a_i)} - \frac{\Delta Q(a_i)}{s^2 EJ} C_{s(z-a_i)} - \frac{\Delta q(a_i)}{s^3 EJ} D_{s(z-a_i)}; \qquad (5.71)$$

$$\Delta M = -s^2 EJ\Delta y(a_i) C_{s(z-a_i)} - sEJ\Delta y'(a_i) D_{s(z-a_i)} +$$

$$+ \Delta M(a_i) A_{s(z-a_i)} + \frac{\Delta Q(a_i)}{s} B_{s(z-a_i)} + \frac{\Delta q(a_i)}{s^2} C_{s(z-a_i)}; \qquad (5.72)$$

$$\Delta Q = -s^3 EJ\Delta y\,(a_i)\,B_{s(z-a_i)} - s^2 EJ\Delta y'\,(a_i)\,C_{s(z-a_i)} +$$

$$+ s\Delta M\,(a_i)\,D_{s(z-a_i)} + \Delta Q\,(a_i)\,A_{s(z-a_i)} + \frac{\Delta q\,(a_i)}{s}\,B_{s(z-a_i)}. \qquad (5.73)$$

Las expresiones obtenidas (5.66)—(5.69) y sus suplementos (5.70)—(5.73) permiten determinar las oscilaciones forzadas $y\,(z)$ e $y'\,(z)$ y las fuerzas internas $M\,(z)$ y $Q\,(z)$ debidas a la carga vibratoria q sen θt para cualquier cantidad de sus discontinuidades, reduciendo el problema para cualesquiera fijaciones de la viga a hallar sólo dos parámetros iniciales incógnitos.

Estas expresiones contienen las amplitudes de $y\,(z)$, $y'\,(z)$, $M\,(z)$ y $Q\,(z)$. Las discontinuidades $\Delta y\,(a_i)$ y $\Delta y'\,(a_i)$ son posibles solamente en aquel caso cuando la viga esté compuesta a lo largo de partes aisladas, cuyos enlaces pueden admitir tales discontinuidades.

Las ecuaciones (5.66)—(5.73) en la forma matricial son:

$$V = F \cdot P, \qquad (5.74)$$

donde $V = |\{y\,(z)\ y'\,(z)\ M\,(z)\ Q\,(z)\}|$ es la matriz-columna de las magnitudes buscadas;

1er tramo: $0 \leqslant z_1 \leqslant a_1$

$$F = \begin{vmatrix} A_{sz} & \frac{B_{sz}}{s} & -\frac{C_{sz}}{s^2 EJ} & -\frac{D_{sz}}{s^3 EJ} & -\frac{(A_{sz}-1)}{s^4 EJ} \\ sD_{sz} & A_{sz} & -\frac{B_{sz}}{sEJ} & -\frac{C_{sz}}{s^2 EJ} & -\frac{D_{sz}}{s^3 EJ} \\ -s^2 EJC_{sz} & -sEJD_{sz} & A_{sz} & \frac{B_{sz}}{s} & \frac{C_{sz}}{s^2} \\ -s^3 EJB_{sz} & -s^2 EJC_{sz} & sD_{sz} & A_{sz} & \frac{B_{sz}}{s} \end{vmatrix} \qquad (5.75)$$

2° tramo: $a_1 \leqslant z \leqslant a_2$

$$\begin{vmatrix} A_{s(z-a_1)} \\ sD_{s(z-a_1)} \\ -s^2 EJC_{s(z-a_1)} \\ -s^3 EJB_{s(z-a_1)} - \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{B_{s(z-a_2)}}{s} & -\frac{C_{s(z-a_1)}}{s^2 EJ} & -\frac{D_{s(z-a_1)}}{s^3 EJ} & \frac{[A_{s(z-a_1)}-1]}{s^4 EJ} \\ A_{s(z-a_1)} & -\frac{B_{s(z-a_1)}}{sEJ} & -\frac{C_{s(z-a_1)}}{s^2 EJ} & -\frac{D_{s(z-a_1)}}{s^3 EJ} \\ -sEJD_{s(z-a_1)} & A_{s(z-a_1)} & \frac{B_{s(z-a_1)}}{s} & \frac{C_{s(z-a_2)}}{s^2} \\ -s^2 EJC_{s(z-a_1)} & sD_{s(z-a_1)} & A_{s(z-a_1)} & \frac{B_{s(z-a_1)}}{s} \end{vmatrix}$$

$$\left\| \begin{array}{l} \text{el } 3^{\text{er}} \text{ tramo: } a_2 \leqslant z \leqslant a_3 \\ A_{s(z-a_2)}, \text{ etc. } \ldots \\ sD_{s(z-a_2)}, \text{ etc. } \ldots \\ -s^2EJC_{s(z-a_2)}, \text{ etc. } \ldots \\ -s^3EJB_{s(z-a_2)}, \text{ etc. } \ldots \end{array} \right\| \tag{5.76}$$

es la matriz de las funciones de influencia;

$$P = | \{y(0)\ y'(0)\ M(0)\ Q(0)\ q(0)\ \Delta y(a_1)\ \Delta y'(a_1)\ \Delta M(a_1) \times \times \Delta Q(a_1)\ \Delta q(a_1)\ \Delta y(a_2), \text{ etc. } \ldots\} | \tag{5.77}$$

es la matriz-columna de los parámetros iniciales y de las discontinuidades de las magnitudes.

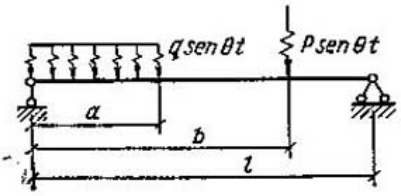


Fig. 100

La forma matricial de escribir las ecuaciones (5.51)—(5.54) es análoga. Puede obtenerse a partir de (5.74)—(5.77) sustituyendo s por s_k y eliminando las magnitudes ausentes en la matriz P y las funciones de influencia que les corresponden en la matriz F.

Ejemplo 26. Escribir las ecuaciones necesarias para determinar los parámetros iniciales de la viga de dos apoyos (fig. 100).

Parámetros iniciales para $z = 0$:

$$y(0) = 0;\ y'(0) = ?;\ M(0) = 0;\ Q(0) = ?;$$
$$q(0) = -q.$$

Condiciones de transición:

1) Para $a_1 = a$

$\Delta y(a) = 0$ ya que la viga es maciza;
$\Delta y'(a) = 0$, ídem
$\Delta M(a) = 0$, ya que no hay momento concentrado;
$\Delta Q(a) = 0$, ya que no hay fuerza concentrada;
$\Delta q(a) = 0 - (-b) = q$.

2) Para $a_2 = b$

$\Delta y(b) = 0$, ya que la viga es maciza;
$\Delta y'(b) = 0$, ídem
$\Delta M(b) = 0$, ya que no hay momento concentrado;
$\Delta Q(b) = -P$ (el signo menos, puesto que la fuerza está dirigida hacia abajo);
$\Delta q(b) = 0 - 0 = 0$.

Condiciones de frontera (finales) en el extremo derecho de la viga para $z = l$:

$$y(l) = 0; \quad M(l) = 0.$$

Escribamos las ecuaciones de $y(z)$ y $M(z)$ para los tramos de la viga:
1er *tramo*: $0 \leqslant z \leqslant a$ según las expresiones (5.66) y (5.68):

$$y_1(z) = \frac{y'(0)}{s} B_{sz} - \frac{Q(0)}{s^3 EJ} D_{sz} + \frac{q}{s^4 EJ}(A_{sz} - 1);$$

$$M_1(z) = -sEJy'(0) D_{sz} + \frac{Q(0)}{s} B_{sz} + \frac{q}{s^2} C_{sz};$$

2do *tramo*: $a \leqslant z \leqslant b$ según las expresiones (5.70) y (5.72):

$$y_2(z) = y_1(z) - \frac{q}{s^4 EJ}[A_{s(z-a)} - 1];$$

$$M_2(z) = M_1(z) + \frac{q}{s^2} C_{s(z-a)};$$

3er *tramo*: $b \leqslant z \leqslant l$ según las expresiones (5.70) y (5.72):

$$y_3(z) = y_2(z) + \frac{P}{s^3 EJ} D_{s(z-b)};$$

$$M_3(z) = M_2(z) - \frac{P}{s} B_{s(z-b)}.$$

Introduciendo en la ecuación del tercer tramo $z = l$, se tendrá con las condiciones de frontera dos ecuaciones $y_3(l) = 0$ y $M_3(l) = 0$ para determinar dos parámetros iniciales incógnitos $y'(0)$ y $Q(0)$ en la siguiente forma:

$$y(l) = \frac{y'(0)}{s} B_{sl} - \frac{Q(0)}{s^3 EJ} D_{sl} + \frac{q}{s^4 EJ}(A_{sl} - 1) -$$

$$- \frac{q}{s^4 EJ}[A_{s(l-a)} - 1] + \frac{P}{s^3 EJ} D_{s(l-b)} = 0;$$

$$M(l) = -sEJy'(0) D_{sl} + \frac{Q(0)}{s} B_{sl} - \frac{q}{s^2} C_{sl} +$$

$$+ \frac{q}{s^2} C_{s(l-a)} - \frac{P}{s} B_{s(l-b)} = 0.$$

Ejemplo 27. Escribir las ecuaciones para determinar los parámetros iniciales de la viga (fig. 101).

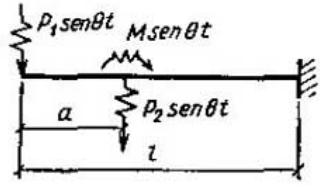


Fig. 101

Parámetros iniciales para $z = 0$:

$$y(0) = ?; \quad y'(0) = ?; \quad M(0) = 0; \quad Q(0) = -P_1; \quad q(0) = 0.$$

Condiciones de transición para $a_1 = a$:

$$\Delta y\ (a) = 0; \quad \Delta y'\ (a) = 0; \quad \Delta M\ (a) = M;$$
$$\Delta Q\ (a) = -P_2; \quad \Delta q\ (a) = 0.$$

Condiciones finales en el extremo derecho de la viga para $z = l$:

$$y\ (l) = 0; \quad y'\ (l) = 0.$$

Aquí componemos las expresiones de $y\ (z)$ e $y'\ (z)$ para los tramos:

1-er tramo: $0 \leqslant z \leqslant a$ según las expresiones (5.66) y (5.67):

$$y_1(z) = y(0)\, A_{sz} + \frac{y'(0)}{s} B_{sz} + \frac{P_1}{s^3 EJ} D_{sz};$$

$$y_1'(z) = sy(0)\, D_{sz} + y'(0)\, A_{sz} + \frac{P_1}{s^2 EJ} C_{sz};$$

2-do tramo: $a \leqslant z \leqslant l$ según las expresiones (5.70) y (5.71):

$$y_2(z) = y_1(z) - \frac{M}{s^2 EJ} C_{s(z-a)} + \frac{P_2}{s^3 EJ} D_{s(z-a)};$$

$$y_2'(z) = y_1'(z) - \frac{M}{sEJ} B_{s(z-a)} + \frac{P_2}{s^2 EJ} C_{s(z-a)}.$$

Tomando las condiciones finales para $z = l$ se obtienen dos ecuaciones para determinar dos parámetros iniciales $y\ (0)$ e $y'\ (0)$:

$$y(l) = y(0)\, A_{sl} + \frac{y'(0)}{s} B_{sl} + \frac{P_1}{s^3 EJ} D_{sl} -$$
$$- \frac{M}{s^2 EJ} D_{s(l-a)} + \frac{P_2}{s^3 EJ} D_{s(l-a)} = 0;$$

$$y'(l) = sy(0)\, D_{sl} + y'(0)\, A_{sl} + \frac{P_1}{s^2 EJ} C_{sl} -$$
$$- \frac{M}{sEJ} B_{s(l-a)} + \frac{P_2}{s^2 EJ} C_{s(l-a)} = 0.$$

§ 46. CONSIDERACIÓN DE LAS MASAS CONCENTRADAS m_i SOBRE LA VIGA QUE TIENE UNA MASA DISTRIBUIDA m.

Examinemos una viga con una masa complementaria m_i para $z = a_i$ (fig. 102) que se halla oscilando permanentemente debido a la carga vibratoria P sen θt.

Supongamos que la viga tiene en el lugar de disposición de la masa m_i la flecha $y\ (a_i, t)$ y el ángulo de giro $y'\ (a_i, t)$. Estas magnitudes en el movimiento permanente variarán según la ley sen θt, es decir,

$$y\ (a_i, t) = y\ (a_i) \text{ sen } \theta t;$$

$$y'\ (a_i, t) = y'\ (a_i) \text{ sen } \theta t,$$

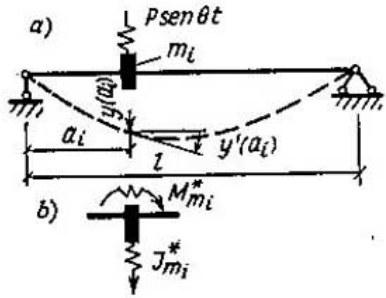


Fig. 102

donde $y\ (a_i)$ e $y'\ (a_i)$ son las amplitudes de la flecha y del ángulo de giro de la viga para $z = a_i$.

Sobre la viga en el lugar de disposición de la masa m_i actuarán la fuerza de inercia $J^*_{m_i}(t)$ y el momento de inercia $M^*_{m_i}(t)$ que varían

también según la ley de sen θt:

$$J^*_{m_i}(t) = J^*_{m_i} \operatorname{sen} \theta t; \quad M^*_{m_i}(t) = M^*_{m_i} \operatorname{sen} \theta t, \qquad (5.78)$$

donde $J^*_{m_i} = m_i \theta^2 y(a_i)$ es la amplitud de la fuerza de inercia [véase (1.1)]; $M^*_{m_i} = J_{m_i} \theta^2 y'(a_i)$, la amplitud del momento de la inercia [véase (1.2)]; J_{m_i}, el momento de inercia de la masa m_i respecto a la línea neutra de la sección de la viga.

Las direcciones de la fuerza de inercia y del momento de la inercia están indicadas en la fig. 102, *b*. Así pues, la influencia de la masa concentrada se reduce a la consideración de la fuerza exterior $J^*(t)$ y del momento exterior $M^*(t)$ determinados según (5.78). Si se examinan las oscilaciones libres de la viga respecto a la forma principal $y_k(z)$ con la frecuencia ω_k, las cargas de inercia se hallan por la misma fórmula (5.78) sustituyendo la frecuencia θ por la frecuencia ω_k.

Ejemplo 28. Escribir la ecuación de las frecuencias de oscilaciones libres de la viga empotrada por un extremo con una masa concentrada complementaria m_1 sobre el extremo libre, considerándola puntual (fig. 103).

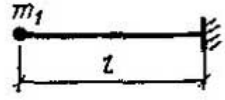


Fig. 103

Examinemos la *k*-ésima forma principal. Los parámetros iniciales para $z = 0$ son:

$$y_k(0) = ?; \quad y'_k(0) = ?; \quad M_k(0) = 0;$$

$$Q_k(0) = -J^* = -m_1 \omega_k^2 y_k(0).$$

Condiciones de frontera en el extremo derecho para $z = l$:

$$y_k(l) = 0; \quad y'_k(l) = 0.$$

Según la expresión (5.51) tenemos

$$y_k(z) = y_k(0) A_{s_k z} + \frac{y'_k(0)}{s_k} B_{s_k z} + \frac{J^*}{s_k^3 EJ} D_{s_k z},$$

donde

$$s_k^4 = \frac{m\omega_k^2}{EJ};$$

$$J^* = m_1 \omega_k^2 y_k(0) = s_k^4 EJ \frac{m_1}{m} y_k(0).$$

Por consiguiente,

$$y_k(z) = y_k(0)\left(A_{s_k z} + s_k \frac{m_1}{m} D_{s_k z}\right) + \frac{y_k'(0)}{s_k} B_{s_k z}.$$

La derivada de esta expresión es,

$$y_k'(z) = y_k(0)\left(s_k D_{s_k z} + s_k^2 \frac{m_1}{m} C_{s_k z}\right) + y_k'(0) A_{s_k z}.$$

Condiciones de frontera:

$$y_k(l) = y_k(0)\left(A_{s_k l} + s_k \frac{m_1}{m} D_{s_k l}\right) + \frac{y_k'(0)}{s_k} B_{s_k l} = 0;$$

$$y_k'(l) = y_k(0)\left(s_k D_{s_k l} + s_k^2 \frac{m_1}{m} C_{s_k l}\right) + y_k'(0) A_{s_k l} = 0.$$

El determinante de estas ecuaciones igualado a cero da la ecuación de frecuencias en forma no desarrollada:

$$D = \begin{vmatrix} \left(A_{\lambda_k} + \frac{\lambda_k}{l}\frac{m_1}{m} D_{\lambda_k}\right)\frac{l}{\lambda_k} B_{\lambda_k} \\ \left(D_{\lambda_k} + \frac{\lambda_k}{l}\frac{m_1}{m} C_{\lambda_k}\right)\frac{l}{\lambda_k} A_{\lambda_k} \end{vmatrix} = 0,$$

donde,

$$\lambda_k = s_k l.$$

Las raíces de esta ecuación son λ_k. Las frecuencias se calculan según (5.55).

§ 47. NOCIÓN SOBRE LA CONSIDERACIÓN DE LA INERCIA DE ROTACIÓN DE LAS SECCIONES DE LA VIGA. Designemos el momento lineal de la inercia de rotación de las secciones de la viga y de las masas distribuidas sobre ésta con respecto a la línea neutra en estado de flexión por $i_m(z)$. Durante la rotación, tales masas van a crear, además de las fuerzas de inercia, también los momentos de la inercia distribuidos a lo largo de la viga,

$$m^*(z, t) = -i_m(z) \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right). \qquad (5.79)$$

Examinemos la ecuación diferencial

$$EJ(z) \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -M(z, t).$$

Diferenciémosla una vez:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[EJ(z) \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right] = -\frac{\partial M(z, t)}{\partial z} = -Q - m^*(z, t).$$

Introduzcamos aquí (5.79) y diferenciemos una vez más:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[EJ(z)\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right] = -p(z, t) + \frac{\partial}{\partial z}\left[i_m(z)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)\right]. \qquad (5.80)$$

Puesto que $p(z, t) = q(z, t) + m(z)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, entonces tendremos definitivamente la ecuación diferencial de movimiento, considerando la inercia de rotación de las masas:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[EJ(z)\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right] + m(z)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z}\left[i_m(z)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)\right] = -q(z, t). \tag{5.81}$$

A partir de la ecuación (5.81) y admitiendo en ella $q(z, t) = 0$ obtendremos la ecuación diferencial de oscilaciones libres.

Las ecuaciones diferenciales que consideran la inercia de rotación pueden ser integradas mediante los mismos métodos que se han empleado anteriormente. Así, por ejemplo, si sobre una viga de sección constante no hay ninguna carga, excepto el propio peso, entonces la ecuación diferencial de oscilaciones libres para éste, según (5.81), puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{EJ}{m}\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - r^2\frac{\partial^4 y}{\partial z^2\,\partial t^2} = 0,$$

donde r es el radio de giro de la sección; m, la masa de la viga por unidad de longitud.

Suponiendo, igual que antes, que $y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(z) F_k(t)$ obtenemos:

$$\frac{EJ}{m} y_k^{IV}(z) F_k(t) + y_k(z)\ddot{F}_k(t) - r^2 y_k''(z)\ddot{F}_k(t) = 0,$$

o bien

$$\frac{EJ}{m} y_k^{IV}(z) : [y_k(z) - r^2 y_k''(z)] = -\ddot{F}_k(t) : F_k(t) = \omega_k^2.$$

A partir de aquí se obtienen dos ecuaciones independientes:

$$\ddot{F}_k(t) + \omega_k^2 F_k(t) = 0;$$

$$\frac{EJ}{m} y_k^{IV}(z) - \omega_k^2 [y_k(z) - r^2 y_k''(z)] = 0.$$

Esta es la ecuación de la forma principal.

La inercia de rotación disminuye en algo las frecuencias de oscilaciones propias y tanto más, cuanto más alta es la frecuencia [5].

§ 48. DESPLAZAMIENTOS TRANSVERSALES DE LA VIGA RECTA EN PRESENCIA DE FUERZAS LONGITUDINALES APLICADAS A SUS EXTREMOS (fig. 104). Se examinan vigas con carga transversal, comprimidas o traccionadas complementariamente por las fuerzas *constantes* R aplicadas a los extremos de la viga. Para simplificar los cálculos, prescindimos de las fuerzas de resisten-

cia, las cuales, en caso de necesidad, pueden introducirse fácilmente en los razonamientos expuestos a continuación.

Adoptemos la fuerza de tracción R con el signo más $(+R)$, y la de compresión, con el signo menos $(-R)$. Examinemos la siguiente ecuación diferencial:

$$EJ(z)\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -M(z, t).$$

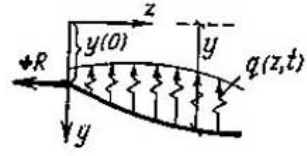


Fig. 104

En nuestro caso

$$M = M^0 \mp R[y - y(0)],$$

siendo M^0 el momento flector debido a todas las cargas restantes, excepto la fuerza longitudinal R.

Por consiguiente,

$$EJ(z)\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -M^0 \pm R[y - y(0)]$$

Diferenciemos esta ecuación dos veces, y teniendo en cuenta que $\frac{\partial^2 M^0}{\partial z^2} = p(z, t) = m(z)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + q(z, t)$, obtendremos la ecuación diferencial de desplazamientos de tal viga:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[EJ(z)\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right] + m(z)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \mp R\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -q(z, t). \quad (5.82)$$

El signo superior pertenece a la viga sometida a la acción combinada de tracción y flexión, el inferior, a la acción combinada de compresión y flexión.

Ecuación diferencial de oscilaciones libres:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[EJ(z)\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right] + m(z)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \mp R\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0. \quad (5.83)$$

1. Oscilaciones libres. La solución de la ecuación (5.83) la buscamos, igual que antes, en la siguiente forma:

$$y(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(z) F_k(t). \quad (5.84)$$

Introduciendo una integral particular (5.84) en la ecuación (5.83) y dividiendo lo obtenido entre $m(z) y_k(z) F_k(t)$ se tendrá:

$$\frac{\partial^2/\partial z^2 [EJ(z) y_k''(z)]}{m(z) y_k(z)} \mp \frac{R y_k''(z)}{m(z) y_k(z)} = -\frac{\ddot{F}_k(t)}{F_k(t)} = \omega_k^2. \quad (5.85)$$

Huelga señalar que aquí ω_k^2 es diferente que en la viga sin fuerza longitudinal.

A partir de (5.85) se tiene lo siguiente:

$$1)\ \ddot{F}_k(t) + \omega_k^2 F_k(t) = 0, \quad (5.86)$$

su integral es,

$$F_k(t) = A_k \operatorname{sen} \omega_k t + B_k \cos \omega_k t, \tag{5.87}$$

la viga realiza oscilaciones armónicas con la frecuencia ω_k;

2) $$[EJ(z)\, y_k''(z)]'' \mp R y_k''(z) - m(z)\, y_k(z)\, \omega_k^2 = 0. \tag{5.88}$$

Esta es la ecuación diferencial de la forma principal de oscilaciones de la viga con carga (fuerza) longitudinal R que corresponde a la frecuencia ω_k.

Más adelante limitémonos al examen de los casos, cuando la rigidez de la viga EJ es constante y la masa de la viga m es uniformemente distribuida. Para tales casos la ecuación (5.88) será:

$$y_k^{IV}(z) \mp \frac{R}{EJ} y_k''(z) - s_k^4 y_k(z) = 0, \tag{5.89}$$

donde $s_k^4 = m\omega_k^2 : EJ$.

Ecuación característica para (5.89):

$$r^4 \mp \frac{R}{EJ} r^2 - s_k^4 = 0.$$

De aquí

$$r_{1,2} = \pm a_k; \qquad r_{3,4} = \pm b_k i, \tag{5.90}$$

donde

$$a_k = \sqrt{\pm \frac{R}{2EJ} + \sqrt{\frac{R^2}{4(EJ)^2} + s_k^4}};$$

$$b_k = \sqrt{\pm \frac{R}{2EJ} + \sqrt{\frac{R^2}{4(EJ)^2} + s_k^4}}. \tag{5.91}$$

Notemos que

$$a_k^2 - b_k^2 = \pm \frac{R}{EJ}; \qquad a_k^2 + b_k^2 = 2\sqrt{\frac{R^2}{4(EJ)^2} + s_k^4}. \tag{5.92}$$

De acuerdo con las raíces de la ecuación característica, la integral (5.89) será la siguiente:

$$y_k(z) = A \operatorname{ch} a_k z + B \operatorname{sh} a_k z + C \cos b_k z + D \operatorname{sen} b_k z. \tag{5.93}$$

Diferenciemos consecutivamente:

$$y_k'(z) = a_k A \operatorname{sh} a_k z + a_k B \operatorname{ch} a_k z - b_k C \operatorname{sen} b_k z + b_k D \cos b_k z; \tag{5.94}$$

$$y_k''(z) = a_k^2 A \operatorname{ch} a_k z + a_k^2 B \operatorname{sh} a_k z - b_k^2 C \cos b_k z - b_k^2 D \operatorname{sen} b_k z; \tag{5.95}$$

$$y_k'''(z) = a_k^3 A \operatorname{sh} a_k z + a_k^3 B \operatorname{ch} a_k z + b_k^3 C \operatorname{sen} b_k z - b_k^3 D \cos b_k z. \tag{5.96}$$

Construyamos la integral (5.93) a base de las soluciones particulares que satisfacen a la matriz unitaria:

$$\left.\begin{array}{llll} Y_{1k}(0)=1; & Y'_{1k}(0)=0; & Y''_{1k}(0)=0; & Y'''_{1k}(0)=0; \\ Y_{2k}(0)=0; & Y'_{2k}(0)=1; & Y''_{2k}(0)=0; & Y'''_{2k}(0)=0; \\ Y_{3k}(0)=0; & Y'_{3k}(0)=0; & Y''_{3k}(0)=1; & Y'''_{2k}(0)=0; \\ Y_{4k}(0)=0; & Y'_{4k}(0)=0; & Y''_{4k}(0)=0; & Y'''_{4k}(0)=1. \end{array}\right\} \quad (5.97)$$

Hallemos la primera solución particular $Y_{1k}(z)$. Utilizando las condiciones de la primera fila de (5.97) para las expresiones (5.93)—(5.96) se obtiene:

$$A + C = 1; \quad a_k^2 A - b_k^2 C = 0;$$
$$a_k B + b_k D = 0; \quad a_k^2 B - b_k^2 D = 0.$$

De aquí se desprende que $B = D = 0$;

$$A = \frac{b_k^2}{a_k^2 + b_k^2}; \quad C = \frac{a_k^2}{a_k^2 + b_k^2}.$$

Por consiguiente, según (5.93)

$$Y_{1k}(z) = \frac{1}{a_k^2 + b_k^2}(b_k^2 \operatorname{ch} a_k z + a_k^2 \cos b_k z). \quad (5.98)$$

Las derivadas son:

$$Y'_{1k}(z) = \frac{1}{a_k^2 + b_k^2}(a_k b_k^2 \operatorname{sh} a_k z - a_k^2 b_k \operatorname{sen} b_k z); \quad (5.99)$$

$$Y''_{1k}(z) = \frac{1}{a_k^2 + b_k^2}(a_k^2 b_k^2 \operatorname{ch} a_k z - a_k^2 b_k^2 \cos b_k z); \quad (5.100)$$

$$Y'''_{1k}(z) = \frac{1}{a_k^2 + b_k^2} a_k^2 b_k^2 \operatorname{sh} a_k z + a_k^2 b_k^2 \operatorname{sen} b_k z). \quad (5.101)$$

Hallemos la segunda solución particular $Y_{2k}(z)$. Utilicemos las condiciones de la segunda línea de (5.97) y las expresiones (5.93)—(5.96):

$$A + C = 0; \quad a_k^2 A - b_k^2 C = 0;$$
$$a_k B + b_k D = 1; \quad a_k^2 B - b_k^2 D = 0.$$

De aquí tenemos que: $A = C = 0$.

$$B = b_k^2 : a_k (a_k^2 + b_k^2); \quad D = a_k^2 : b_k (a_k^2 + b_k^2).$$

Según (5.93) hallamos $Y_{2k}(z)$:

$$Y_{2k}(z) = \frac{1}{a_k^2 + b_k^2}\left(\frac{b_k^2}{a_k} \operatorname{sh} a_k z + \frac{a_k^2}{b_k} \operatorname{sen} b_k z\right); \quad (5.102)$$

$$Y'_{2k}(z) = \frac{1}{a_k^2 + b_k^2}(b_k^2 \operatorname{ch} a_k z + a_k^2 \cos b_k z); \quad (5.103)$$

$$Y''_{2k}(z) = \frac{1}{a_k^2 + b_k^2}(a_k b_k^2 \operatorname{sh} a_k z - a_k^2 b_k \operatorname{sen} b_k z); \quad (5.104)$$

$$Y'''_{2k}(z) = \frac{1}{a_k^2 + b_k^2}(a_k^2 b_k^2 \operatorname{ch} a_k z - a_k^2 b_k^2 \cos b_k z). \quad (5.105)$$

Análogamente se calculan las soluciones particulares $Y_{3k}(z)$ e $Y_{4k}(z)$:

$$Y_{3k}(z) = \frac{1}{a_k^2 + b_k^2}(\operatorname{ch} a_k z - \cos b_k z); \tag{5.106}$$

$$Y'_{3k}(z) = \frac{1}{a_k^2 + b_k^2}(a_k \operatorname{sh} a_k z + b_k \operatorname{sen} b_k z); \tag{5.107}$$

$$Y''_{3k}(z) = \frac{1}{a_k^2 + b_k^2}(a_k^2 \operatorname{ch} a_k z + b_k^2 \cos a_k z); \tag{5.108}$$

$$Y'''_{3k}(z) = \frac{1}{a_k^2 + b_k^2}(a_k^3 \operatorname{sh} a_k z - b_k^3 \operatorname{sen} b_k z); \tag{5.109}$$

$$Y_{4k}(z) = \frac{1}{a_k^2 + b_k^2}\left(\frac{\operatorname{sh} a_k z}{a_k} - \frac{\operatorname{sen} b_k z}{b_k}\right) \tag{5.110}$$

$$Y'_{4k}(z) = \frac{1}{a_k^2 + b_k^2}(\operatorname{ch} a_k z - \cos b_k z); \tag{5.111}$$

$$Y''_{4k}(z) = \frac{1}{a_k^2 + b_k^2}(a_k \operatorname{sh} a_k z + b_k \operatorname{sen} b_k z); \tag{5.112}$$

$$Y'''_{4k}(z) = \frac{1}{a_k^2 + b_k^2}(a_k^2 \operatorname{ch} a_k z + b_k^2 \cos b_k z). \tag{5.113}$$

Entre las funciones $Y_{1k}(z) - Y_{4k}(z)$ existe la siguiente dependencia diferencial:

$$\left.\begin{aligned} Y'_{1k}(z) &= a_k^2 b_k^2 Y_{4k}(z) = s_k^4 Y_{4k}(z); \\ Y'_{2k}(z) &= Y_{1k}(z); \\ Y'_{3k}(z) &= Y_{2k}(z) + (a_k^2 - b_k^2) Y_{4k}(z); \\ Y'_{4k}(z) &= Y_{3k}(z). \end{aligned}\right\} \tag{5.114}$$

La integral (5.93) expresada a través de estas funciones será:

$$y_k(z) = A_1 Y_{1k}(z) + B_1 Y_{2k}(z) + C_1 Y_{3k}(z) + D_1 Y_{4k}(z). \tag{5.115}$$

Sus derivadas son:

$$y'_k(z) = A_1 Y'_{1k}(z) + B_1 Y'_{2k}(z) + C_1 Y'_{3k}(z) + D_1 Y'_{4k}(z); \tag{5.116}$$

$$y''_k(z) = A_1 Y''_{1k}(z) + B_1 Y''_{2k}(z) + C_1 Y''_{3k}(z) + D_1 Y''_{4k}(z); \tag{5.117}$$

$$y'''_k(z) = A_1 Y'''_{1k}(z) + B_1 Y'''_{2k}(z) + C_1 Y'''_{3k}(z) + D_1 Y'''_{4k}(z). \tag{5.118}$$

Expresemos las constantes de integración en (5.115) por medio de los parámetros iniciales para $z = 0$:

$$y_k(0) = A_1; \quad y''_k(0) = -\frac{M_k(0)}{EJ} = C_1;$$

$$y'_k(0) = B_1; \quad y'''_k(0) = -\frac{Q_k(0)}{EJ} = D_1.$$

Por consiguiente,

$$y_k(z) = y_k(0)\,Y_{1k}(z) + y_k'(0)\,Y_{2k}(z) - \\ - \frac{M_k(0)}{EJ}\,Y_{3k}(z) - \frac{Q_k(0)}{EJ}\,Y_{4k}(z); \tag{5.119}$$

$$y_k'(z) = y_k(0)\,Y_{1k}'(z) + y_k'(0)\,Y_{2k}'(z) - \\ - \frac{M_k(0)}{EJ}\,Y_{3k}'(z) - \frac{Q_k(0)}{EJ}\,Y_{4k}'(z); \tag{5.120}$$

$$M_k(z) = -EJy_k(0)\,Y_{1k}''(z) - EJy_k'(0)\,Y_{2k}''(z) + \\ + M_k(0)\,Y_{3k}''(z) + Q_k(0)\,Y_{4k}''(z); \tag{5.121}$$

$$Q_k(z) = -EJy_k(0)\,Y_{1k}'''(z) - EJy_k'(0)\,Y_{2k}'''(z) + \\ + M_k(0)\,Y_{3k}'''(z) + Q_k(0)\,Y_{4k}'''(z). \tag{5.122}$$

Es fácil convencerse de que para $R \to 0$, cuando $a_k = b_k = s_k$, las expresiones (5.119)—(5.122) se transforman, respectivamente, en las expresiones (5.51)—(5.54).

Ejemplo 29. Determinar las frecuencias y las formas principales de oscilaciones de las vigas representadas en la fig. 105, *a* y *b*.

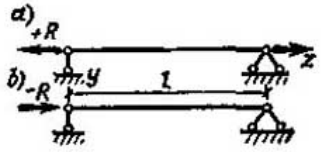


Fig. 105

Parámetros iniciales:

$$y_k(0) = 0; \quad y_k''(0) = ?; \quad M_k(0) = 0; \quad Q_k(0) = ?$$

Condiciones de frontera en el extremo derecho:

$$y_k(l) = 0; \quad y_k''(l) = -M_k(l) : EJ = 0.$$

Condiciones de frontera según (5.119) y (5.121):

$$y_k(l) = y_k'(0)\,Y_{2k}(l) - \frac{Q_k(0)}{EJ}\,Y_{4k}(l) = 0; \tag{a}$$

$$y_k''(l) = y_k'(0)\,Y_{2k}''(l) - \frac{Q_k(0)}{EJ}\,Y_{4k}''(l) = 0. \tag{b}$$

Las ecuaciones (a) y (b) son homogéneas; igualamos su determinante a cero:

$$D = -Y_{2k}(l)\,Y_{4k}''(l) + Y_{2k}''(l)\,Y_{4k}(l) = 0. \tag{c}$$

O bien, tomando en consideración (5.102), (5.104), (5.110) y (5.112), tenemos que

$$-\frac{1}{(a_k^2+b_k^2)^2}\left[\left(\frac{b_k^2}{a_k}\operatorname{sh} a_k l + \frac{a_k^2}{b_k}\operatorname{sen} b_k l\right)(a_k \operatorname{sh} a_k l + \right.$$

$$\left. + b_k \operatorname{sen} b_k l) - \left(\frac{\operatorname{sh} a_k l}{a_k} - \frac{\operatorname{sen} b_k l}{b_k}\right)(a_k b_k^2 \operatorname{sh} a_k l - a_k^2 b_k \operatorname{sen} b_k l)\right] = 0.$$

Hechas las transformaciones, tendremos lo siguiente:

$$\operatorname{sh} a_k l \operatorname{sen} b_k l = 0.$$

Puesto que $\operatorname{sh} a_k l \neq 0$, entonces $\operatorname{sen} b_k l = 0$ y $b_k l = k\pi$.

Considerando (5.91) y (5.21), se obtendrá:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{k^2\pi^4}{l^4} \cdot \frac{EJ}{m} \pm \frac{R}{m} \cdot \frac{k^2\pi^2}{l^2}}. \tag{5.123}$$

De esta fórmula se desprende que la fuerza de tracción (signo superior) aumenta la frecuencia, y la de compresión, la disminuye. Señalemos que para la fuerza crítica $R_e = k^2\pi^2 EJ/l^2$ la frecuencia de oscilaciones es igual a cero. En esto se funda el método dinámico de investigación de la estabilidad.

Hallemos las formas principales según (5.119):

$$y_k(z) = y_k'(0)\, Y_{2k}(z) - \frac{Q_k(0)}{EJ} Y_{4k}(z). \tag{d}$$

Considerando (a) resulta:

$$y_k(z) = \frac{y_k'(0)}{Y_{4k}(l)} [Y_{2k}(z)\, Y_{4k}(s) - Y_{2k}(l)\, Y_{4k}(z)].$$

Una vez hechas las transformaciones, teniendo en cuenta (5.102) y (5.110), obtendremos:

$$y_k(z) = C \operatorname{sen} b_k z = C \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l}, \tag{e}$$

donde C es cierta constante.

2. Movimientos forzados con la carga $q(c, t)$. Utilizando la descomposición respecto a las formas principales consideramos que:

$$y_k(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(z)\, F_k(t); \tag{5.124}$$

$$q(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} m(z)\, y_k(z)\, q_k(t). \tag{5.125}$$

Sustituyendo uno a uno los sumandos en la ecuación (5.82) y dividiendo lo obtenido entre $m(z)\, y_k(z)\, F_k(t)$ se obtiene lo siguiente:

$$\frac{[EJ_k(z)\, y_k''(z)]''}{m(z)\, y_k(z)} + \frac{\ddot{F}_k(t)}{F_k(t)} \mp R \frac{y_k''(z)}{m(z)\, y_k(z)} = -\frac{q_k(t)}{F_k(t)}. \tag{5.126}$$

Tomando en consideración (5.85), tenemos

$$\ddot{F}_k(t) + \omega_k^2 F_k(t) = q_k(t). \tag{5.127}$$

Su integral es

$$F_k(t) = A_k \operatorname{sen} \omega_k t + B_k \cos \omega_k t + \int_0^t \frac{-q_k(u) \operatorname{sen} \omega_k (t-u)\, du}{\omega_k} \tag{5.128}$$

3. Oscilaciones forzadas con la carga vibratoria $q(z)$ sen θt. Examinemos las vigas de sección constante con masa uniformemente distribuida. Para tales vigas la ecuación diferencial (5.82) será como

sigue:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} \mp \frac{R}{EJ} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{m}{EJ} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{-q(z) \operatorname{sen} \theta t}{EJ}. \qquad (5.129)$$

La solución particular de esta ecuación la buscaremos en la siguiente forma:

$$y(z, t) = y(z) \operatorname{sen} \theta t. \qquad (5.130)$$

Sustituyendo su valor en (5.129) se obtendrá:

$$y^{IV}(z) \mp \frac{R}{EJ} y''(z) - s^4 y(z) = -\frac{q(z)}{EJ}, \qquad (5.131)$$

siendo $s^4 = m\theta^2 : EJ$.
Ecuación característica:

$$r^4 \mp \frac{R}{EJ} r^2 - s^4 = 0.$$

Sus raíces son

$$r_{1,2} = \pm a; \; r_{3,4} = \pm bi, \qquad (5.132)$$

donde

$$a = \sqrt{\pm \frac{R}{2EJ} + \sqrt{\frac{R^2}{4(EJ)^2} + s^4}};$$

$$b = \sqrt{\mp \frac{R}{2EJ} + \sqrt{\frac{R^2}{4(EJ)^2} + s^4}}. \qquad (5.133)$$

Los signos superiores son para la viga sometida a la acción combinada de tracción y flexión y los signos inferiores, para la viga comprimida. Escribamos la integral (5.131) para $q(z) = q$ a través de las integrales particulares que satisfacen a la matriz unitaria (5.97) en la siguiente forma:

$$y(z) = aY_1(z) + bY_2(z) + cY_3(z) + dY_4(z) + \frac{q}{s^4 EJ}, \qquad (5.134)$$

donde

$$Y_1(z) = \frac{1}{a^2 + b^2}(b^2 \operatorname{ch} az + a^2 \cos bz); \qquad (5.135)$$

$$Y_2(z) = \frac{1}{a^2 + b^2}\left(\frac{b^2}{a} \operatorname{sh} az + \frac{a^2}{b} \operatorname{sen} bz\right); \qquad (5.136)$$

$$Y_3(z) = \frac{1}{a^2 + b^2}(\operatorname{ch} az - \cos bz); \qquad (5.137)$$

$$Y_4(z) = \frac{1}{a^2 + b^2}\left(\frac{\operatorname{sh} az}{a} - \frac{\operatorname{sen} bz}{b}\right). \qquad (5.138)$$

Las dependencias diferenciales entre estas funciones se dan en (5.114). Hagamos la diferenciación de (5.134) consecutivamente:

$$y'(z) = aY_1'(z) + bY_2'(z) + cY_3'(z) + dY_4'(z); \qquad (5.139)$$

$$y''(z) = aY_1''(z) + bY_2''(z) + cY_3''(z) + dY_4''(z); \qquad (5.140)$$

$$y'''(z) = aY_1'''(z) + bY_2'''(z) + cY_3'''(z) + dY_4'''(z). \qquad (5.141)$$

Expresemos las constantes de integración (5.134) a través de los parámetros iniciales. A base de (5.134) y (5.139)—(5.141) podemos escribir que

$$y(0) = a + \frac{q}{s^4 EJ}; \quad y''(0) = -\frac{M(0)}{EJ} = c;$$

$$y'(0) = b; \quad y'''(0) = -\frac{Q(0)}{EJ} = d.$$

De aquí se obtiene lo siguiente:

$$a = y(0) - \frac{q}{s^4 EJ}; \quad b = y'(0); \quad c = -\frac{M(0)}{EJ}; \quad d = -\frac{Q(0)}{EJ}.$$

Ahora (5.134) será:

$$y(z) = y(0)\,Y_1(z) + y'(0)\,Y_2(z) - \frac{M(0)}{EJ}\,Y_3(z) -$$

$$- \frac{Q(0)}{EJ}\,Y_4(z) - \frac{q}{s^4 EJ}\,[Y_1(z) - 1]; \qquad (5.142)$$

$$y'(z) = y(0)\,Y_1'(z) + y'(0)\,Y_2'(z) - \frac{M(0)}{EJ}\,Y_3'(z) -$$

$$- \frac{Q(0)}{EJ}\,Y_4'(z) - \frac{q}{s^4 EJ}\,Y_1'(z); \qquad (5.143)$$

$$M(z) = -EJy(0)\,Y_1''(z) - EJy'(0)\,Y_2''(z) +$$

$$+ M(0)\,Y_3''(z) + Q(0)\,Y_4''(z) + \frac{q}{s^4}\,Y_1''(z); \qquad (5.144)$$

$$Q(z) = -EJ(0)\,Y_1'''(z) - EJy'(0)\,Y_2'''(z) + M(0)\,Y_3'''(z) +$$

$$+ Q(0)\,Y_4'''(z) + \frac{q}{s^4}\,Y_1'''(z). \qquad (5.145)$$

Las ecuaciones obtenidas son válidas con la carga ininterrumpida, para toda la viga.

Si para la coordenada $z = a_i$ hay las siguientes discontinuidades:

$\Delta y(a_i)$, la discontinuidad en la línea elástica;

$\Delta y'(a_i)$, la discontinuidad en la primera derivada;

$\Delta M(a_i)$, la discontinuidad en el diagrama de los momentos flectores;

$\Delta Q(a_i)$, la discontinuidad en el diagrama de las fuerzas transversales;

$\Delta q(a_i)$, la discontinuidad en la intensidad de la carga q,

entonces es necesario añadir respectivamente a las expresiones (5.142)—(5.145) a base del principio de superposición, y tomando en consideración que la distancia desde las discontinuidades hasta la

sección con la coordenada z será $z - a_i$, lo siguiente:

$$\Delta y = \Delta y(a_i)\, Y_1(z-a_i) + \Delta y'(a_i)\, Y_2(z-a_i) - \\ - \frac{\Delta M(a_i)}{EJ} Y_3(z-a_i) - \frac{\Delta Q(a_i)}{EJ} Y_4(z-a_i) - \\ - \frac{\Delta q(a_i)}{s^4 EJ} [Y_1(z-a_i) - 1]; \tag{5.146}$$

$$\Delta y' = \Delta y(a_i)\, Y_1'(z-a_i) + \Delta y'(a_i)\, Y_2'(z-a_i) - \\ - \frac{\Delta M(a_i)}{EJ} Y_3'(z-a_i) - \frac{\Delta Q(a_i)}{EJ} Y_4'(z-a_i) - \\ - \frac{\Delta q(a_i)}{s^4 EJ} Y_1'(z-a_i); \tag{5.147}$$

$$\Delta M = -EJ\, \Delta y(a_i)\, Y_1''(z-a_i) - EJ\, \Delta y'(a_i)\, Y_2''(z-a_i) + \\ + \Delta M(a_i)\, Y_3''(z-a_i) + \Delta Q(a_i)\, Y_4''(z-a_i) + \\ + \frac{\Delta q(a_i)}{s^4} Y_1''(z-a_i); \tag{5.148}$$

$$\Delta Q = -EJ\, \Delta y(a_i)\, Y_1'''(z-a_i) - EJ\, \Delta y'(a_i)\, Y_2'''(z-a_i) + \\ + \Delta M(a_i)\, Y_3'''(z-a_i) + \Delta Q(a_i)\, Y_4'''(z-a_i) + \\ + \frac{\Delta q(a_i)}{s^4} Y_1'''(z-a_i). \tag{5.149}$$

A partir de las expresiones (5.142)—(5.145) y (5.146)—(5.149) se puede hallar todos los datos necesarios para el cálculo. Para $R \to 0$, cuando $a = b = s$, las expresiones (5.142)—(5.149) se transforman respectivamente en las expresiones (5.66)—(5.73).

§ 49. OSCILACIONES LONGITUDINALES DE BARRAS RECTAS.

1. Oscilaciones libres. Designemos el desplazamiento longitudinal de la sección con la coordenada z por medio de $u(z, t)$, y de la

Fig. 106

sección contigua con la coordenada $z + dz$, respectivamente por medio de $u(z + dz, t)$ (fig. 106). El alargamiento relativo de un elemento infinitesimal entre estas dos secciones será:

$$\varepsilon = \frac{u(z+dz, t) - u(z, t)}{dz} = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Respectivamente,
la tensión es

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\partial u}{\partial z};$$

la fuerza longitudinal,

$$N = \sigma F = EF\frac{\partial u}{\partial z}. \tag{5.150}$$

Examinemos el equilibrio del elemento infinitesimal (fig. 106):

$$-N + \left(N + \frac{\partial N}{\partial z}dz\right) - mdz\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

De aquí se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial N}{\partial z} = m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{5.151}$$

donde m es la masa de la barra por unidad de su longitud. Considerando (5.150) tendremos la ecuación diferencial de los desplazamientos longitudinales:

$$E\left[\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + F\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] = m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{5.152}$$

Para una barra de sección constante tenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{5.153}$$

donde

$$c^2 = \frac{EF}{m} = \frac{Eg}{\gamma}. \tag{5.154}$$

Señalemos, ante todo, que la expresión

$$u = f(z - ct) \tag{5.155}$$

satisface a la ecuación (5.153) para cualquier forma de la función $f(z - ct)$.

Veamos el valor de la función u para $z + dz$ y $t + dt$:

$$u_1 = f[(z + dz) - c(t + dt)].$$

Hallemos la condición, cuando el desplazamiento u_1 de la sección con la coordenada $z + dz$ para el tiempo $t + dt$ será igual al desplazamiento u de la sección con la coordenada z para el tiempo t, lo que permitirá determinar el movimiento de la onda longitudinal de desplazamientos a lo largo de la barra. Es evidente, que para este fin debe cumplirse la igualdad

$$dz - c\,dt = 0.$$

Aquí dz es el camino recorrido por la onda durante el tiempo dt.

Por consiguiente,

$$\frac{dz}{dt} = c.$$

Esto quiere decir que el valor de c determinado según (5.154) es la velocidad de propagación de la onda longitudinal por la barra que corresponde a la ley (5.155) independientemente del tipo de la función $f(z - ct)$.

Si en vez de $f(z - ct)$ se toma la función $\varphi(z + ct)$, ésta también satisface a la ecuación (5.153), a diferencia de que la velocidad para ella será negativa, es decir, dirigida hacia el otro lado.

Busquemos ahora la integral de la ecuación (5.153) en la siguiente forma:

$$u(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(z)\, T_k(t). \tag{5.156}$$

Sustituyendo una integral particular (5.156) en la ecuación (5.153) obtendremos

$$U_k(z)\, \ddot{T}_k(t) = c^2 U_z''(z)\, T_k(t).$$

O bien, separando las variables tenemos

$$\ddot{T}_k(t) : T_k(t) = c^2 [U_k''(z) : U_k(z)]. \tag{5.157}$$

El primer miembro de la igualdad no depende de z, mientras que el segundo no depende de t. Por eso cada uno de ellos es igual a una misma magnitud constante, la cual designemos por $-\omega_k^2$. Con esto tendremos dos ecuaciones diferenciales simples:

$$1)\ \ddot{T}_k(t) + \omega_k^2 T_k(t) = 0; \tag{5.158}$$

su integral es

$$T_k = A_k \operatorname{sen} \omega_k t + B_k \cos \omega_k t; \tag{5.159}$$

las constantes A_k y B_k son determinadas por las condiciones iniciales del movimiento para $t = 0$:

$$2)\ \ U_k''(z) + \left(\frac{\omega_k}{c}\right)^2 U_k(z) = 0; \tag{5.160}$$

su integral es

$$U_k(z) = C_k \operatorname{sen} \frac{\omega_k}{c} z + D_k \cos \frac{\omega_k}{c} z. \tag{5.161}$$

Aquí las constantes arbitrarias son determinadas por las condiciones de frontera en los extremos de la barra, a saber:

para el extremo fijado

$$U_k = 0; \tag{5.162}$$

para el extremo libre

$$N_k = EFU_k' = 0 \tag{5.163}$$

o simplemente $U_k' = 0$.

Prestemos la atención al hecho de que c tiene igual valor para todas U_k.

De la expresión (5.161) se desprende que para una z concreta las oscilaciones se realizan en el tiempo según la ley armónica con la frecuencia ω_k.

Si a z en (5.161) se agrega la magnitud $l_k = 2\pi c/\omega_k$, entonces $U_k(z + l_k) = U_k(z)$. Por consiguiente, l_k es la longitud de onda de las oscilaciones longitudinales $U_k(z)$ y c, la velocidad de su propagación, igual para todas las componentes del desplazamiento $u(z, t)$ en (5.156).

Expresemos las constantes C_k y D_k en la ecuación (5.161) a través de los parámetros iniciales $U_k(0)$ y $N_k(0)$. Con este propósito compongamos la siguiente expresión:

$$N_k(z) = EFU_k'(z) = EF\left[C_k\frac{\omega_k}{c}\cos\frac{\omega_k}{c}z - \right.$$

$$\left. - D_k\frac{\omega_k}{c}\operatorname{sen}\frac{\omega_k z}{c}\right]. \qquad (5.164)$$

Escribimos las condiciones de frontera en el extremo izquierdo, donde $z = 0$: $U_k(0) = D_k$;

$$N_k(0) = EFC_k\frac{\omega_k}{c}.$$

De aquí se obtiene:

$$C_k = N_k(0)\, c : EF\omega_k; \quad D_k = U_k(0).$$

Después de esto las ecuaciones (5.161) y (5.164) serán las siguientes:

$$U_k(z) = U_k(0)\cos\frac{\omega_k}{c}z + \frac{N_k(0)}{EF}\cdot\frac{c}{\omega_k}\operatorname{sen}\frac{\omega_k}{c}z; \qquad (5.165)$$

$$N_k(z) = -EF\frac{\omega_k}{c}U_k(0)\operatorname{sen}\frac{\omega_k}{c}z + N_k(0)\cos\frac{\omega_k}{c}z. \qquad (5.166)$$

Uno de los parámetros iniciales, $U_k(0)$ o $N_k(0)$, siempre es conocido, y el otro se determina según las condiciones de frontera en el extremo derecho de la barra para $z = l$.

2. Oscilaciones forzadas para la carga longitudinal P sen θt. Hallaremos la solución particular de la ecuación (5.153) en la siguiente forma:

$$u(z, t) = U(z)\operatorname{sen}\theta t. \qquad (5.167)$$

Introduciéndola en la ecuación (5.153) se obtiene:

$$U''(z) + \left(\frac{\theta}{c}\right)^2 U(z) = 0. \qquad (5.168)$$

Esta ecuación coincide con la ecuación (5.160), cuando en éste se sustituye ω_k por θ, lo que permite a base de (5.165) y (5.166) escribir las expresiones acabadas:

$$U(z) = U(0)\cos\frac{\theta}{c}z + \frac{N(0)}{EF}\frac{c}{\theta}\operatorname{sen}\frac{\theta}{c}z; \qquad (5.169)$$

$$N(z) = -U(0)\,EF\frac{\theta}{c}\operatorname{sen}\frac{\theta}{c}z + N(0)\cos\frac{\theta}{c}z. \qquad (5.170)$$

El aquellos casos, cuando en la barra hay cargas longitudinales en los puntos intermedios entre los extremos o en alguna parte está dado el desplazamiento forzado $\Delta U \operatorname{sen} \theta t$, las expresiones (5.169) y (5.170) son verídicas sólo para el primer tramo.

Si para $z = a_i$ ($i = 1, 2, \ldots$ según el número de tramos) está aplicada la carga longitudinal $P_i \operatorname{sen} \theta t$ o tiene lugar el desplazamiento forzado $\Delta U\ (a_i) \operatorname{sen} \theta t$, entonces a las expresiones (5.169)—(5.170) se deben añadir las agregaciones siguientes:

$$\Delta U\ (z) = \Delta U\ (a_i) \cos \frac{\theta}{c} (z - a_i) + \\ + \frac{\Delta N\ (a_i)}{EF} \frac{c}{\theta} \operatorname{sen} \frac{\theta}{c} (z - a_i); \qquad (5.171)$$

$$\Delta N\ (z) = -\Delta U\ (a_i)\ EF \frac{\theta}{c} \operatorname{sen} \frac{\theta}{c} (z - a_i) + \\ + \Delta N\ (a_i) \cos \frac{\theta}{c} (z - a_i). \qquad (5.172)$$

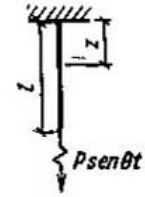


Fig. 107

Ejemplo 30. Determinar en forma general las frecuencias y las formas principales de oscilaciones propias y escribir las expresiones $U\ (z)$ y $N\ (z)$ debidas a la fuerza $P \operatorname{sen} \theta t$ (fig. 107).

1. OSCILACIONES PROPIAS

Parámetros iniciales para $z = 0$: $U_k\ (0) = 0$; $N_k\ (0) = ?$
Según las expresiones (5.165) — (5.166) se obtiene:

$$U_k\ (z) = \frac{N_k\ (0)}{EF} \frac{c}{\omega_k} \operatorname{sen} \frac{\omega_k}{c} z; \qquad (a)$$

$$N_k\ (z) = N_k\ (0) \cos \frac{\omega_k}{c} z. \qquad (b)$$

La condición de frontera en el otro extremo de la barra para $z = l$ es

$$N_k\ (l) = N_k\ (0) \cos \frac{\omega_k}{c} l = 0.$$

De aquí se obtiene $\cos \frac{\omega_k}{c} l = 0$, y, por consiguiente, $\frac{\omega_k l}{c} = k \frac{\pi}{2}$.
Definitivamente,

$$\omega_k = \frac{kc}{l} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{k\pi}{2l} \sqrt{\frac{EF}{m}}$$

para $k = 1, 3, 5 \ldots$ (c)

La forma principal de oscilaciones según (a) es

$$U_k\ (z) = A_k \operatorname{sen} \frac{\omega_k}{c} z = A_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2} \frac{z}{l}.$$

2. OSCILACIONES FORZADAS

Parámetros iniciales para $z = 0$: $U\ (0) = 0$; $N\ (0) = ?$ Según las expresiones (5.169)—(5.170) tenemos:

$$U\ (z) = \frac{N\ (0)}{EF} \frac{c}{\theta} \operatorname{sen} \frac{\theta}{c} z; \qquad (d)$$

$$N\ (z) = N\ (0) \cos \frac{\theta}{c} z. \qquad (e)$$

La condición de frontera en el otro extremo de la barra para $z = l$ es

$$N(l) = N(0) \cos \frac{\theta}{c} l = P.$$

De aquí se obtiene que

$$N(0) = P : \cos \frac{\theta}{c} l.$$

Ahora las ecuaciones (d) y (e) serán las siguientes:

$$U(z) = \frac{P}{EF} \frac{c}{\theta} \operatorname{sen} \frac{\theta}{c} z : \cos \frac{\theta}{c} l; \tag{f}$$

$$N(z) = P \cos \frac{\theta}{c} z : \cos \frac{\theta}{c} l. \tag{g}$$

CAPÍTULO 6 * CÁLCULO DINÁMICO DE VIGAS DE UN TRAMO DE SECCIÓN CONSTANTE CON MASA CONSTANTE

§ 50. OSCILACIONES PROPIAS DE VIGAS DE UN TRAMO. Examinemos la determinación de las frecuencias y las formas principales de frecuencias que les corresponden, de algunas vigas de un tramo.

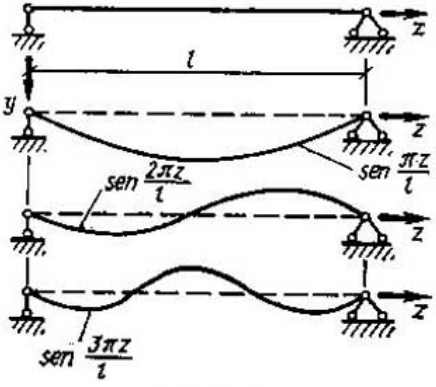


Fig. 108

1. **Viga sobre dos apoyos** (fig. 108). Parámetros iniciales:

$$y_k(0) = 0; \quad y_k'(0) = ?; \quad M_k(0) = 0; \quad Q_k(0) = ?$$

Según las expresiones (5.51) y (5.53) se obtiene:

$$y_k(z) = \frac{y_k'(0)}{s_k} B_{s_k z} - \frac{Q_k(0)}{s_k^3 EJ} D_{s_k z};$$

$$M_k(z) = -EJ s_k y_k'(0) D_{s_k z} + \frac{Q_k(0)}{s_k} B_{s_k z}. \tag{6.1}$$

Condiciones de frontera en el extremo derecho de la viga para $z = l$:

$$\frac{y_k'(0)}{s_k} B_{\lambda_k} - \frac{Q_k(0)}{s_k^3 EJ} D_{\lambda_k} = 0;$$

$$-EJ s_k y_k'(0) D_{\lambda_k} + \frac{Q_k(0)}{s_k} B_{\lambda_k} = 0. \tag{6.2}$$

Igualamos a cero el determinante de estas ecuaciones:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{B_{\lambda_k}}{s_k} & -\frac{D_{\lambda_k}}{s_k^3 EJ} \\ -s_k EJ D_{\lambda_k} & \frac{B_{\lambda_k}}{s_k} \end{vmatrix} = \frac{1}{s_k^2}(B_{\lambda_k}^2 - D_{\lambda_k}^2) = 0.$$

O bien, tomando en consideración (5.49),

$$\left(\frac{\operatorname{sh}\lambda_k + \operatorname{sen}\lambda_k}{2}\right)^2 - \left(\frac{\operatorname{sh}\lambda_k - \operatorname{sen}\lambda_k}{2}\right)^2 = 0.$$

De aquí tenemos que $\operatorname{sh}\lambda_k \operatorname{sen}\lambda_k = 0$. Puesto que $\operatorname{sh}\lambda_k \neq 0$, entonces

$$\operatorname{sen}\lambda_k = \operatorname{sen} s_k l = 0 \text{ y } s_k l = k\pi. \tag{6.3}$$

La ecuación de frecuencias (6.3), al igual que cualquiera otra obtenida al desarrollar un determinante análogo, también se llama *característica*. A partir de ella se hallan los valores propios de $\lambda_k = s_k l$, a través de los cuales según (5.55) se calculan las frecuencias de oscilaciones libres:

$$\omega_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}. \tag{6.4}$$

Para determinar la forma principal, representemos primeramente la primera ecuación (6.1) en la siguiente forma:

$$y_k(z) = \frac{Q_k(0)}{s_k^3 EJ}\left(\frac{y_k'(0)\, s_k^2 EJ}{Q_k(0)} B_{s_k z} - D_{s_k z}\right).$$

A partir de cualquiera ecuación (6.2), tomando en consideración que $\operatorname{sen} s_k l = 0$, se obtiene que

$$y_k'(0)\, s_k^2 EJ : Q_k(0) = D_{\lambda_k} : B_{\lambda_k} = 1. \tag{6.5}$$

Ahora

$$y_k(z) = A_k (B_{s_k z} - D_{s_k z}) = A_k \operatorname{sen} s_k z,$$

donde $A_k = Q_k(0) : s_k^3 EJ$ es una magnitud constante. Definitivamente tenemos

$$y_k(z) = A_k \operatorname{sen}\frac{k\pi z}{l}. \tag{6.6}$$

2. Viga empotrada por ambos extremos (fig. 109). Parámetros iniciales para $z = 0$:

$$y_k(0) = 0; \quad y'_k(0) = 0; \quad M_k(0) = ?; \quad Q_k(0) = ?$$

Según las expresiones (5.51) y (5.52) obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} y_k(z) &= -\frac{M_k(0)}{s_k^2 EJ} C_{s_k z} - \frac{Q_k(0)}{s_k^3 EJ} D_{s_k z}; \\ y'_k(z) &= -\frac{M_k(0)}{s_k EJ} B_{s_k z} - \frac{Q_k(0)}{s_k^2 EJ} C_{s_k z}. \end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

Condiciones de frontera en el extremo derecho:

$$\left.\begin{aligned} y_k(l) &= -\frac{M_k(0)}{s_k^2 EJ} C_{\lambda_k} - \frac{Q_k(0)}{s_k^3 EJ} D_{\lambda_k} = 0; \\ y'_k(l) &= -\frac{M_k(0)}{s_k EJ} B_{\lambda_k} - \frac{Q_k(0)}{s_k^2 EJ} C_{\lambda_k} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

Igualamos a cero el determinante de estas ecuaciones:

$$D = \begin{vmatrix} C_{\lambda_k} & \frac{D_{\lambda_k}}{s_k} \\ B_{\lambda_k} & \frac{C_{\lambda_k}}{s_k} \end{vmatrix} = \frac{1}{s_k}\left(C_{\lambda_k}^2 - B_{\lambda_k} D_{\lambda_k}\right) = 0.$$

Una vez sustituidos por los valores de B_{λ_k}, C_{λ_k} y D_{λ_k} y hechas

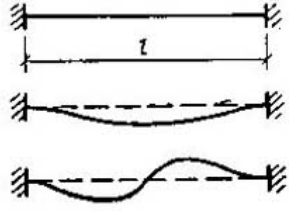


Fig. 109

las transformaciones simples, obtendremos la ecuación característica

$$\operatorname{ch}\lambda_k \cos\lambda_k = 1 \text{ o bien } \operatorname{th}\frac{\lambda_k}{2} = \operatorname{tg}\frac{\lambda_k}{2}. \tag{6.9}$$

Las raíces de esta ecuación son:

$$\lambda_1 = s_1 l = 4{,}7300; \quad \lambda_2 = s_2 l = 7{,}8532;$$

$$\lambda_3 = s_3 l = 10{,}996; \quad \lambda_4 = s_4 l = 14{,}137, \text{ y para } k > 4$$

$$\lambda_k = s_k l = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi.$$

Frecuencias de oscilaciones según (5.55):

$$\omega_1 = \frac{4{,}7300^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}; \quad \omega_2 = \frac{7{,}8532^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}. \tag{6.10}$$

Comparando (6.10) con (6.4), para $k = 1,2$ podemos determinar que las frecuencias de la viga empotrada por ambos extremos son mayores que las frecuencias de una viga simple. Los enlaces complementarios aumentan la rigidez de la viga y, por consiguiente, los valores de las frecuencias de oscilaciones libres.

Representemos la forma principal (6.7) así:

$$y_k(z) = -\frac{Q_k(0)}{s_k^3 EJ}\left[\frac{M_k(0)\, s_k}{Q_k(0)} C_{s_k z} + D_{s_k z}\right].$$

De la primera ecuación (6.8) se tiene lo siguiente:

$$M_k(0)\, s_k : Q_k(0) = -D_{\lambda_k} : C_{\lambda_k}.$$

Ahora

$$y_k(z) = \frac{Q_k(0)}{s_k^3 EJ}\left[\frac{D_{\lambda_k}}{C_{\lambda_k}} C_{s_k z} - D_{s_k z}\right].$$

Introduciendo los valores de las funciones C y D de (5.49) obtendremos:

$$y_k(z) = B_k\,[(sh\,\lambda_k - \operatorname{sen}\lambda_k)(\operatorname{ch} s_k z - \cos s_k z) - (\operatorname{ch}\lambda_k - \cos\lambda_k)(\operatorname{sh} s_k z - \operatorname{sen} s_k z)], \qquad (6.11)$$

donde, $B_k = Q_k(0) : 2s_k^3 EJ\,(\operatorname{ch}\lambda_k - \cos\lambda_k)$ es un número constante.

Si se aplica la segunda ecuación (6.8), obtenemos:

$$M_k(0)\, s_k : Q_k(0) = -C_{\lambda_k} : B_{\lambda_k},$$

entonces obtendremos la ecuación de la forma principal en otra forma:

$$y_k(z) = \frac{Q_k(0)}{B_{\lambda_k} s_k^3 EJ}\,[(\operatorname{ch}\lambda_k - \cos\lambda_k)(\operatorname{ch} s_k z - \cos s_k z) - (\operatorname{sh}\lambda_k + \operatorname{sen}\lambda_k)(\operatorname{sh} s_k z - \operatorname{sen} s_k z)]. \qquad (6.12)$$

Sin embargo, si se considera (6.9), la ecuación (6.12) se transforma con facilidad en la ecuación (6.11), pero con otra constante B_k.

3. Viga empotrada por el extremo derecho (fig. 110). Parámetros iniciales para $z = 0$: $y_k(0) = ?$; $y_k'(0) = ?$; $M_k(0) = 0$; $Q_k(0) = 0$. Según la expresión (5.51)

$$y_k(z) = y_k(0)\, A_{s_k z} + \frac{y_k'(0)}{s_k} B_{s_k z}. \qquad (6.13)$$

Condiciones de frontera en el extremo derecho de la viga:

$$y_k(l) = y_k(0)\, A_{\lambda_k} + \frac{y_k'(0)}{s_k} B_{\lambda_k} = 0; \qquad (a)$$

$$y_k'(l) = s_k y_k(0)\, D_{\lambda_k} + y_k'(0)\, A_{\lambda_k} = 0. \qquad (b)$$

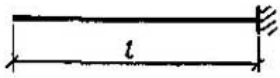


Fig. 110

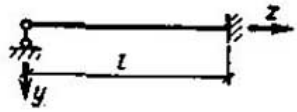


Fig. 111

Igualando a cero el determinante de estas ecuaciones y desarrollándolo se obtendrá la ecuación de frecuencias:

$$\operatorname{ch} \lambda_k \cos \lambda_k = -1. \tag{6.14}$$

Sus raíces son: $\lambda_1 = 1{,}8751$; $\lambda_2 = 4{,}6941$; $\lambda_3 = 7{,}855$; $\lambda_4 = 10{,}996$. Las frecuencias según (5.55) son

$$\omega_1 = \frac{1{,}8751^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}; \quad \omega_2 = \frac{4{,}6941^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}. \tag{6.15}$$

Prestemos atención al hecho de que λ_k y ω_k de la viga con dos empotramientos son iguales aproximadamente a λ_{k+1} y ω_{k+1} de la viga con un empotramiento, por eso

$$\lambda_{k+1} \approx \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \text{ para } k > 4.$$

Representemos la forma principal (6.13) así:

$$y_k(z) = y_k(0)\left[A_{s_k z} + \frac{y_k'(0)}{y_k(0)\, s_k} B_{s_k z}\right].$$

De (a) se tiene que $y_k'(0) : y_k(0)\, s_k = -A_{\lambda_k} : B_{\lambda_k}$.

Ahora la ecuación de la forma principal considerando (5.49) será la siguiente:

$$y_k(z) = C_k\,[(\operatorname{sh}\lambda_k + \operatorname{sen}\lambda_k)(\operatorname{ch} s_k z + \cos s_k z) - (\operatorname{ch}\lambda_k + \cos\lambda_k)(\operatorname{sh} s_k z + \operatorname{sen} s_k z)], \tag{6.16}$$

siendo $C_k = y_k(0) : 4B_{\lambda_k}$ una magnitud constante.

4. Viga empotrada por el extremo derecho con apoyo articulado móvil en el extremo izquierdo (fig. 111). Parámetros iniciales para $z = 0$: $y_k(0) = 0$; $y_k' = ?$; $M_k(0) = 0$; $Q_k(0) = ?$ Según la expresión (5.51)

$$y_k(z) = \frac{y_k'(0)}{s_k} B_{s_k z} - \frac{Q_k(0)}{s_k^3 EJ} D_{s_k z}. \tag{6.17}$$

Condiciones de frontera en el extremo derecho de la viga:

$$y_k(l) = \frac{y_k'(0)}{s_k} B_{\lambda_k} - \frac{Q_k(0)}{s_k^3 EJ} D_{\lambda_k} = 0; \tag{a}$$

$$y_k'(l) = y_k'(0)\, A_{\lambda_k} - \frac{Q_k(0)}{s_k^2 EJ} C_{\lambda_k} = 0. \tag{b}$$

Componiendo el determinante de estas ecuaciones, desarrollándolo e igualándolo a cero se obtendrá la ecuación de frecuencias

$$\text{th}\,\lambda_k = \text{tg}\,\lambda_k. \tag{6.18}$$

La primera raíz, diferente a cero, de esta ecuación es $\lambda_1 = 3{,}9266$, le sigue $\lambda_2 = 7{,}0685$. La primera frecuencia según (5.55) será

$$\omega_1 = \frac{3{,}9266^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

Escribamos la forma principal (6.17) del siguiente modo:

$$Y_k(z) = \frac{y_k'(0)}{s_k}\left[B_{s_k z} - \frac{Q_k(0)}{y_k'(0)\,s_k^2 EJ} D_{s_k z}\right].$$

Considerando (a) y (5.49), tenemos que

$$\begin{aligned} y_k(z) = D_k\,[&(\text{sh}\,\lambda_k - \text{sen}\,\lambda_k)(\text{sh}\,s_k z + \text{sen}\,s_k z) - \\ &- (\text{sh}\,\lambda_k + \text{sen}\,\lambda_k)(\text{sh}\,s_k z - \text{sen}\,s_k z)], \end{aligned} \tag{6.19}$$

donde D_k es un número constante.

Fig. 112

5. Viga sin fijaciones (fig. 112). Parámetros iniciales: $y_k(0) = ?$; $y_k'(0) = ?$; $M_k(0) = 0$; $Q_k(0) = 0$.

Condiciones de frontera en el extremo derecho: $M(l) = 0$; $Q(l) = 0$. Según las expresiones (5.53) y (5.54) tenemos:

$$M_k(l) = -s_k^2 EJ\, y_k(0) C_{\lambda_k} - s_k EJ\, y_k'(0)\, D_{\lambda_k} = 0; \tag{a}$$

$$Q_k(l) = -s_k^3 EJ\, y_k(0)\, B_{\lambda_k} - s_k^3 EJ\, y_k'(0)\, C_{\lambda_k} = 0. \tag{b}$$

El determinante de las ecuaciones lo igualamos a cero:

$$D = s_k^4 EJ\,(C_{\lambda_k}^2 - B_{\lambda_k} D_{\lambda_k}) = 0.$$

Una vez sustituidas las funciones según (5.49) obtenemos

$$\text{ch}\,\lambda_k \cos\lambda_k = 1. \tag{6.20}$$

La ecuación de frecuencias (6.20) coincide con la ecuación (6.9). Esto quiere decir, que las frecuencias de oscilaciones de la viga sin fijaciones y de la viga con dos empotramientos son idénticas.

Formas principales según la ecuación (5.51):

$$y_k(z) = y_k(0)\left[A_{s_k z} + \frac{y_k'(0)}{s_k y_k(0)} B_{s_k z}\right].$$

A partir de (a) tenemos que $y_k'(0) : s_k y_k(0) = -C_{\lambda_k} : D_{\lambda_k}$.

Tabla 3. Ecuaciones características y sus raíces

Núm. de orden	Tipo de fijación		Ecuación característica	Raíces de ecuaciones características		
	del extremo $z=0$	del extremo $z=l$		λ_1	λ_2	λ_k $(k>2)$
1	Libre	Libre	$\operatorname{ch}\lambda\cos\lambda=1$	4,7300	7,8532	$(2k+1)\pi:2$
2	Apoyado	Apoyado	$\operatorname{sen}\lambda=0$	π	2π	$k\pi$
3	Empotrado	Empotrado	$\operatorname{ch}\lambda\cos\lambda=1$	4,7300	7,8532	$(2k+1)\pi:2$
4	Idem	Apoyado	$\operatorname{th}\lambda=\operatorname{tg}\lambda$	3,9266	7,0685	$(4k+1)\pi:4$
5	Idem	Libre	$\operatorname{ch}\lambda\cos\lambda=-1$	1,8751	4,6941	$(2k-1)\pi:2$
6	Libre	Apoyado	$\operatorname{th}\lambda=\operatorname{tg}\lambda$	3,9266	7,0685	$(4k+1)\pi:4$

Tabla 4. Funciones fundamentales

Núm. de orden	$y_k(z)$
1	$(\operatorname{ch}\lambda_k-\cos\lambda_k)\left(\operatorname{sh}\lambda_k\frac{z}{l}+\operatorname{sen}\lambda_k\frac{z}{l}\right)-(\operatorname{sh}\lambda_k-\operatorname{sen}\lambda_k)\times\left(\operatorname{ch}\lambda_k\frac{z}{l}+\cos\lambda_k\frac{z}{l}\right)$
2	$\operatorname{sen}\lambda_k\frac{z}{l}$
3	$(\operatorname{sh}\lambda_k-\operatorname{sen}\lambda_k)\left(\operatorname{ch}\lambda_k\frac{z}{l}-\cos\lambda_k\frac{z}{l}\right)-(\operatorname{ch}\lambda_k-\cos\lambda_k)\times\left(\operatorname{sh}\lambda_k\frac{z}{l}-\operatorname{sen}\lambda_k\frac{z}{l}\right)$
4	$(\operatorname{sh}\lambda_k+\operatorname{sen}\lambda_k)\left(\operatorname{ch}\lambda_k\frac{z}{l}-\cos\lambda_k\frac{z}{l}\right)-(\operatorname{ch}\lambda_k+\cos\lambda_k)\times\left(\operatorname{sh}\lambda_k\frac{z}{l}-\operatorname{sen}\lambda_k\frac{z}{l}\right)$
5	$(\operatorname{sh}\lambda_k+\operatorname{sen}\lambda_k)\left(\operatorname{ch}\lambda_k\frac{z}{l}-\cos\lambda_k\frac{z}{l}\right)-(\operatorname{ch}\lambda_k+\cos\lambda_k)\times\left(\operatorname{sh}\lambda_k\frac{z}{l}-\operatorname{sen}\lambda_k\frac{z}{l}\right)$
6	$(\operatorname{sh}\lambda_k+\operatorname{sen}\lambda_k)\left(\operatorname{ch}\lambda_k\frac{z}{l}+\cos\lambda_k\frac{z}{l}\right)-(\operatorname{ch}\lambda_k+\cos\lambda_k)\times\left(\operatorname{sh}\lambda_k\frac{z}{l}+\operatorname{sen}\lambda_k\frac{z}{l}\right)$

Por consiguiente,

$$y_k(z) = \frac{y_k(0)}{D_{\lambda_k}} (D_{\lambda_k} A_{s_k z} - C_{\lambda_k} B_{s_k z}).$$

Sustituyendo las funciones según (5.49) se obtiene definitivamente:

$$y_k(z) = E_k [(\operatorname{sh} \lambda_k - \operatorname{sen} \lambda_k)(\operatorname{ch} s_k z + \cos s_k z) - (\operatorname{ch} \lambda_k - \cos \lambda_k)(\operatorname{sh} s_k z + \operatorname{sen} s_k z)]. \quad (6.21)$$

6. Resumen de los resultados. Los resultados de las investigaciones realizadas, al igual que sus complementos, se exponen en las tablas 3 y 4 tomadas de [25].

§ 51. CASO GENERAL DE ACCIÓN DE LA CARGA SOBRE LAS VIGAS SIN CONSIDERAR LA RESISTENCIA. Sobre la base de (5.38) se obtiene:

$$y(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(z) \left[A_k \operatorname{sen} \omega_k t + B_k \cos \omega_k t + \int_0^t -q_k(u) \frac{\operatorname{sen} \omega_k (t-u)\, du}{\omega_k} \right], \quad (6.22)$$

donde, según (5.30),

$$q_k(t) = \frac{\int_0^l q(z, t)\, y_k(z)\, dz + \sum P_i(t)\, y_k(z_i)}{m \int_0^l y_k^2(z)\, dz};$$

$y_k(z)$ son las formas principales de oscilaciones de la viga, llamadas funciones fundamentales y determinadas según la tabla 4.

El valor de la integral $\int_0^l y_k^2(z)\, dz$ se determina por la tabla 5.

Al hacer uso de la tabla 5 hay que seguir el siguiente orden:

1. Sustituir en la ecuación de la forma principal $y_k(z)$ todo el argumento $s_k z = \lambda_k \frac{z}{l}$ por la letra x y llamarlo función $U_k(x)$.

2. La diferenciación de $U_k'(x)$, $U_k''(x)$ ... debe realizarse según el nuevo argumento x.

3. Hecha la diferenciación, es necesario sustituir de nuevo x por el argumento $\lambda_k \frac{z}{l}$ reemplazado anteriormente, y luego sustituir z por 0 y l.

Tabla 5. Valores de la integral $\frac{4}{l}\int_0^l y_k^2(z)\,dz$

Núm. de orden	Tipo de fijación		$\frac{4}{l}\int_0^l y_k^2(z)\,dz$
	del extremo $z=0$	del extremo $z=l$	
1	Libre	Libre	$[U_k(0)]^2$
2	Apoyado	Apoyado	$2[U_k'(0)]^2 = -2U_k'(l)\,U_k'''(l)$
3	Empotrado	Empotrado	$[U_k''(0)]^2$
4	Idem	Apoyado	$[U_k''(0)]^2 = -2U_k'(l)\,U_k''(l)$
5	Idem	Libre	$[U_k''(0)]^2 = [U_k(l)]^2$
6	Libre	Apoyado	$[U_k(0)]^2 = -2U_k'(l)\,U_k'''(l)$

Observación. La función $U_k(x)$ se obtiene de la función fundamental $y_k(z)$ sustituyendo $\lambda_k\frac{z}{l}$ por x, y $U_k'(x)$, $U_k''(x)$ y $U_k'''(x)$ son derivadas respecto al nuevo argumento x.

Así, por ejemplo, para la viga apoyada por dos extremos, para la cual según el punto 2 de las tablas 3 y 4, $y_k(z) = \operatorname{sen}\frac{k\pi z}{l}$, procedemos de la siguiente manera:

$$1)\ U_k(x) = \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\frac{k\pi z}{l};$$

$$2)\ U_k'(x) = \cos x = \cos\frac{k\pi z}{l};$$

$$U_k''(x) = -\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}\frac{k\pi z}{l};$$

$$U_k'''(x) = -\cos x = -\cos\frac{k\pi z}{l}.$$

De acuerdo con la segunda línea de la tabla 5

$$\int_0^l \operatorname{sen}^2\frac{k\pi z}{l}\,dz = \frac{l}{2}\left(\cos\frac{k\pi 0}{l}\right)^2 = \frac{l}{2}$$

o bien

$$\int_0^l \operatorname{sen}^2\frac{k\pi z}{l}\,dz = -\frac{l}{2}\cos\frac{k\pi l}{l}\left(-\cos\frac{k\pi l}{l}\right) = \frac{l}{2}.$$

§ 52. CÁLCULO DE UNA VIGA SIMPLE A LA ACCIÓN DE UNA FUERZA INSTANTÁNEA SIN CONSIDERAR LAS RESISTENCIAS (fig. 113). Formas principales de oscilaciones de tal viga:

$$y_k(z) = \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l}.$$

Según la fórmula (5.29)

$$q_k(t) = -P \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l} : m \int_0^l \operatorname{sen}^2 \frac{k\pi z}{l}\, dz = -P \frac{\operatorname{sen}(k\pi a/l)}{m(l/2)}$$

(el signo menos significa que la fuerza P está dirigida hacia abajo).

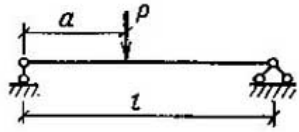


Fig. 113

Los movimientos forzados de la viga que se halla antes de aplicar la fuerza en estado de reposo se obtienen según (5.39):

$$y(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} \int_0^t \frac{\frac{2P}{ml} \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l}}{\omega_k} \operatorname{sen} \omega_k (t-u)\, du =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} \left[\frac{2P}{ml} \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l}}{\omega_k^2} (1 - \cos \omega_k t) \right]. \qquad (6.23)$$

Teniendo en cuenta que $\omega_k^2 = \frac{k^4\pi^4}{l^4} \cdot \frac{EJ}{m}$, se obtiene lo siguiente:

$$y(z, t) = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l}}{k^4} \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l} (1 - \cos \omega_k t). \qquad (6.24)$$

Ecuación de los momentos flectores:

$$M(z, t) = -EJ \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{2Pl}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l}}{k^2} \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l} (1 - \cos \omega_k t). \qquad (6.25)$$

Si la carga P está aplicada en el centro del tramo, $a = l/2$ y entonces

$$y(z, t) = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ} \sum_{k=1, 3, 5}^{\infty} \left(\operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} : k^4 \right) \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2} (1 - \cos \omega_k t) \qquad (6.26)$$

$\left(\text{puesto que para } k = 2,\ 4,\ 6,\ \ldots \text{ sen}\frac{k\pi}{2} = 0\right)$;

$$M(z,\ t) = \frac{2Pl}{\pi^2} \sum_{k=1,\ 3,\ 5}^{\infty} \left(\text{sen}\frac{k\pi z}{l} : k^2\right) \text{sen}\frac{k\pi}{2} (1 - \cos \omega_k t). \quad (6.27)$$

Estas expresiones pueden escribirse así:

$$y(z,\ t) = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ} \sum_{k=1,\ 3,\ 5}^{\infty} \left(\text{sen}\frac{k\pi z}{l} : k^4\right) (-1)^{\frac{k-1}{2}} (1 - \cos \omega_k t); \quad (6.28)$$

$$M(z,\ t) = \frac{2Pl}{\pi^2} \sum_{k=1,\ 3,\ 5}^{\infty} \left(\text{sen}\frac{k\pi z}{l} : k^2\right) (-1)^{\frac{k-1}{2}} (1 - \cos \omega_k t). \quad (6.29)$$

Las flechas y los momentos flectores en el centro de la luz de la viga son los siguientes:

$$y\left(\frac{l}{2},\ t\right) = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ} \sum_{k=1,\ 3,\ 5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}} (-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k^4} (1 - \cos \omega_k t) =$$

$$= \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ} \sum_{k=1,\ 3,\ 5}^{\infty} \frac{1 - \cos \omega_k t}{k^4}. \quad (6.30)$$

$$M\left(\frac{l}{2},\ t\right) = \frac{2Pl}{\pi^2} \sum_{k=1,\ 3,\ 5}^{\infty} \frac{1 - \cos \omega_k t}{k^2}. \quad (6.31)$$

En estas expresiones las series son rápidamente convergentes.

Si nos limitamos con los primeros sumandos, entonces tendremos lo siguiente:

$$y\left(\frac{l}{2},\ t\right) \approx \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ} (1 - \cos \omega_1 t); \quad (6.32)$$

$$M\left(\frac{l}{2};\ t\right) \approx \frac{2Pl}{\pi^2} (1 - \cos \omega_1 t). \quad (6.33)$$

En el momento de tiempo, cuando $\omega_1 t = -1$, obtenemos:

$$y\left(\frac{l}{2}\right)_{\text{máx}} = 4Pl^3 : \pi^4 EJ; \quad M\left(\frac{l}{2}\right)_{\text{máx}} = \frac{4Pl}{\pi^2}. \quad (6.34)$$

Para la posición estática de la fuerza

$$y\left(\frac{l}{2}\right) \approx \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ}; \quad M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl}{4}. \quad (6.35)$$

Coeficientes dinámicos aproximados:
respecto a las flechas $\mu \approx 2$;
respecto a los momentos flectores $\mu = 16/\pi^2 = 1{,}62$.

Así mismo se realiza el cálculo de las vigas, con otras fijaciones de los extremos a la acción de una fuerza instantánea P.

§ 53. CÁLCULO DE UNA VIGA SIMPLE A LA ACCIÓN DE LOS IMPULSOS. **1. Cálculo de una viga a la acción de un impulso concentrado** (fig. 114). Consideramos la acción del impulso como una acción breve de la fuerza P aplicada repentinamente, es decir, suponemos que $S = P\Delta t$ para un S finito y $\Delta t \to 0$.

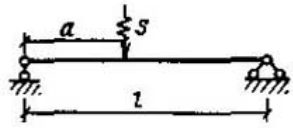


Fig. 114

Podemos escribir de acuerdo con (6.23) que

$$y(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} \int_0^{\Delta t} \frac{2P}{ml\omega_k} \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l} \operatorname{sen} \omega_k (t-u)\, du. \quad (6\ 36)$$

Después de la integración y sustitución de $P = S/\Delta t$ para $\Delta t \to 0$

$$y(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} \left[\frac{2S}{ml\omega_k} \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l} \operatorname{sen} \omega_k t \right].$$

O bien

$$y(z, t) = \frac{2S}{ml} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l} \operatorname{sen} \omega_k t}{\omega_k}. \quad (6.37)$$

Si $z = l/2$ y $a = l/2$, entonces

$$y\left(\frac{l}{2}, t\right) = \frac{2S}{ml} \sum_{k=1,\,3,\,5}^{\infty} \operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{2} \frac{\operatorname{sen} \omega_k t}{k} = \frac{2S}{ml} \sum_{k=1,\,3,\,5}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \omega_k t}{\omega_k}. \quad (6.38)$$

2. Cálculo de una viga a la acción de un impulso distribuido según la ley de $s(z) = s^* \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l}$ (fig. 115). A base de (6.37) podemos escribir lo siguiente:

$$y(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} \int_0^{l} \frac{2s^* \operatorname{sen} \frac{\pi a}{l}}{ml\omega_k} \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l} \operatorname{sen} \omega_k t\, da. \quad (6.39)$$

En virtud de la propiedad de ortogonalidad, tenemos que

$$\int_0^{l} \operatorname{sen} \frac{\pi a}{l} \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l}\, da = \begin{cases} 0 \text{ para } k \neq 1 \\ \frac{l}{2} \text{ para } k = 1. \end{cases}$$

Por eso se obtiene que

$$y(z, t) = \frac{s^*}{m} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} \frac{\operatorname{sen} \omega_1 t}{\omega_1}. \tag{6.40}$$

Tomando en consideración que para tal viga $\omega_1 = \pi^2/l^2 \sqrt{EJ/m}$,

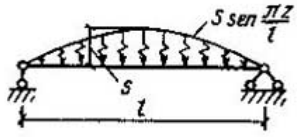


Fig. 115

tendremos definitivamente:

$$y(z, t) = \frac{s^* l^2}{m\pi^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}}} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} \operatorname{sen} \omega_1 t. \tag{6.41}$$

Los momentos flectores son

$$M(z, t) = s^* \sqrt{\frac{EJ}{m}} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} \operatorname{sen} \omega_1 t. \tag{6.42}$$

Para $z = l/2$

$$y\left(\frac{l}{2}, t\right) = \left(s^* l^2 : m\pi^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}}\right) \operatorname{sen} \omega_1 t; \tag{6.43}$$

$$M\left(\frac{l}{2}, t\right) = s^* \sqrt{\frac{EJ}{m}} \operatorname{sen} \omega_1 t. \tag{6.44}$$

3. Cálculo a la acción de un impulso s^* uniformemente distribuido por la viga (fig. 116). Según (6.37) tenemos:

$$y(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} \frac{\operatorname{sen} \omega_k t}{\omega_k} \int_0^l \frac{2s^*}{ml} \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} dz =$$

$$= \frac{2s^*}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} \frac{\operatorname{sen} \omega_k t}{\omega_k} (1 - \cos k\pi). \tag{6.45}$$

O bien, considerando que $\omega_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2} \sqrt{EJ : m}$

$$y(z, t) = \frac{4s^* l^2}{m\pi^3 \sqrt{\frac{EJ}{m}}} \sum_{k=1, 3, 5}^{\infty} \frac{1}{k^3} \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} \operatorname{sen} \omega_k t. \tag{6.46}$$

Momentos flectores:

$$M(z, t) = \frac{4s^*}{\pi} \sqrt{\frac{EJ}{m}} \sum_{k=1, 3, 5}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} \operatorname{sen} \omega_k t. \tag{6.47}$$

Para $z = l/2$

$$y\left(\frac{l}{2}, t\right) = \frac{4s^* l^2}{m\pi^3 \sqrt{EJ: m}} \sum_{k=1, 3, 5}^{\infty} \frac{1}{k^3} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2} \operatorname{sen} \omega_k t; \quad (6.48)$$

$$M\left(\frac{l}{2}, t\right) = \frac{4s^*}{\pi} \sqrt{\frac{EJ}{m}} \sum_{k=1, 3, 5}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2} \operatorname{sen} \omega_k t. \quad (6.49)$$

§ 54. CÁLCULO DE UNA VIGA SIMPLE A LA ACCIÓN DE UNA FUERZA VIBRATORIA P sen θt (fig. 117). Parámetros iniciales:

$$y(0) = 0; \quad y'(0) = ?; \quad M(0) = 0; \quad Q(0) = ?; \quad q(0) = 0.$$

Las condiciones de transición del primer tramo al segundo para $z = a$ son:

$$\Delta y(a) = 0; \quad \Delta y'(a) = 0; \quad \Delta M(a) = 0; \quad \Delta Q(a) = -P;$$
$$\Delta q(a) = 0.$$

Condiciones de frontera en el extremo derecho: $y(l) = 0$; $M(l) = 0$.

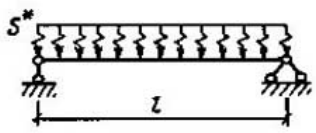


Fig. 116

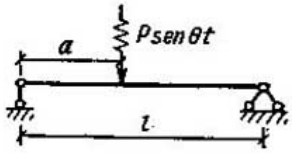


Fig. 117

1er tramo: $0 \leqslant z \leqslant a$. Según las ecuaciones (5.66) y (5.68) tenemos:

$$y_1(z) = \frac{y'(0)}{s} B_{sz} - \frac{Q(0)}{s^3 EJ} D_{sz}; \quad (6.50)$$

$$M_1(z) = -sEJy'(0) D_{sz} + \frac{Q(0)}{s} B_{sz}. \quad (6.51)$$

2º tramo: $a \leqslant z \leqslant l$. Según las expresiones (5.66), (5.68), (5.70) y (5.72):

$$y_2(z) = y_1(z) + \frac{P}{s^3 EJ} D_{s(z-a)}; \quad (6.52)$$

$$M_2(z) = M_1(z) - \frac{P}{s} B_{s(z-a)}. \quad (6.53)$$

Condiciones de frontera en el extremo derecho:

$$\left.\begin{aligned} y(l) &= \frac{y'(0)}{s} B_{sl} - \frac{Q(0)}{s^3 EJ} D_{sl} + \frac{P}{s^3 EJ} D_{s(l-a)} = 0; \\ M(l) &= -sEJy'(0) D_{sl} + \frac{Q(0)}{s} B_{sl} - \frac{P}{s} B_{s(l-a)} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (6.54)$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene:

$$y'(0) = \frac{P}{s^2 EJ} \frac{D_\lambda B_{s(l-a)} - B_\lambda D_{s(l-a)}}{B_\lambda^2 - D_\lambda^2}; \tag{6.55}$$

$$Q(0) = P \frac{B_\lambda B_{s(l-a)} - D_\lambda D_{s(l-a)}}{B_\lambda^2 - D_\lambda^2}, \text{ donde } \lambda = sl. \tag{6.56}$$

Cuando la fuerza P se encuentra en el centro de la viga:

$$y'(0) = \frac{P}{s^2 EJ} \frac{D_\lambda B_{\lambda/2} - B_\lambda D_{\lambda/2}}{B_\lambda^2 - D_\lambda^2}; \tag{6.57}$$

$$Q(0) = P \frac{B_\lambda B_{\lambda/2} - D_\lambda D_{\lambda/2}}{B_\lambda^2 - D_\lambda^2}. \tag{6.58}$$

En último caso obtendremos expresiones más simples de los parámetros iniciales, si de acuerdo con la condición de simetría utilizamos otras condiciones de frontera, a saber:

$$y_1'\left(\frac{l}{2}\right) = 0; \quad Q_1\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{P}{2}.$$

Según las expresiones (5.67) y (5.69) tenemos:

$$y_1'\left(\frac{l}{2}\right) = y'(0) A_{\lambda/2} - \frac{Q(0)}{s^2 EJ} C_{\lambda/2} = 0;$$

$$Q_1\left(\frac{l}{2}\right) = -s^2 EJ y'(0) C_{\lambda/2} - Q(0) A_{\lambda/2} = \frac{P}{2}.$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene lo siguiente:

$$y'(0) = (P : 2s^2 EJ)\,[C_{\lambda/2} : (A_{\lambda/2}^2 - C_{\lambda/2}^2)]; \tag{6.59}$$

$$Q(0) = \frac{P}{2} A_{\lambda/2} : (A_{\lambda/2}^2 - C_{\lambda/2}^2). \tag{6.60}$$

Las ecuaciones de flechas y de momentos flectores, cuando la carga está situada en el centro de la luz, las obtenemos a partir de (5.66) y (5.68):

$$y_1(z) = \frac{P}{2s^3 EJ\,(A_{\lambda/2}^2 - C_{\lambda/2}^2)} (C_{\lambda/2} B_{sz} - A_{\lambda/2} D_{sz}); \tag{6.61}$$

$$M_1(z) = \frac{P}{2s\,(A_{\lambda/2}^2 - C_{\lambda/2}^2)} (A_{\lambda/2} B_{sz} - C_{\lambda/2} D_{sz}). \tag{6.62}$$

Para $z = l/2$ se obtiene:

$$y_1\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{P}{2s^3 EJ} \cdot \frac{B_{\lambda/2} C_{\lambda/2} - A_{\lambda/2} D_{\lambda/2}}{A_{\lambda/2}^2 - C_{\lambda/2}^2}; \tag{6.63}$$

$$M_1\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{P}{2s} \cdot \frac{A_{\lambda/2} B_{\lambda/2} - C_{\lambda/2} D_{\lambda/2}}{A_{\lambda/2}^2 - C_{\lambda/2}^2}. \tag{6.64}$$

Partiendo de estas expresiones pueden construirse los diagramas de las flechas y de los momentos flectores.

Demostremos que si la frecuencia de la carga que actúa θ coincide con la frecuencia de oscilaciones libres, se produce la resonancia.

Con este propósito examinemos los denominadores (6.57) y (6.58):

$$B_\lambda^2 - D_\lambda^2 = \left(\frac{\operatorname{sh}\lambda + \operatorname{sen}\lambda}{2}\right)^2 - \left(\frac{\operatorname{sh}\lambda - \operatorname{sen}\lambda}{2}\right)^2 = \operatorname{sh}\lambda \operatorname{sen}\lambda.$$

La frecuencia de oscilaciones libres de tal viga $\omega_k^2 = \frac{k^4\pi^4}{l^4}\frac{EJ}{m}$. Hallemos s^4 por medio de las frecuencias de oscilaciones libres [véase (5.59)]:

$$s^4 = \frac{m\theta^2}{EJ} = \frac{k^4\pi^4}{l^4}\frac{\theta^2}{\omega_k^2}.$$

De aquí se desprende que

$$s = \frac{k\pi}{l}\sqrt{\frac{\theta}{\omega_k}}.$$

Respectivamente,

$$\lambda = sl = k\pi\sqrt{\frac{\theta}{\omega_k}}.$$

Ahora

$$B_\lambda^2 - D_\lambda^2 = \operatorname{sh} k\pi\sqrt{\frac{\theta}{\omega_k}} \operatorname{sen} k\pi\sqrt{\frac{\theta}{\omega_k}}.$$

Si $\theta = \omega_k$, entonces $B_\lambda^2 - D_\lambda^2 = 0$ y según (6.57) y (6.58) $y'(0) \to \infty$ y $Q(0) \to \infty$, lo que testimonia la presencia de la resonancia.

Ejemplo 31. Construir los diagramas de las flechas y de los momentos flectores en la viga debidos a la fuerza de vibración ubicada en el medio de la viga (fig. 118, *a*) para los siguientes datos: $l = 2$ m; $a = 1$ m; $J = 8000$ cm^4;

$E = 2 \cdot 10^7$ N/cm^2 $= 2 \cdot 10^{11}$ Pa;

$\theta = 400$ s^{-1}; $g = 9{,}81$ m/s^2.

La carga uniforme $q = 981$ N/m.

Según la fórmula (5.59) obtenemos

$$s^4 = \frac{981 \cdot 400^2}{9{,}81 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 8000 \cdot 10^{-8}} = 1\left(\frac{1}{\text{m}}\right)^4.$$

De aquí se desprende que

$s = 1$ m^{-1}; $\lambda = sl = 1 \cdot 2 = 2$.

Partiendo de las tablas de las funciones A, B, C, D (véase el suplemento 1) hallamos que:

$A_{\lambda/2} = 1{,}04169$; $B_{\lambda/2} = 1{,}00833$;

$C_{\lambda/2} = 0{,}50139$; $D_{\lambda/2} = 0{,}16686$.

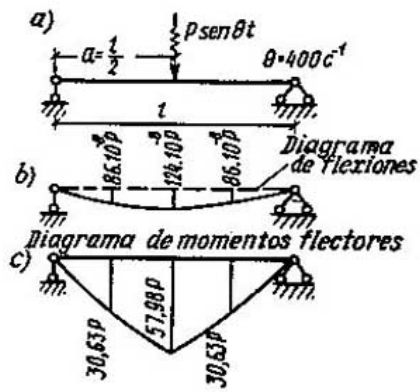


Fig. 118

La ecuación de las flechas según (6.61) es la siguiente, si P está expresada en N:

$$y_1(z) = \frac{P(0{,}50139B_z - 1{,}04169D_z)}{2 \cdot 1^3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 8000 \cdot 10^{-8}(1{,}04169^2 - 0{,}50139^2)} 100 \text{ cm}.$$

Una vez hechas las simplificaciones:

$$y_1(z) = 0{,}00000374823P(0{,}50139B_z - 1{,}04169D_z) \text{ cm}.$$

La ecuación de los momentos flectores según (6.62) es:

$$M_1(z) = \frac{P}{2 \cdot 1} \frac{1{,}04169B_z - 0{,}50139D_z}{1{,}04169^2 - 0{,}50139^2} 100 \text{ N} \cdot \text{cm}.$$

Después de simplificar

$$M_1(z) = 59{,}95174P\,(1{,}04169B_z - 0{,}50139D_z) \text{ N} \cdot \text{cm}.$$

Calculamos las flechas y los momentos flectores:

1) $z = l/4 = 0{,}5$ m; $sz = 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5$;

$A_{0.5} = 1{,}00261$; $B_{0.5} = 0{,}50026$; $C_{0.5} = 0{,}12502$; $D_{0.5} = 0{,}02084$;

$y_1(l/4) = 0{,}00000374823P\,(0{,}50139 \cdot 0{,}50026 - 1{,}04169 \cdot 0{,}2084) =$
$= 0{,}000000858782P$, en cm;

$M_1(l/4) = 59{,}97173P\,(1{,}04169 \cdot 0{,}50026 - 0{,}50139 \cdot 0{,}02084) =$
$= 30{,}625576P$, en N·cm.

2) $z = l/2 = 1$ m; $sz = 1 \cdot 1 = 1$;

$A_1 = 1{,}04169$; $B_1 = 1{,}00833$; $C_1 = 0{,}50139$; $D_1 = 0{,}16686$;

$y_1(l/2) = 0{,}00000374823P\,(0{,}50139 \cdot 1{,}00833 - 1{,}04169 \cdot 0{,}16686) =$
$= 0{,}000001243476P$, en cm;

$M_1(l/2) = 59{,}97173P\,(1{,}04169 \cdot 1{,}00833 - 0{,}50139 \cdot 0{,}16686) =$
$= 57{,}974992P$, en N·cm.

Los diagramas de las flechas y de los momentos flectores están construidos en la fig. 118, *b* y *c*. Determinemos los coeficientes dinámicos para el centro de la viga:

$$y\left(\frac{l}{2}\right)_{\text{est}} = \frac{Pl^3}{48EJ} = \frac{P \cdot 2^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 8000 \cdot 10^{-8}} 100 = 0{,}000001041667P \text{ cm};$$

$$M\left(\frac{l}{2}\right)_{\text{est}} = \frac{Pl}{4} = \frac{P \cdot 200}{4} = 50P \text{ N} \cdot \text{cm}.$$

Coeficiente dinámico respecto a la flecha:

$$\mu = \frac{0{,}000001243476}{0{,}00000104166} = 1{,}1937.$$

Coeficiente dinámico respecto al momento:

$$\mu = \frac{59{,}975}{50} = 1{,}1595.$$

Los coeficientes dinámicos, como era de esperar, resultaron diferentes, puesto que son iguales sólo en el sistema con un grado de libertad. Hallemos aproximadamente los coeficientes dinámicos, considerando que la viga es un sistema con un grado de libertad, para el cual la frecuencia

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{\pi^2}{2^2} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11} \cdot 8000 \cdot 10^{-8}}{981/9{,}81}} = \pi^2 \cdot 10^2.$$

Por consiguiente,

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_1^2}} = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\pi^4 \cdot 10^4}} = \frac{1}{1 - \frac{400^2}{\pi^4 \cdot 10^4}} = 1{,}197.$$

Realizando los cálculos análogos para $\theta = 900$ s^{-1} y $\theta = 1024$ s^{-1}, lo que determina, respectivamente, que $s = 1{,}5$ y $s = 1{,}6$, obtendremos los diagramas de las flechas y de los momentos flectores representados en las figs. 119 y 120. En este caso los coeficientes dinámicos para el centro de la viga son los siguientes:

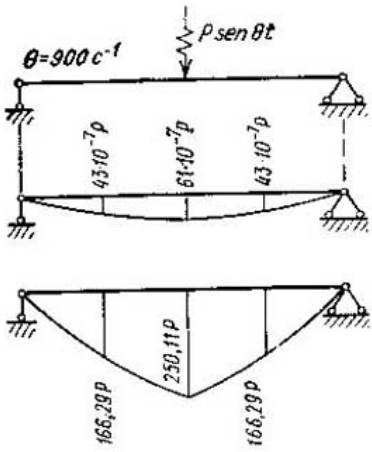


Fig. 119

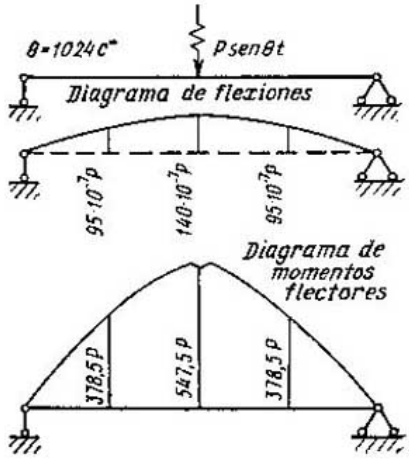


Fig. 120

1) para $\theta = 900\ s^{-1}$:

respecto a las flechas $\dfrac{0{,}00000610909}{0{,}00000104166} = 5{,}8648;$

respecto a los momentos $\dfrac{250{,}11P}{50P} = 5{,}002;$

aproximadamente, $\mu = \dfrac{1}{1 - \left(\dfrac{900}{\pi^2 10^2}\right)^2} = 5{,}936;$

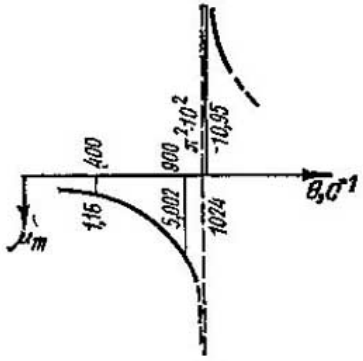


Fig. 121

2) cuando $\theta = \pi^2 10^2\ s^{-1}$, $\mu = \infty$, tiene lugar la resonancia;

3) para $\theta = 1024\ s^{-1}$ tenemos:

respecto a las flechas $\mu = -\dfrac{0{,}0000140558}{0{,}00000104166} = -13;$

respecto a los momentos $\mu = -\dfrac{547{,}53P}{50P} = -10{,}9506;$

aproximadamente, $\mu = 1 : \left(1 - \dfrac{1024^2}{\pi^4 10^4}\right) = -13{,}078.$

Para $\theta = 1024\ s^{-1}$ los coeficientes dinámicos resultaron negativos, puesto que el movimiento no coincide por la fase con la fuerza que actúa. Para la fuerza P dirigida hacia abajo, la viga se desplaza hacia arriba. El diagrama del coeficiente dinámico respecto a los momentos puede verse en la fig. 121.

§ 55. CÁLCULO DE UNA VIGA SIMPLE A LA ACCIÓN DE CIERTAS CARGAS VIBRATORIAS. 1. El momento se encuentra

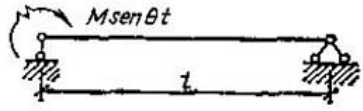


Fig. 122

en el apoyo izquierdo (fig. 122). Parámetros iniciales:

$$y(0) = 0; \quad y'(0) = ?; \quad M(0) = M; \quad Q(0) = ?; \quad q(0) = 0.$$

Condiciones de frontera en el extremo derecho según (5.66) y (5.68):

$$y(l) = \frac{y'(0)}{s} B_\lambda - \frac{M}{s^2 EJ} C_\lambda - \frac{Q(0)}{s^3 EJ} D_\lambda = 0;$$

$$M(l) = -EJsy'(0) D_\lambda + MA_\lambda + \frac{Q(0)}{s} B_\lambda = 0.$$

Resolviendo estas dos ecuaciones obtendremos:

$$y'(0) = \frac{Ml}{3EJ} f_1(\lambda), \tag{6.65}$$

donde

$$f_1(\lambda) = \frac{3}{\lambda} \frac{B_\lambda C_\lambda - A_\lambda D_\lambda}{B_\lambda^2 - D_\lambda^2} = \frac{3}{2} \frac{\operatorname{ch}\lambda \operatorname{sen}\lambda - \operatorname{sh}\lambda \cos\lambda}{\lambda \operatorname{sh}\lambda \operatorname{sen}\lambda} = \frac{1}{\mu_5(\lambda)}$$ [véase (6.122)];

$$Q(0) = \frac{sM(C_\lambda D_\lambda - A_\lambda B_\lambda)}{B_\lambda^2 - D_\lambda^2}. \tag{6.66}$$

El ángulo de giro en el apoyo derecho lo hallemos según (5.67) utilizando las transformaciones siguientes:

$$y'(l) = \frac{M}{sEJ(B_\lambda^2 - D_\lambda^2)}(-D_\lambda). \tag{6.67}$$

2. El momento está situado en el apoyo derecho (fig. 123). Parámetros iniciales:

$$y(0) = 0; \quad y'(0) = ?; \quad M(0) = 0; \quad Q(0) = ?; \quad q(0) = 0.$$

Condiciones de frontera en el extremo derecho de la viga según (5.66) y (5.68):

$$y(l) = \frac{y'(0)}{s} B_\lambda - \frac{Q(0)}{s^3 EJ} D_\lambda = 0;$$

$$M(l) = -EJsy'(0) D_\lambda + \frac{Q(0)}{s} B_\lambda = M.$$

Resolviendo las ecuaciones, tendremos:

$$y'(0) = \frac{Ml}{6EJ} f_2(\lambda), \tag{6.68}$$

donde,

$$f_2(\lambda) = \frac{6}{\lambda} \frac{D_\lambda}{B_\lambda^2 - D_\lambda^2} = \frac{3}{\lambda} \frac{\operatorname{sh}\lambda - \operatorname{sen}\lambda}{\operatorname{sh}\lambda \operatorname{sen}\lambda} = \frac{\mu_2(\lambda)}{\mu_3(\lambda)}$$

[véase (6.90) y (6.91)];

$$Q(0) = sMB_\lambda : (B_\lambda^2 - D_\lambda^2). \tag{6.69}$$

3. Carga uniforme q sen θt (fig. 124). Parámetros iniciales para $z = 0$: $y(0) = 0$; $y'(0) = ?$; $M(0) = 0$; $Q(0) = ?$; $q(0) = -q$.

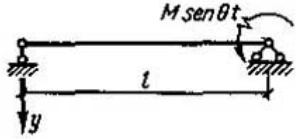


Fig. 123

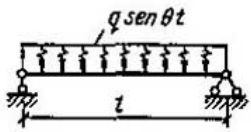


Fig. 124

Las condiciones de frontera en el eje de simetría son: $y'(l/2) = 0$; $Q(l/2) = 0$. Escribamos estas condiciones según las expresiones (5.67) y (5.69) en la siguiente forma:

$$y'\left(\frac{l}{2}\right) = y'(0) A_{\lambda/2} - \frac{Q(0)}{s^2 EJ} C_{\lambda/2} + \frac{q}{s^3 EJ} D_{\lambda/2}^2 = 0;$$

$$Q\left(\frac{l}{2}\right) = -s^2 EJ y'(0) C_{\lambda/2} + Q(0) A_{\lambda/2} - \frac{q}{s} B_{\lambda/2} = 0.$$

Resolviendo las ecuaciones obtenidas hallamos:

$$y'(0) = \frac{q}{s^3 EJ} \frac{B_{\lambda/2} C_{\lambda/2} - A_{\lambda/2} D_{\lambda/2}}{A_{\lambda/2}^2 - C_{\lambda/2}^2}; \tag{6.70}$$

$$Q(0) = \frac{q}{s} (A_{\lambda/2} B_{\lambda/2} - C_{\lambda/2} D_{\lambda/2}) : (A_{\lambda/2}^2 - C_{\lambda/2}^2). \tag{6.71}$$

Las ecuaciones de las flechas y de los momentos flectores las obtendremos según (5.66) y (5.68):

$$y(z) = \frac{q}{s^4 EJ} \left[\frac{B_{\lambda/2} C_{\lambda/2} - A_{\lambda/2} D_{\lambda/2}}{A_{\lambda/2}^2 - C_{\lambda/2}^2} B_{sz} - \right.$$

$$\left. - \frac{(A_{\lambda/2} B_{\lambda/2} - C_{\lambda/2} D_{\lambda/2})}{A_{\lambda/2}^2 - C_{\lambda/2}^2} D_{sz} + (A_{sz} - 1) \right]; \tag{6.72}$$

$$M(z) = \frac{q}{s^2} \left[- \frac{B_{\lambda/2} C_{\lambda/2} - A_{\lambda/2} D_{\lambda/2}}{A_{\lambda/2}^2 - C_{\lambda/2}^2} D_{sz} + \right.$$

$$\left. + (A_{\lambda/2} B_{\lambda/2} - C_{\lambda/2} D_{\lambda/2}) B_{sz} : (A_{\lambda/2}^2 - C_{\lambda/2}^2) - C_{sz} \right]. \tag{6.73}$$

§ 56. CÁLCULO DE LA VIGA EMPOTRADA POR AMBOS EXTREMOS A LA ACCIÓN DE CIERTAS CARGAS VIBRATORIAS Y DESPLAZAMIENTOS DE LOS APOYOS.

1. Carga concentrada $P \operatorname{sen} \theta t$ (fig. 125). Parámetros iniciales:

$$y(0) = 0; \quad y'(0) = 0; \quad M(0) = ?; \quad Q(0) = ?$$

Condiciones de transición para $z = a$: $\Delta Q(a) = -P$. Condiciones de frontera en el extremo derecho de la viga: $y(l) = 0$; $y'(l) = 0$.

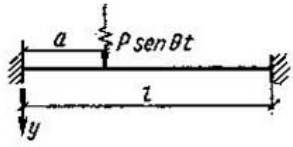


Fig. 125

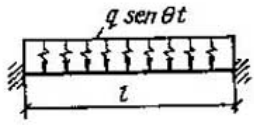


Fig. 126

1er tramo: $0 \leqslant z \leqslant a$. Según las expresiones (5.66)—(5.69), obtenemos:

$$y_1(z) = -\frac{M(0)}{s^2 EJ} C_{sz} - \frac{Q(0)}{s_2 EJ} D_{sz}; \tag{6.74}$$

$$y_1'(z) = -\frac{M(0)}{sEJ} B_{sz} - \frac{Q(0)}{s^2 EJ} C_{sz}; \tag{6.75}$$

$$M_1(z) = M(0) A_{sz} + \frac{Q(0)}{s} B_{sz}; \tag{6.76}$$

$$Q_1(z) = sM(0) D_{sz} + Q(0) A_{sz}. \tag{6.77}$$

2º tramo: $a \leqslant z \leqslant l$. Según las expresiones (5.70)—(5.73) tenemos lo siguiente:

$$y_2(z) = y_1(z) + \frac{P}{s^3 EJ} D_{s(z-a)}; \tag{6.78}$$

$$y_2'(z) = y_1'(z) + \frac{P}{s^2 EJ} C_{s(z-a)}; \tag{6.79}$$

$$M_2(z) = M_1(z) - \frac{P}{s} B_{s(z-a)}; \tag{6.80}$$

$$Q_2(z) = Q_1(z) - P A_{s(z-a)}. \tag{6.81}$$

Componemos las condiciones de frontera:

$$y(l) = -\frac{M(0)}{s^2 EJ} C_\lambda - \frac{Q(0)}{s^3 EJ} D_\lambda + \frac{P}{s^3 EJ} D_{s(l-a)} = 0;$$

$$y'(l) = -\frac{M(0)}{sEJ} B_\lambda - \frac{Q(0)}{s^2 EJ} C_\lambda + \frac{P}{s^2 EJ} C_{s(l-a)} = 0.$$

Resolviendo las ecuaciones, obtenemos:

$$M(0) = \frac{P}{s} \cdot \frac{C_\lambda D_{s(l-a)} - D_\lambda C_{s(l-a)}}{C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda}; \tag{6.82}$$

$$Q(0) = P \frac{C_\lambda C_{s(l-a)} - B_\lambda D_{s(l-a)}}{C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda}. \tag{6.83}$$

Sustituyendo los parámetros iniciales hallados en las ecuaciones (6.74)—(6.81) obtendremos todo lo necesario para el cálculo.

2. Carga uniforme q sen θt (fig. 126). Parámetros iniciales:

$$y(0) = 0; \quad y'(0) = 0; \quad M(0) = ?; \quad Q(0) = ?; \quad q(0) = -q.$$

Condiciones de frontera en el extremo derecho: $y(l) = 0$; $y'(l) = 0$. Según las expresiones (5.66)—(5.67):

$$y(l) = -\frac{M(0)}{s^2 EJ} C_\lambda - \frac{Q(0)}{s^3 EJ} D_\lambda + \frac{q}{s^4 EJ}(A_\lambda - 1) = 0;$$

$$y'(l) = -\frac{M(0)}{sEJ} B_\lambda - \frac{Q(0)}{s^2 EJ} C_\lambda + \frac{q}{s^3 EJ} D_\lambda = 0.$$

A partir de estas ecuaciones se obtiene lo siguiente:

$$M(0) = \frac{q}{s^2} \frac{(A_\lambda - 1) C_\lambda - D_\lambda^2}{C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda}; \tag{6.84}$$

$$Q(0) = \frac{q}{s} \frac{C_\lambda D_\lambda - (A_\lambda - 1) B_\lambda}{C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda}. \tag{6.85}$$

3. Caso general de desplazamiento de los apoyos (fig. 127). Desplazamiento vertical del extremo izquierdo $y(0)$ sen θt; giro del extremo izquierdo α sen θt; desplazamiento vertical del extremo derecho $y(l)$ sen θt; giro del extremo derecho β sen θt.

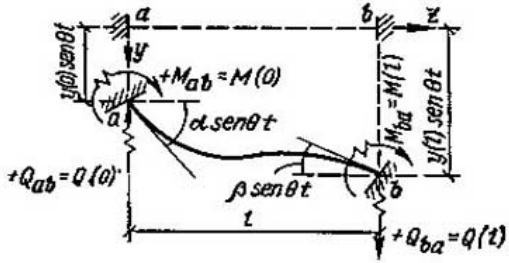


Fig. 127

Parámetros iniciales para $z = 0$: $y = y(0)$; $y'(0) = \alpha$; $M(0) = ?$; $Q(0) = ?$

Condiciones de frontera para $z = l$: $y = y(l)$; $y'(l) = \beta$.

Según las expresiones (5.66) y (5.67) obtenemos:

$$y(l) = y(0)\,A_\lambda + \frac{\alpha}{s}\,B_\lambda - \frac{M(0)}{s^2EJ}\,C_\lambda - \frac{Q(0)}{s^3EJ}\,D_\lambda; \tag{6.86}$$

$$y'(l) = sy(0)\,D_\lambda + \alpha A_\lambda - \frac{M(0)}{sEJ}\,B_\lambda - \frac{Q(0)}{s^2EJ}\,C_\lambda = \beta. \tag{6.87}$$

De estas ecuaciones obtenemos:

$$M(0) = \alpha\frac{4EJ}{l}\,\mu_1(\lambda) + \beta\frac{2EJ}{l}\,\mu_2(\lambda) + \\ + y(0)\frac{6EJ}{l^2}\,\mu_3(\lambda) - y(l)\,\frac{6EJ}{l^2}\,\mu_4(\lambda), \tag{6.88}$$

donde

$$\mu_1(\lambda) = \frac{\lambda}{4}\,\frac{B_\lambda C_\lambda - A_\lambda D_\lambda}{C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda} = \frac{\lambda}{4}\,\frac{\operatorname{ch}\lambda\operatorname{sen}\lambda - \operatorname{sh}\lambda\cos\lambda}{1 - \operatorname{ch}\lambda\cos\lambda} = \\ = \frac{1}{f_3(\lambda)}\ [\text{véase (6.120)}]; \tag{6.89}$$

$$\mu_2(\lambda) = \frac{\lambda}{2}\,\frac{D_\lambda}{C_\lambda^2 + B_\lambda D_\lambda} = \frac{\lambda}{2}\,\frac{\operatorname{sh}\lambda - \operatorname{sen}\lambda}{1 - \operatorname{ch}\lambda\cos\lambda}; \tag{6.90}$$

$$\mu_3(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{6}\,\frac{D_\lambda^2 - A_\lambda C_\lambda}{C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda} = \frac{\lambda^2}{6}\,\frac{\operatorname{sh}\lambda\operatorname{sen}\lambda}{1 - \operatorname{ch}\lambda\cos\lambda}; \tag{6.91}$$

$$\mu_4(\lambda) = \frac{\lambda^2}{6}\,\frac{C_\lambda}{C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda} = \frac{\lambda^2}{6}\cdot\frac{\operatorname{ch}\lambda - \cos\lambda}{1 - \operatorname{ch}\lambda\cos\lambda}; \tag{6.92}$$

$$Q(0) = -\alpha\frac{6EJ}{l^2}\,\varepsilon_1(\lambda) - \beta\frac{6EJ}{l^2}\,\varepsilon_2(\lambda) - \\ - y(0)\frac{12EJ}{l^3}\,\varepsilon_3(\lambda) + y(l)\,\frac{12EJ}{l^3}\,\varepsilon_4(\lambda); \tag{6.93}$$

$$\varepsilon_1(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{6}\cdot\frac{A_\lambda C_\lambda - B_\lambda^2}{C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda} = \frac{\lambda^2}{6}\,\frac{\operatorname{sh}\lambda\operatorname{sen}\lambda}{1 - \operatorname{ch}\lambda\cos\lambda} = \mu_3(\lambda); \tag{6.94}$$

$$\varepsilon_2(\lambda) = \frac{\lambda^2}{6}\,\frac{C_\lambda}{C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda} = \frac{\lambda^2}{6}\,\frac{\operatorname{ch}\lambda - \cos\lambda}{1 - \operatorname{ch}\lambda\cos\lambda} = \mu_4(\lambda); \tag{6.95}$$

$$\varepsilon_3(\lambda) = \frac{\lambda^3}{12}\,\frac{A_\lambda B_\lambda - C_\lambda D_\lambda}{C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda} = \frac{\lambda^3}{12}\,\frac{\operatorname{sh}\lambda\cos\lambda + \operatorname{ch}\lambda\operatorname{sen}\lambda}{1 - \operatorname{ch}\lambda\cos\lambda}; \tag{6.96}$$

$$\varepsilon_4(\lambda) = \frac{\lambda^3}{12}\,\frac{B_\lambda}{C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda} = \frac{\lambda^3}{12}\,\frac{\operatorname{sh}\lambda + \operatorname{sen}\lambda}{1 - \operatorname{ch}\lambda\cos\lambda}. \tag{6.97}$$

El caso general examinado de desplazamiento de los apoyos permite obtener a base de éste diferentes casos particulares, lo que será utilizado para el cálculo de los pórticos.

Los valores de las funciones (6.89)—(6.97) compuestos de acuerdo con las tablas [62] y verificados con las tablas [47] se exponen en el suplemento 2.

§ 57. CÁLCULO DE LAS VIGAS, APOYADAS ARTICULADAMENTE EN UN EXTREMO CON EMPOTRAMIENTO EN EL OTRO, A LAS ACCIONES DE DIFERENTES CARGAS VIBRATORIAS Y DESPLAZAMIENTOS DE LOS APOYOS.

1. Fuerza concentrada P sen θt cuando el empotramiento de la viga es a la derecha (fig. 128, *a*). Los parámetros iniciales son $y(0) = 0$; $y'(0) = ?$; $M(0) = 0$; $Q(0) = ?$

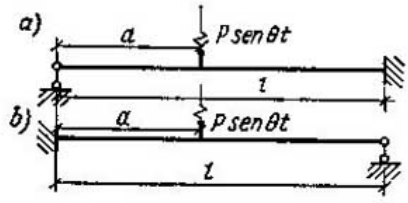


Fig. 128

Condición de transición para $z = a$: $\Delta Q(a) = -P$.

Condiciones de frontera en el extremo derecho: $y(l) = 0$; $y'(l) = 0$.

1er tramo: $0 \leqslant z \leqslant a$. De las expresiones (5.66)—(5.69) obtenemos lo siguiente:

$$y_1(z) = \frac{y'(0)}{s} B_{sz} - \frac{Q(0)}{s^3 EJ} D_{sz}; \tag{6.98}$$

$$y_1'(z) = y'(0) A_{sz} - \frac{Q(0)}{s^2 EJ} C_{sz}; \tag{6.99}$$

$$M_1(z) = -sEJy'(0) D_{sz} + \frac{Q(0)}{s} B_{sz}; \tag{6.100}$$

$$Q_1(z) = -s^2 EJy'(0) C_{sz} + Q(0) A_{sz}. \tag{6.101}$$

2º tramo: $a \leqslant z \leqslant l$. Según las expresiones (5.70)—(5.73) hallamos:

$$y_2(z) = y_1(z) + \frac{P}{s^3 EJ} D_{s(z-a)}; \tag{6.102}$$

$$y_2'(z) = y_1'(z) + \frac{P}{s^2 EJ} C_{s(z-a)}; \tag{6.103}$$

$$M_2(z) = M_1(z) - \frac{P}{s} B_{s(z-a)}; \tag{6.104}$$

$$Q_2(z) = Q_1(z) - PA_{s(z-a)}. \tag{6.105}$$

Compongamos las condiciones de frontera:

$$\left.\begin{aligned} y(l) &= \frac{y'(0)}{s} B_\lambda - \frac{Q(0)}{s^3 EJ} D_\lambda + \frac{P}{s^3 EJ} D_{s(l-a)} = 0; \\ y'(l) &= y'(0) A_\lambda - \frac{Q(0)}{s^2 EJ} C_\lambda + \frac{P}{s^2 EJ} C_{s(l-a)} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.106}$$

Resolviendo las ecuaciones se obtendrá lo siguiente:

$$y'(0) = \frac{P}{s^2EJ} \frac{C_\lambda D_{s(l-a)} - D_\lambda C_{s(l-a)}}{A_\lambda D_\lambda - B_\lambda C_\lambda}; \tag{6.107}$$

$$Q_1'(0) = P \frac{A_\lambda D_{s(l-a)} - B_\lambda C_{s(l-a)}}{A_\lambda D_\lambda - B_\lambda C_\lambda}, \tag{6.108}$$

donde $\lambda = sl$.

Sustituyendo los parámetros iniciales hallados, en las expresiones (6.98)—(6.105) tendremos todo lo necesario para el cálculo de la viga.

2. Fuerza P sen θt cuando el empotramiento de la viga es a la izquierda (fig. 128, *b*). Parámetros iniciales: $y(0) = 0$; $y'(0)$ 0; $M(0) = ?$; $Q(0) = ?$

Condición de transición para $z = a$: $\Delta Q(a) = -P$.

Condiciones de frontera en el extremo derecho: $y(l) = 0$; $M(l) = 0$.

1re tramo: $0 \leqslant z \leqslant a$. Según las expresiones (5.66)—(5.69) hallamos:

$$y_1(z) = -\frac{M(0)}{s^2EJ} C_{sz} - \frac{Q(0)}{s^3EJ} D_{sz}; \tag{6.109}$$

$$y_1'(z) = -\frac{M(0)}{sEJ} B_{sz} - \frac{Q(0)}{s^2EJ} C_{sz}; \tag{6.110}$$

$$M_1(z) = M(0) A_{sz} + \frac{Q(0)}{s} B_{sz}; \tag{6.111}$$

$$Q_1(z) = sM(0) D_{sz} + Q(0) A_{sz}. \tag{6.112}$$

2º tramo: $a \leqslant z \leqslant l$. De las expresiones (5.70)—(5.73) obtenemos lo siguiente:

$$y_2(z) = y_1(z) + \frac{P}{s^3EJ} D_{s(z-a)}; \tag{6.113}$$

$$y_2'(z) = y_1'(z) + \frac{P}{s^2EJ} C_{s(z-a)}; \tag{6.114}$$

$$M_2(z) = M_1(z) - \frac{P}{s} B_{s(z-a)}; \tag{6.115}$$

$$Q_2(z) = Q_1(z) - PA_{s(z-a)}. \tag{6.116}$$

Condiciones de frontera:

$$y(l) = -\frac{M(0)}{s^2EJ} C_\lambda - \frac{Q(0)}{s^3EJ} D_\lambda + \frac{P}{s^3EJ} D_{s(l-a)} = 0;$$

$$M(l) = M(0) A_\lambda + \frac{Q(0)}{s} B_\lambda - \frac{P}{s} B_{s(l-a)} = 0.$$

A partir de ellas tenemos que

$$M(0) = \frac{P}{s} \cdot \frac{D_\lambda B_{s(l-a)} - B_\lambda D_{s(l-a)}}{A_\lambda D_\lambda - B_\lambda C_\lambda}; \tag{6.117}$$

$$Q(0) = P \frac{A_\lambda D_{s(l-a)} - C_\lambda B_{s(l-a)}}{A_\lambda D_\lambda - B_\lambda C_\lambda}. \tag{6.118}$$

3. **Viga empotrada por el extremo derecho con la carga de momento en el izquierdo** (fig. 129). Parámetros iniciales: $y(0) = 0$;

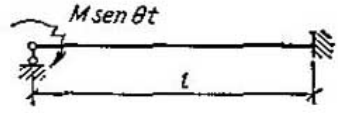


Fig. 129

$y'(0) = ?$; $M(0) = M$; $Q(0) = ?$ Las condiciones de frontera son: $y(l) = 0$; $y'(l) = 0$.

Según las expresiones (5.66) y (5.67) hallamos lo siguiente:

$$y(l) = \frac{y'(0)}{s} B_\lambda - \frac{M}{s^2 EJ} C_\lambda - \frac{Q(0)}{s^2 EJ} D_\lambda = 0;$$

$$y'(l) = y'(0) A_\lambda - \frac{M}{sEJ} B_\lambda - \frac{Q(0)}{s^2 EJ} C_\lambda = 0.$$

De estas ecuaciones obtenemos:

$$y'(0) = \frac{Ml}{4EJ} f_3(\lambda), \tag{6.119}$$

donde

$$f_3(\lambda) = \frac{4}{\lambda} \frac{B_\lambda D_\lambda - C_\lambda^2}{A_\lambda D_\lambda - B_\lambda C_\lambda} =$$

$$= \frac{4}{\lambda} \cdot \frac{1 - \operatorname{ch}\lambda \cos\lambda}{\operatorname{ch}\lambda \operatorname{sen}\lambda - \operatorname{sh}\lambda \cos\lambda} = \frac{1}{\mu_1(\lambda)} \text{ [véase (6.89)]}. \tag{6.120}$$

4. **Caso general de desplazamiento de los apoyos** (fig. 130). Parámetros iniciales: $y = y(0)$; $y'(0) = \alpha$; $M(0) = ?$ $Q(0) = ?$ Condiciones de frontera para $z = l$: $y = y(l)$; $M(l) = 0$. Según las

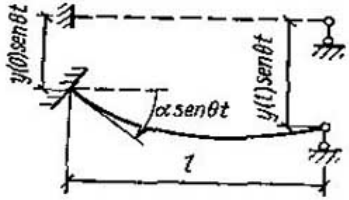


Fig. 130

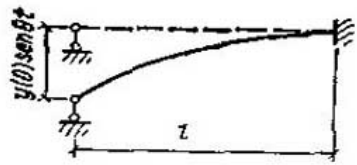


Fig. 131

expresiones (5.66) y (5.68) obtenemos lo siguiente:

$$y(l) = y(0) A_\lambda + \frac{\alpha}{s} B_\lambda - \frac{M(0)}{s^2 EJ} C_\lambda - \frac{Q(0)}{s^3 EJ} D_\lambda;$$

$$M(l) = -y(0) EJ s^2 C_\lambda - \alpha EJ s D_\lambda + M(0) A_\lambda + \frac{Q(0)}{s} B_\lambda = 0.$$

A partir de estas ecuaciones hallamos:

$$M(0) = \alpha \frac{3EJ}{l} \mu_5(\lambda) + y(0) \frac{3EJ}{l^2} \mu_6(\lambda) - y(l) \frac{3EJ}{l^2} \mu_7(\lambda), \qquad (6.121)$$

donde $\lambda = sl$.

$$\mu_5(\lambda) = \frac{\lambda}{3} \frac{D_\lambda^2 - B_\lambda^2}{A_\lambda D_\lambda - B_\lambda C_\lambda} =$$

$$= \frac{2}{3} \lambda \frac{\operatorname{sh}\lambda \operatorname{sen}\lambda}{\operatorname{ch}\lambda \operatorname{sen}\lambda - \operatorname{sh}\lambda \cos\lambda} = \frac{1}{f_1(\lambda)} \text{ [véase (6.66)]}; \qquad (6.122)$$

$$\mu_6(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{3} \frac{A_\lambda B_\lambda - C_\lambda D_\lambda}{A_\lambda D_\lambda - B_\lambda C_\lambda} = \frac{\lambda^2}{3} \frac{\operatorname{sh}\lambda \cos\lambda + \operatorname{ch}\lambda \operatorname{sen}\lambda}{\operatorname{ch}\lambda \operatorname{sen}\lambda - \operatorname{sh}\lambda \cos\lambda}; \qquad (6.123)$$

$$\mu_7(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{3} \frac{B_\lambda}{A_\lambda D_\lambda - B_\lambda C_\lambda} = \frac{\lambda^2}{3} \frac{\operatorname{sh}\lambda + \operatorname{sen}\lambda}{\operatorname{ch}\lambda \operatorname{sen}\lambda - \operatorname{sh}\lambda \cos\lambda}; \qquad (6.124)$$

$$Q(0) = -\alpha \frac{3EJ}{l^2} \varepsilon_5(\lambda) - y(0) \frac{3EJ}{l^3} \varepsilon_6(\lambda) + y(l) \frac{3EJ}{l^3} \varepsilon_7(\lambda); \qquad (6.125)$$

donde

$$\varepsilon_5(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{3} \frac{A_\lambda B_\lambda - C_\lambda D_\lambda}{A_\lambda D_\lambda - B_\lambda C_\lambda} =$$

$$= \frac{\lambda^2}{3} \frac{\operatorname{sh}\lambda \cos\lambda + \operatorname{ch}\lambda \operatorname{sen}\lambda}{\operatorname{ch}\lambda \operatorname{sen}\lambda - \operatorname{sh}\lambda \cos\lambda} = \mu_6(\lambda). \qquad (6.126)$$

$$\varepsilon_6(\lambda) = \frac{\lambda^3}{3} \frac{C_\lambda^2 - A_\lambda^2}{A_\lambda D_\lambda - B_\lambda C_\lambda} =$$

$$= \frac{\lambda^3}{3} \frac{2 \operatorname{ch}\lambda \cos\lambda}{\operatorname{ch}\lambda \operatorname{sen}\lambda - \operatorname{sh}\lambda \cos\lambda}; \qquad (6.127)$$

$$\varepsilon_7(\lambda) = -\frac{\lambda^3}{3} \frac{A_\lambda}{A_\lambda D_\lambda - B_\lambda C_\lambda} = \frac{\lambda^3}{3} \frac{\operatorname{ch}\lambda + \cos\lambda}{\operatorname{ch}\lambda \operatorname{sen}\lambda - \operatorname{sh}\lambda \cos\lambda}. \qquad (6.128)$$

Huelga señalar que según el principio de reciprocidad de los trabajos se puede escribir que

$$\mu_6(\lambda) = +\varepsilon_5(\lambda).$$

Del caso general examinado de desplazamiento de los apoyos pueden obtenerse diferentes casos particulares.

Los valores de las funciones (6.122)—(6.128) véanse en el suplemento 2.

5. Desplazamiento vibratorio del apoyo izquierdo articulado (fig. 131). Parámetros iniciales: $y = y(0)$; $y'(0) = ?$; $M(0) = 0$; $Q(0) = ?$

Según (5.66) y (5.67) componemos las condiciones de frontera en el extremo derecho:

$$y(l) = y(0) A_\lambda + \frac{y'(0)}{s} B_\lambda - \frac{Q(0)}{s^3 EJ} D_\lambda = 0;$$

$$y'(l) = +sy(0) D_\lambda + y'(0) A_\lambda - \frac{Q(0)}{s^2 EJ} C_\lambda = 0.$$

De aquí se obtiene:

$$y'(0) = -y(0)\, s \frac{D_\lambda^2 - A_\lambda C_\lambda}{A_\lambda D_\lambda - B_\lambda C_\lambda}; \tag{6.129}$$

$$Q(0) = -y(0) \frac{3EJ}{l^3} \varepsilon_8(\lambda), \tag{6.130}$$

donde

$$\varepsilon_8(\lambda) = \frac{\lambda^3}{3} \frac{B_\lambda D_\lambda - A_\lambda^2}{A_\lambda D_\lambda - B_\lambda C_\lambda} = \frac{\lambda^3}{3} \frac{1 + \operatorname{ch}\lambda \cos\lambda}{\operatorname{ch}\lambda \operatorname{sen}\lambda - \operatorname{sh}\lambda \cos\lambda}. \tag{6.131}$$

§ 58. CÁLCULO DE UNA VIGA SOBRE DOS APOYOS CON UNA MASA CONCENTRADA COMPLEMENTARIA, CUANDO $z = a$(fig. 132). **1. Oscilaciones libres de la viga.** Examinemos la k-ésima forma principal de oscilaciones libres de la viga.

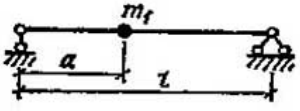


Fig. 132

En el lugar de concentración de la masa m_1 sobre la viga actuará la fuerza de inercia

$$J_k^* = m_1 \omega_k^2 y_k(a).$$

Puesto que $s_k^4 = \frac{m\omega_k^2}{EJ}$, entonces

$$J_k^* = s_k^4 \frac{EJ}{m} m_1 y_k(a). \tag{6.132}$$

Parámetros iniciales: $y_k(0) = 0$; $y_k'(0) = ?$ $M_k(0) = 0$; $Q_k(0) = ?$

Condiciones de transición para $z = a$:

$$\Delta Q_k(a) = -J_k^* = -s_k^4 \frac{EJ}{m} m_1 y_k(a).$$

Condiciones de frontera en el extremo derecho de la viga: $y(l) = 0$; $M(l) = 0$.

1er tramo: De las expresiones (5.51) y (5.53) hallamos:

$$y_{1k}(z) = \frac{y_k'(0)}{s_k} B_{s_k z} - \frac{Q_k(0)}{s_k^3 EJ} D_{s_k z};$$

$$M_{1k}(z) = -s_k EJ y_k'(0) D_{s_k z} + \frac{Q_k(0)}{s_k} B_{s_k z}.$$

Ahora

$$J_k^* = s_k^4 \frac{EJ}{m} m_1 \left[\frac{y_k'(0)}{s_k} B_{s_k a} - \frac{Q_k(0)}{s_k^3 EJ} D_{s_k a} \right]. \qquad (6.133)$$

2º tramo: $a \leqslant z \leqslant l$. Según las expresiones (5.70) y (5.73) obtenemos:

$$y_{2k}(z) = y_{1k}(z) + \frac{J_k^*}{s_k^3 EJ} D_{s_k(z-a)};$$

$$M_{2k}(z) = M_{1k}(z) - \frac{J_k^*}{s_k} B_{s_k(z-a)}.$$

Condiciones de frontera en el extremo derecho de la viga:

$$y_k(l) = \frac{y_k'(0)}{s_k} \left[B_{s_k l} + s_k \frac{m_1}{m} B_{s_k a} D_{s_k(l-a)} \right] -$$

$$- \frac{Q_k(0)}{s_k^3 EJ} \left[D_{s_k l} + s_k \frac{m_1}{m} D_{s_k a} D_{s_k(l-a)} \right] = 0; \qquad (6.134)$$

$$M_k(l) = -s_k EJ y_k'(0) \left[D_{s_k l} + s_k \frac{m_1}{m} B_{s_k a} B_{s_k(l-a)} \right] +$$

$$+ \frac{Q_k(0)}{s_k} \left[B_{s_k l} + s_k \frac{m_1}{m} D_{s_k a} B_{s_k(l-a)} \right] = 0. \qquad (6.135)$$

Estas ecuaciones son homogéneas. Es necesario igualar a cero su determinante, lo que ofrecerá la ecuación para calcular las incógnitas s_k. Al determinar éstas, las frecuencias de oscilaciones se hallan según (5.55).

Si la masa concentrada m_1 se encuentra en el centro del tramo de la viga, será más cómodo adoptar las condiciones de frontera según la simetría, a saber: $y_k'(l/2) = 0$; $Q_k(l/2) = J_k^*/2$ (sólo para las oscilaciones simétricas). En este caso se tendrá que utilizar las expresiones (5.52) y (5.54), según las cuales las condiciones de frontera serán las siguientes:

$$y_k'\left(\frac{l}{2}\right) = y_k'(0) A_{\lambda_k/2} - \frac{Q_k(0)}{s_k^2 EJ} C_{\lambda_k/2} = 0, \qquad (6.136)$$

$$Q_k\left(\frac{l}{2}\right) = -s_k^2 EJ y_k'(0) C_{\lambda_k/2} + Q_k(0) A_{\lambda_k/2} = \frac{J_k^*}{2}, \qquad (6.137)$$

donde $\lambda_k = s_k^* l$.

La fuerza de inercia J_k^* se determina según (6.133) para $a = l/2$. Después de sustituir en (6.137) la fuerza de inercia por sus valores, obtendremo :

$$-s_k^2 EJ y_k'(0) \left[C_{\lambda_k/2} + \frac{s_k}{2} \frac{m_1}{m} B_{\lambda_k/2} \right] + Q_k(0) \times$$

$$\times \left[A_{\lambda_k/2} + \frac{s_k}{2} \frac{m_1}{m} D_{\lambda_k/2} \right] = 0. \qquad (6.138)$$

Las ecuaciones (6.136) y (6.138) son homogéneas, por eso con ellas se procede igual que con las ecuaciones (6.134) y (6.135).

2. Carga vibratoria P sen θt en el punto de disposición de la masa concentrada (fig. 133). Examinamos las oscilaciones permanentes con la frecuencia de la fuerza actuante. En este caso la fuerza de inercia J^* será

$$J^* = m_1\theta^2 y\ (a). \tag{6.139}$$

Parámetros iniciales: $y\ (0) = 0$; $y'(0) = ?$; $M\ (0) = 0$; $Q\ (0) = ?$
Condiciones de transición para $z = a$: $\Delta Q\ (a) = -P - J^*$.

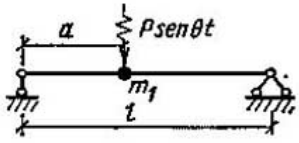


Fig. 133

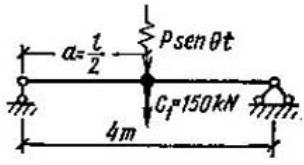


Fig. 134

Condiciones de frontera en el extremo derecho: $y\ (l) = 0$; $M\ (l) = 0$.

1er tramo: $0 \leqslant z \leqslant a$. Según las expresiones (5.66) y (5.68), tenemos

$$y_1(z) = \frac{y'(0)}{s} B_{sz} - \frac{Q(0)}{s^3 EJ} D_{sz};$$

$$M_1(z) = -sEJy'(0) D_{sz} + \frac{Q(0)}{s} B_{sz}.$$

Ahora se puede escribir la fuerza de inercia del modo siguiente:

$$J^* = m_1\theta^2 \left[\frac{y'(0)}{s} B_{sa} - \frac{Q(0)}{s^3 EJ} D_{sa} \right], \tag{6.140}$$

donde $m_1\theta^2 = s^4 \frac{m_1}{m} EJ$.

2° tramo: $a \leqslant z \leqslant l$. Según las expresiones (5.70) y (5.72) obtenemos:

$$y_2(z) = y_1(z) + \frac{P + J^*}{s^3 EJ} D_{s(z-a)};$$

$$M_2(z) = M_1(z) - \frac{P + J^*}{s} B_{s(z-a)}.$$

Basándose en estas expresiones componemos las condiciones de frontera, utilizando (6.140):

$$y(l) = \frac{y'(0)}{s} \left[B_{sl} + s \frac{m_1}{m} B_{sa} D_{s(l-a)} \right] -$$

$$- \frac{Q(0)}{s^3 EJ} \left[D_{sl} + s \frac{m_1}{m} D_{sa} D_{s(l-a)} \right]; \tag{6.141}$$

$$M(l) = -y'(0)\, sEJ\left[D_{sl} + s\frac{m_1}{m} B_{sa}B_{s(l-a)}\right] +$$

$$+\frac{Q(0)}{s}\left[B_{sl} + s\frac{m_1}{m} D_{sa}B_{s(l-a)}\right]. \qquad (6.142)$$

Luego, a partir de estas ecuaciones, es necesario determinar los parámetros iniciales $y'(0)$ y $Q(0)$ y después, según (5.66)—(5.73), los datos necesarios para el cálculo. Si la masa m_1 está ubicada en el centro del tramo, las condiciones de frontera se adoptarán según la simetría, a saber:

$$y'(l/2) = 0; \quad Q(l/2) = (P + J^*)/2.$$

Estas ecuaciones escritas en forma desarrollada las obtendremos a partir de (5.67) y (5.69):

$$y'(l/2) = y'(0)\, A_{\lambda/2} - \frac{Q(0)}{s^3EJ} C_{\lambda/2} = 0;$$

$$Q(l/2) = -s^2EJy'(0)\, C_{\lambda/2} + Q(0)\, A_{\lambda/2} = (P + J^*)/2.$$

Considerando (6.140) obtendremos definitivamente lo siguiente:

$$y'(0)\, A_{\lambda/2} - \frac{Q(0)}{s^3EJ} C_{\lambda/2} = 0; \qquad (6.143)$$

$$-s^2EJy'(0)\, C_{\lambda/2} + Q(0)\, A_{\lambda/2} -$$

$$-m_1\frac{\theta^2}{2}\left[\frac{y'(0)}{s} B_{\lambda/2} - \frac{Q(0)}{s^3EJ} D_{\lambda/2}\right] = \frac{P}{2}. \qquad (6.144)$$

Ejemplo 32. Determinar la tensión en la viga de doble T № 22 (fig. 134), la cual tiene $J = 2550$ cm^4; $w = 232$ cm^3 y los datos (véase el ejemplo 14) siguientes: $l = 4$ m; $P = 2700$ N; $\theta = 30$ s^{-1}; la masa del motor $m_1 = 1500$ kg, la masa distribuida considerando la masa de la viga $m = 400$ kg/m; $g = 9{,}81$ m/s^2 $E = 2{,}1 \cdot 10^{10} \cdot 9{,}81$ Pa.

El coeficiente característico, según (5.59), es

$$s^4 = \frac{400 \cdot 30^2}{(2{,}1 \cdot 10^{10} \cdot 9{,}81)(2550 \cdot 10^{-8})} = \frac{1}{14{,}5924}\left(\frac{1}{\text{m}^4}\right).$$

De aquí se desprende que

$$s = \frac{1}{1{,}9545}.$$

La magnitud

$$\frac{m_1\theta^2}{s^3EJ} = \frac{1500 \cdot 30^2}{\left(\frac{1}{1{,}9545}\right)^3 (2{,}1 \cdot 10^{10} \cdot 9{,}81)(2550 \cdot 10^{-8})} = 1{,}918816.$$

Los valores de las funciones durante la interpolación lineal son

$$\lambda = sl = \frac{1}{1{,}9545}\,4 = 2{,}04666; \qquad \lambda/2 = 1{,}0233;$$

$$A_{\lambda/2} = 1{,}04169 + \frac{1{,}06106 - 1{,}04169}{0{,}1}\,0{,}0233 = 1{,}046203;$$

$$B_{\lambda/2} = 1{,}00833 + \frac{1{,}11343 - 1{,}00833}{0{,}1}\,0{,}033 = 1{,}032818;$$

$$C_{\lambda/2} = 0{,}50139 + \frac{0{,}60746 - 0{,}50139}{0{,}1}\,0{,}0233 = 0{,}526105;$$

$$D_{\lambda/2} = 0{,}16686 + \frac{0{,}22222 - 0{,}16686}{0{,}1}\,0{,}0233 = 0{,}179759.$$

De las ecuaciones (6.143) y (6.144) obtenemos:

$$y'(0)\,1{,}046203 - \frac{Q(0)}{s^2EJ}\,0{,}526105 = 0;$$

$$-s^2EJy'(0)\left(0{,}526105 + \frac{m_1\theta^2}{2s^3EJ}\,1{,}032818\right) +$$

$$+Q(0)\left(1{,}046203 + \frac{m_1\theta^2}{2s^3EJ}\,0{,}179759\right) = \frac{P}{2}$$

o bien

$$y'(0)\,1{,}046203 - \frac{Q(0)}{s^2EJ}\,0{,}526105 = 0;$$

$$-y'(0)\,(0{,}526105 + 0{,}959408 \cdot 1{,}032818) +$$

$$+\frac{Q(0)}{s^2EJ}\,(1{,}046203 + 0{,}959408 \cdot 0{,}179759) = \frac{P}{2s^2EJ}.$$

Definitivamente:

$$y'(0)\,1{,}046203 - \frac{Q(0)}{s^2EJ}\,0{,}526105 = 0;$$

$$y^1(0)\,1{,}516999 + \frac{Q(0)}{s^2EJ}\,1{,}218665 = \frac{P}{2s^2EJ}.$$

Resolviendo estas ecuaciones obtenemos:

$$y'(0) = 0{,}5515651\,\frac{P}{s^2EJ}; \quad Q(0) = 1{,}0969473P.$$

El momento flector en el centro de la luz de la viga, según (6.51), es

$$M(l/2) = -sEJy'(0)\,D_{\lambda/2} + \frac{Q(0)}{s}\,B_{\lambda/2} =$$

$$= -0{,}551565\,\frac{P}{s}\,0{,}179759 + \frac{1{,}096947P}{s}\,1{,}032818 = 2{,}0206578P.$$

Definitivamente:

$$M(l/2) = 2{,}020658 \cdot 2700 = 5455{,}776\ \text{N}\cdot\text{m}.$$

Tensión complementaria debida a la carga dinámica:

$$\Delta\sigma = \frac{5455{,}776 \cdot 100}{232} = 2351{,}63\ \text{N/cm}^2 = 23516{,}3\ \text{kPa}.$$

En el cálculo aproximado (véase el ejemplo 14)

$$\Delta\sigma = 2455{,}60\ \text{N/cm}^2 = 24556\ \text{kPa}.$$

§ 59. NOCIÓN ACERCA DEL CÁLCULO DE LAS VIGAS APOYADAS SOBRE UNA BASE ELÁSTICA CON DOS COEFICIENTES DE LECHO. La reacción de la base elástica con dos coeficientes de lecho por unidad de longitud de la viga se determina por la siguiente expresión:

$$r(z) = c_1 by - c_2 b \frac{\partial^2 y}{\partial z^2},$$

donde c_1 es el primer coeficiente (principal) de lecho, N/cm^3; c_2, el segundo coeficiente de lecho, N/cm; b, el ancho de la viga, cm; y, la flecha de la viga, cm.

La base elástica con dos coeficientes de lecho posee propiedades de distribución, cosa que no tiene la base con un coeficiente de lecho. Sin embargo, la presencia del segundo coeficiente genera reacciones de bandas concentradas de la base en los bordes libres y en los extremos de la viga, cuya consideración rigurosa es bastante dificultosa. Por eso, o consideramos estas fuerzas empleando algún método aproximado, o simplemente prescindimos de ellas.

En nuestros cálculos no se toma en consideración la inercia de la base elástica. Aproximadamente ésta puede ser considerada sumando a la masa de la viga m cierta parte de la masa de la base.

La ecuación diferentical de movimiento de la viga la obtenemos con ayuda de (5.3) introduciendo en ella la reacción de la base:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[EJ(z)\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right] + m(z)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + p^*(z, t) + c_1 by - c_2 b \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -q(z, t). \quad (6.145)$$

Para la viga de sección constante, cuando $EJ = \text{const.}$, tenemos:

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + m(z)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + p^*(z, t) + c_1 by - c_2 b \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -q(z, t). \quad (6.146)$$

Las ecuaciones de oscilaciones libres las obtendremos partiendo de (6.145) y (6.146), considerando en ellas que $q(z, t) = 0$.

1. **Oscilaciones libres.** La ecuación diferencial es

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[EJ(z)\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right] + m(z)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + p^*(z, t) + c_1 by - c_2 b \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0. \quad (6.147)$$

La solución de la ecuaión la hallamos en la siguiente forma:

$$y(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(z)\,\Phi_k(t). \quad (6.148)$$

Representemos también las fuerzas de resistencia $p^*(z, t)$ en forma de una serie:

$$p^*(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(z, t). \quad (6.149)$$

Sustituyendo uno a uno los sumandos de (6.148) y (6.149) en la ecuación (6.147) y dividiéndola entre $m\,(z)\,y_k\,(z)\,\Phi_k\,(t)$ obtendremos:

$$\frac{\frac{\partial^2}{\partial z^2}[EJ\,(z)y_k''(z)]-c_2by_k''(z)+c_1by_k(z)}{m\,(z)\,y_k(z)}=-\frac{\ddot{\Phi}_k(t)}{\Phi_k(t)}-\frac{p_k^*(z,\,t)}{m\,(z)\,y_k(z)\,\Phi_k(t)}. \tag{6.150}$$

Supongamos aproximadamente que la resistencia es proporcional a la masa de la viga y la velocidad:

$$p_k^*(z,\,t)=2\alpha_k m\,(z)\,y_k\,(z)\,\dot{\Phi}_k\,(t). \tag{6.151}$$

Tal admisión conduce a la separación de las variables en (6.150)

$$\frac{\frac{\partial^2}{\partial z^2}[EJ\,(z)\,y_k''(z)]-c_2by_k''(z)+c_1by_k(z)}{m\,(z)\,y_k(z)}=-\frac{\ddot{\Phi}_k(t)+2\alpha_k\Phi_k(t)}{\Phi_k(t)}. \tag{6.152}$$

Ahora tenemos que el primer miembro de la ecuación (6.152) no depende de t, y el segundo, de z. Esto quiere decir que cada uno de ellos es igual a cierta constante, la cual designaremos con ω_k^2. Después de esto obtendremos dos ecuaciones:

$$1)\quad \ddot{\Phi}_k(t)+2\alpha_k\dot{\Phi}_k(t)+\omega_k^2\Phi_k(t)=0. \tag{6.153}$$

Su integral es

$$\Phi_k(t)=e^{-\alpha_k t}(A_k\,\mathrm{sen}\,\bar{\omega}_k t+B_k\cos\bar{\omega}_k t)=$$
$$=e^{-\alpha_k t}C_k\,\mathrm{sen}\,(\omega_k t-\varphi_k), \tag{6.154}$$

donde

$$\bar{\omega}_k=\sqrt{\omega_k^2-\alpha_k^2}. \tag{6.155}$$

Por consiguiente, las oscilaciones libres $y_k\,(z,\,t)$ se efectúan según la ley armónica de amortiguación con una frecuencia de $\bar{\omega}_k$, y la magnitud constante introducida ω_k es la frecuencia de oscilaciones propias de la viga sobre la base elástica sin considerar las resistencias.

$$2)\quad [EJ\,(z)\,y_k''(z)]''-c_2by_k''(z)-[\omega_k^2m\,(z)-c_1\,(b)]\,y_k\,(z)=0. \tag{6.156}$$

Ésta es la ecuación diferencial de la forma principal de oscilaciones $y_k\,(z)$ que corresponde a la frecuencia ω_k, con coeficientes variables. Si la sección de la viga tiene $EJ=\mathrm{const}$, entonces la ecuación será:

$$EJy_k^{IV}(z)-c_2by_k''(z)+c_1by_k(z)-\omega_k^2m\,(z)\,y_k(z)=0. \tag{6.157}$$

Si la masa es también constante, entonces la ecuación será aún más simple:

$$y_k^{IV}(z)-\frac{c_2b}{EJ}y_k''(z)-\bar{s}_k^4y_k(z)=0\ . \tag{6.158}$$

donde

$$\bar{s}_k^4 = (\omega_k^2 m - c_1 b) : EJ. \tag{6.159}$$

Para los cálculos que no consideran las resistencias es necesario en (6.153) adoptar $\alpha_k = 0$.

La ecuación (6.158) por su forma coincide con la ecuación (5.89), si en ésta se adopta el signo superior del sumando medio. Esto permite aplicar, también aquí, todas las expresiones (5.119)—(5.122), compuestas según la ecuación (5.89) con los signos superiores y R, haciendo la sustitución de R por $c_2 b$ y s_k^4 por $\bar{s}_k^4$. Respectivamente, suponiendo que

$$a_k = \sqrt{\frac{c_2 b}{2EJ} + \sqrt{\left(\frac{c_2 b}{2EJ}\right)^2 + \bar{s}_k^4}}; \tag{6.160}$$

$$b_k = \sqrt{-\frac{c_2 b}{2EJ} + \sqrt{\left(\frac{c_2 b}{2EJ}\right)^2 + \bar{s}_k^4}}, \tag{6.161}$$

y basándose en (6.159), obtenemos:

$$\omega_k^2 = (\bar{s}_k^4 EJ + c_1 b) : m. \tag{6.162}$$

Si la base elástica tiene sólo un coeficiente de lecho c_1, la ecuación (6.158) coincide con la ecuación (5.42), y entonces todas las expresiones (5.51)—(5.54) obtenidas basándose en (5.42) se utilizan también aquí, sustituyendo en ellas s_k^4 por $\bar{s}_k^4$.

Puede mostrarse que, siendo iguales las condiciones de frontera, las frecuencias de oscilaciones de la viga sobre la base elástica son más altas que las de la viga sin base elástica.

Veamos las oscilaciones de la viga sobre dos apoyos y sobre la base elástica y determinemos para ella las frecuencias y las formas principales.

Parámetros iniciales: $y_k(0) = 0$; $y_k'(0) = ?$; $M_k(0) = 0$; $Q_k(0) = ?$

Condiciones de frontera en el extremo derecho: $y_k(l) = 0$; $M_k(l) = 0$.

Según las expresiones (5.119) y (5.121) obtenemos:

$$y_k(l) = y_k'(0)\, Y_{2k}(l) - \frac{Q_k(0)}{EJ} Y_{4k}(l) = 0; \tag{a}$$

$$M_k(l) = -EJ y_k'(0)\, Y_{2k}''(l) + Q_k(0)\, Y_{4k}''(l) = 0. \tag{b}$$

Las ecuaciones son homogéneas, por lo que igualamos a cero su determinante:

$$D = Y_{2k}(l)\, Y_{4k}''(l) - Y_{2k}''(l)\, Y_{4k}(l) = 0. \tag{c}$$

Tomando en consideración (5.102), (5.112), (5.104) y (5.110) tenemos que

$$\frac{1}{(a_k^2+b_k^2)^2}\left[\left(\frac{b_k^2}{a_k}\operatorname{sh} a_k l+\frac{a_k^2}{b_k}\operatorname{sen} b_k l\right)(a_k \operatorname{sh} a_k l+\right.$$

$$\left.+b_k \operatorname{sen} b_k l)-(a_k b_k^2 \operatorname{sh} a_k l-a_k^2 b_k \operatorname{sen} b_k l)\left(\frac{\operatorname{sh} a_k l}{a_k}-\frac{\operatorname{sen} b_k l}{b_k}\right)\right]=0.$$

Hechas las simplificaciones, obtendremos:

$$\operatorname{sh} a_k l \operatorname{sen} b_k l = 0.$$

Por consiguiente,

$$\operatorname{sen} b_k l = 0 \text{ y } b_k l = k\pi.$$

De acuerdo con (6.161) y (6.159) se calcula:

$$\bar{s}_k^4 = b_k^4 + b_k^2 \frac{c^2 b}{EJ}\ ; \tag{6.163}$$

$$\omega_k^2 = (b_k^4 EJ + b_k^2 c_2 b + c_1 b) : m. \tag{6.164}$$

En nuestro caso

$$\omega_k^2 = \left[\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 EJ + \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 c_2 b + c_1 b\right] : m. \tag{6.165}$$

Las formas principales según (5.119) son:

$$y_k(z) = y_k'(0)\, Y_{2k}(z) - \frac{Q_k(0)}{EJ} Y_{4k}(z). \tag{d}$$

Tomando en consideración (a)

$$y_k(z) = \frac{y_k'(0)}{Y_{4k}(l)}\left[Y_{2k}(z)\, Y_{4k}(l) - Y_{2k}(l)\, Y_{4k}(z)\right].$$

Sustituyendo aquí por los valores de (5.102) y (5.110), obtendremos después de las simplificaciones:

$$y_k(z) = C_k \operatorname{sen} b_k z = C_k \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l}\ , \tag{6.166}$$

donde C_k es cierta constante.

Las formas principales de la viga sobre la base elástica resultaron iguales a las de la viga simple sobre dos apoyos.

2. Oscilaciones forzadas con carga vibratoria $q(z)\operatorname{sen} \theta t$. Limitémonos a examinar las vigas de sección constante con una masa uniformemente distribuida. No vamos a considerar la resistencia a las oscilaciones. La ecuación diferencial (6.146) para tales vigas será:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c_1 b y - c_2 b \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -q \operatorname{sen} \theta t. \tag{6.167}$$

La integral particular la hallamos en la siguiente forma:

$$y(z, t) = y(z) \operatorname{sen} \theta t. \tag{6.168}$$

Sustituyendo en la ecuación inicial la integral particular por sus valores obtendremos:

$$y^{IV}(z) - \frac{c_2 b}{EJ} y''(z) - s_*^4 y(z) = -\frac{q(z)}{EJ}, \qquad (6.169)$$

donde $s_*^4 = \frac{m\theta^2 - c_1 b}{EJ}$.

Esta ecuación por la forma coincide con la ecuación (5.131), si en ésta se adopta el signo superior y R. Por eso para $s_*^4 > 0$ todas las expresiones obtenidas de (5.131) con signos superiores y R se tornan válidas también aquí, cuando se sustituye R por $c_2 b$ y s^4 por s_*^4.

Si la base elástica tiene un coeficiente de lecho, la ecuación (6.169) coincide por la forma con la ecuación (5.58), lo que permite para $s_*^4 > 0$ utilizar las expresiones (5.66)—(5.73) con la sustitución de s^4 por s_*^4.

CAPÍTULO 7 * CÁLCULOS APROXIMADOS DE VIGAS DE SECCIÓN VARIABLE

§ 60. SOBRE EL CÁLCULO EXACTO DE VIGAS DE SECCIÓN VARIABLE.

El cálculo exacto de vigas de sección variable se reduce a la integración de la ecuación diferencial de oscilaciones libres (5.4), la obtención de las frecuencias y de las formas principales de oscilaciones que corresponden a ellas.

Si las frecuencias y las formas principales están halladas, entonces en adelante el cálculo de la viga a la acción de cualquier carga se efectúa según las expresiones (5.35), (5.38) y (5.39). Sin embargo, la obtención de las frecuencias y de las formas principales de oscilaciones representa, hablando en general, un problema complicado, puesto que la integración de la ecuación (5.4) en forma cerrada es, como regla, imposible. Por eso aparece la necesidad de utilizar diferentes métodos aproximados de cálculo expuestos a continuación. En muchos de ellos se da la determinación de la frecuencia de oscilaciones libres según la forma principal correspondiente, que se adopta aproximadamente.

Si las formas principales de oscilaciones fuesen conocidas de antemano, las frecuencias que les corresponden se determinarían, por ejemplo, a partir de (5.18):

$$\omega_k^2 = [EJ(z)\, y_k''(z)]'' : m(z)\, y_k(z). \qquad (7.1)$$

Huelga señalar que aunque los métodos aproximados serán examinados directamente para las vigas de sección variable, casi todos ellos, en cierto modo, son aplicables a cualesquiera sistemas reticulados, lo que será utilizado en los capítulos siguientes.

§ 61. METODO DE BÚBNOV—GALIORKIN. 1. **Oscilaciones propias.** Veamos la ecuación diferencial de la forma principal $y_j(z)$. Según (5.18) ésta será:

$$[EJ(z)\, y_j''(z)]'' - \omega_j^2 m(z)\, y_j(z) = 0 \tag{7.2}$$

(cuando corrientemente se determina la primera frecuencia, $j = 1$).

Supongamos que su solución se conoce y puede ser representada así:

$$y_j(z) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(z). \tag{7.3}$$

Entonces la ecuación (7.2) se tronsforma en una identidad

$$[EJ(z) \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_j''(z)]'' - \omega_j^2 m(z) \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(z) = 0.$$

Esta identidad es justa para cualquier z dentro de los límites de la viga. Tampoco será violada si se multiplica por cualquier función $\varphi_k(z)$ de (7.3):

$$\left\{[EJ(z) \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i''(z)]'' - \omega_j^2 m(z) \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(z)\right\} \varphi_k(z) \equiv 0.$$

Compongamos luego la integral por toda la longitud de la viga:

$$\int_0^l \left\{\left[EJ(z) \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i''(z)\right]'' - \omega_j^2 m(z) \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i''(z)\right\} \varphi_k(z)\, dz = 0 \tag{7.4}$$

$$k = 1, 2, \ldots n.$$

Representémosla en forma desarrollada:

$$a_1 \int_0^l \{[EJ(z)\, \varphi_1''(z)]''\, \varphi_k(z) - \omega_j^2 m(z)\, \varphi_1(z)\, \varphi_k(z)\}\, dz +$$

$$+ a_2 \int_0^l \{[EJ(z)\, \varphi_2''(z)]''\, \varphi_k(z) - \omega_j^2 m(z)\, \varphi_2(z)\, \varphi_k(z)\}\, dz +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ a_n \int_0^l \{[EJ(z)\, \varphi_n''(z)]''\, \varphi_k(z) - \omega_j^2 m(z)\, \varphi_n(z)\, \varphi_k(z)\}\, dz = 0.$$

La ecuación obtenida la escribimos en la forma canónica:

$$c_{k1}a_1 + c_{k2}a_2 + \ldots + c_{kn}a_n = 0 \tag{7.5}$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$,

donde

$$c_{ki} = \int_0^l \{[EJ(z)\, \varphi_i''(z)]''\, \varphi_k(z) - \omega_j^2 m(z)\, \varphi_i(z)\, \varphi_k(z)\}\, dz. \tag{7.6}$$

Puesto que $[EJ(z)\varphi_i''(z)]'' = -q_i$, el primer sumando en (7.6) puede considerarse como el trabajo posible de la carga q_i en los desplazamientos $\varphi_k(z)$; ésta, para las funciones $\varphi_i(z)$ y $\varphi_k(z)$, que satisfacen las condiciones de frontera, es igual al trabajo de la carga q_k en los desplazamientos $\varphi_i(z)$. De estos razonamientos se desprende que si las funciones $\varphi_i(z)$ satisfacen las condiciones de frontera, $c_{ki} = c_{ik}$.

En las soluciones aproximadas no hay otra salida que adoptar los valores supuestos de las funciones $\varphi_i(z)$ en (7.3), y considerar indeterminados los coeficientes del tipo a_i, escogidos a condición de que las ecuaciones (7.5) serán satisfechas para cualesquiera de los valores $k = 1, 2, \ldots, n$. En esto consiste el método.

Vale señalar que en las soluciones aproximadas la función subintegral entre llaves de la expresión (7.4) dará los valores diferentes a cero, es decir, en realidad dará un error. En relación con esto la expresión (7.4) adquiere tal sentido, que el error en la solución aproximada (es decir, la diferencia dentro de las llaves) es ortogonal para cada función escogida $\varphi_i(z)$ de (7.3).

Las funciones $\varphi_i(z)$, llamadas a veces «convenientes», deben satisfacer totalmente (o parcialmente, lo que generalmente es peor) a las condiciones de frontera del problema y ser «parecidas» a aquella forma principal $y_j(z)$, cuya frecuencia se determina, es decir, tener puntos nulos que coinciden aproximada o exactamente con los puntos nulos de la forma principal. La posición de los puntos nulos de la primera forma principal con una frecuencia inferior se adivina, corrientemente, con facilidad (véase el ejemplo 33). Para elegir las funciones convenientes, se requiere cierto hábito [33].

Se puede, por ejemplo, designar las funciones $\varphi_i(z)$ como líneas elásticas de la viga debidas a diferentes cargas y, en primer término, debido a las cargas situadas sobre ella. Pueden también emplearse las funciones trigonométricas.

En las soluciones aproximadas, las ecuaciones canónicas (7.5) contendrán los coeficientes (parámetros) incógnitos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Estas ecuaciones serán homogéneas y, por lo tanto, para obtener a_i diferente de cero es necesario igualar a cero el determinante de los coeficientes de las ecuaciones canónicas:

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} = 0. \qquad (7.7)$$

Despejando el determinante obtendremos la ecuación de frecuencias. Ésta será de n-ésimo orden con respecto a ω_j^2. La raíz mínima de esta ecuación determinará la frecuencia buscada.

En la primera aproximación, es decir, para $n = 1$, la ecuación canónica será:

$$c_{11}a_1 = 0. \qquad (7.8)$$

Por consiguiente,

$$c_{11} = \int_0^l \{[EJ)z)\,\varphi_1''(z)]''\,\varphi_1(z) - \omega_1^2 m(z)\,\varphi_1^2(z)\}\,dz = 0. \qquad (7.9)$$

En este caso la curva determinada por la función $\varphi_1(z)$ debe parecerse a aquella forma principal, cuya frecuencia se halla.

De la expresión (7.9) se desprende que

$$\omega_1^2 = \int_0^l [EJ(z)\,\varphi_1''(z)]''\,\varphi_1(z)\,dz : \int_0^l m(z)\,\varphi_1^2(z)\,dz. \qquad (7.10)$$

Si la función «conveniente» se adopta en forma de un polinomio algebraico, ésta debe ser tal que

$$[EJ(z)\,\varphi_1''(z)]'' \neq 0. \qquad (7.11)$$

La fórmula (7.10) puede representarse también en otra forma. Con este propósito examinemos las paréntesis angulares del numerador (7.10) como un trabajo duplicado de la carga realizado en el desplazamiento de $\varphi_1(z)$, el cual puede ser reemplazado por el trabajo duplicado de las fuerzas internas:

$$\int_0^l [EJ(z)\,\varphi_1''(z)]''\,\varphi_1(z)\,dz = \int_0^l \frac{M^2(z)}{EJ(z)}\,dz = \int_0^l EJ(z)]\,[\varphi_1''(z)^2\,dz \qquad (7.12)$$

Sustituyendo esta expresión en (7.10) por el valor obtenido tendremos lo siguiente:

$$\omega_1^2 = \int_0^l EJ(z)\,[\varphi_1''(z)]^2\,dz : \int_0^l m(z)\,\varphi_1^2(z)\,dz. \qquad (7.13)$$

La fórmula (7.13) en algunos casos es más cómoda que (7.10), puesto que para ella las limitaciones de la función $\varphi_1(z)$ son diferentes, a saber:

$$\varphi_1''(z) \neq 0. \qquad (7.14)$$

2. Oscilaciones forzadas durante la carga vibratoria. La ecuación diferencial de oscilaciones forzadas sin considerar las resistencias según (5.3) tendrá la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2}{dz^2}\left[EJ(z)\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right] + m(z)\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -q(z)\,\operatorname{sen}\theta t. \qquad (7.15)$$

Para las oscilaciones permanentes adoptemos

$$y(z,\ t) = y(z)\,\operatorname{sen}\theta t. \qquad (7.16)$$

Sustituyendo los valores de (7.16) en la ecuación (7.15) obtendremos:

$$[EJ(z)\,y''(z)]'' - m(z)\,y(z)\,\theta^2 = -q(z). \qquad (7.17)$$

Consideramos que

$$y(z) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(z). \tag{7.18}$$

Sustituyendo su valor en (7.17) tendremos lo siguiente:

$$[EJ(z) \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i''(z)]'' - m(z)\,\theta^2 \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(z) = -q(z).$$

Multiplicamos por $\varphi_k(z)\,dz$ e integramos ambos miembros de la igualdad:

$$\int_0^l \left\{ \left[EJ(z) \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i''(z) \right]'' - m(z)\,\theta_2 \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(z) \right\} \varphi_k(z)\,dz =$$

$$= \int_0^l -q(z)\,\varphi_k(z)\,dz. \tag{7.19}$$

El primer miembro por la forma se parece a (7.4), por eso la expresión (7.19) puede escribirse en la forma canónica de (7.5):

$$c_{k1}a_1 + c_{k2}a_2 + \ldots c_{kn}a_n + C_{kp} = 0, \tag{7.20}$$
$$k = 1,\ 2,\ \ldots\ n,$$

donde

$$\left.\begin{aligned} c_{kl} &= \int_0^l \{[EJ(z)\,\varphi_l''(z)]''\,\varphi_k(z) - \theta^2 m(z)\,\varphi_l(z)\,\varphi_k(z)\}\,dz; \\ C_{kp} &= \int_0^l q(z)\,\varphi_k(z)\,dz. \end{aligned}\right\} \tag{7.21}$$

Para las fuerzas concentradas

$$C_{kp} = \sum p_i \varphi_k(z_i). \tag{7.22}$$

Según la ecuación (7.20) se escriben n ecuaciones canónicas, en las cuales las incógnitas son los coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de las funciones «convenientes». En este caso las ecuaciones canónicas no serán homogéneas como durante las oscilaciones libres.

Ejemplo 33. Determinar aproximadamente la primera frecuencia de oscilaciones de una viga de dos apoyos de sección constante, con la masa uniformemente distribuida, y compararla con la solución exacta.

Hallemos la solución empleando diferentes funciones $\varphi_i(z)$.

1. Adoptamos $\varphi_1(z) = \operatorname{sen} \pi z/l$, lo que es la expresión exacta de la primera forma de oscilaciones. Según la fórmula (7.10) tendremos:

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^l \left[EJ \left(-\frac{\pi^2}{l^2} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} \right) \right]'' \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} \, dz}{\int_0^l m \operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{l} \, dz} = \frac{\pi^4}{l^4} \cdot \frac{EJ}{m}.$$

Así pues, hemos obtenido el valor exacto de la primera frecuencia. Una expresión análoga se obtendrá según (7.13).

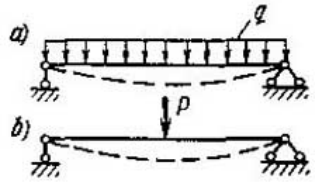


Fig. 135

2. Adoptamos aproximadamente una curva simétrica: la línea elástica debida a la carga uniforme (fig. 135, *a*).

$$\varphi_1(z) = A \left(\frac{z}{l} - \frac{2z^3}{l^3} + \frac{z^4}{l^4} \right),$$

donde $A = \frac{ql^4}{24EJ}$.

Tenemos cumplida la condición (7.11). Según la fórmula (7.10) hallamos:

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^l \left[EJ \frac{A}{l^2} \left(-\frac{12z}{l} + \frac{12z^2}{l^2} \right) \right]'' A \left(\frac{z}{l} - \frac{2z^3}{l^3} + \frac{z^4}{l^4} \right) dz}{\int_0^l mA^2 \left(\frac{z}{l} - \frac{2z^3}{l^3} + \frac{z^4}{l^4} \right)^2 dz} = \frac{97{,}55}{l^4} \frac{EJ}{m},$$

$$\omega_1 = \frac{9{,}877}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \text{ el valor exacto es } \omega_1 = \frac{9{,}8696}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

Según la fórmula (7.13) obtendremos el mismo valor:

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^l EJ \frac{A^2}{l^4} \left(-\frac{12z}{l} + \frac{12z^2}{l^2} \right)^2 dz}{\int_0^l mA^2 \left(\frac{z}{l} - 2\frac{z^3}{l^3} + \frac{z^4}{l^4} \right)^2 dz} = \frac{97{,}55}{l^4} \frac{EJ}{m}.$$

3. Adoptamos $\varphi_1(z)$ en forma de ecuación de la línea elástica debida a la carga concentrada (fig. 135, *b*):

$$\varphi_1(z) = A_1 \left(3\frac{z}{l} - 4\frac{z^3}{l^3} \right) \text{ para } 0 \leqslant z \leqslant l/2,$$

donde

$$A_1 = \frac{l^3}{48EJ}.$$

Según la fórmula (7.13) obtendremos:

$$\omega_1^2 = \frac{2\int\limits_0^{l/2} EJ\left(-\frac{24}{l^2}A\frac{z}{l}\right)^2 dz}{2\int\limits_0^{l/2} mA^2\left(3\frac{z}{l}-4\frac{z^3}{l^3}\right)^2 dz}.$$

La frecuencia $\omega_1 = \frac{9{,}941}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}$.

4. Adoptamos $\varphi_1(z) = z(l-z)$ como la curva que sólo parcialmente satisface a las condiciones de frontera, puesto que $\varphi_1''(0) \neq 0$ y $\varphi_1''(l) \neq 0$. Dicha curva satisface a la condición (7.14) y no satisface a la condición (7.11). Por eso empleamos solamente (7.13):

$$\omega_1^2 = \frac{\int\limits_0^l EJ(-2)^2 dz}{\int\limits_0^l m[z(l-z)]^2 dz} = \frac{120EJ}{l^4 m}; \quad \omega_1 = \frac{10{,}95}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

En este caso se ha obtenido una aproximación inexacta.

5. Adaptemos una curva como una línea elástica de dos momentos (fig. 136) «parecida» a la segunda forma principal:

$$\varphi_1(z) = B\left(\frac{z}{l}-3\frac{z^2}{l^2}+2\frac{z^3}{l^3}\right),$$

donde

$$B = \frac{Ml^2}{6EJ}.$$

Según la fórmula (7.13) hallamos:

$$\omega_2^2 = \frac{\int\limits_0^l EJB^2\left(\frac{-6+12\frac{z}{l}}{l^2}\right)^2 dz}{\int\limits_0^l mB^2\left(\frac{z}{l}-3\frac{z^2}{l^2}+2\frac{z^3}{l^3}\right)^2 dz} = \frac{2520}{l^4}\frac{EJ}{m}.$$

De aquí se desprende que $\omega_2 = \frac{50{,}2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}$, lo que corresponde aproximadamente, como se debía esperar a la segunda frecuencia.

6. Adoptemos la curva $\varphi_1(z) = \operatorname{sen}\frac{k\pi z}{l}$ como la expresión exacta de la k-ésima forma principal.

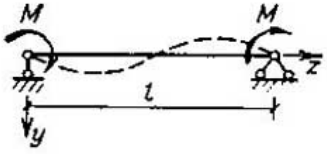


Fig. 136

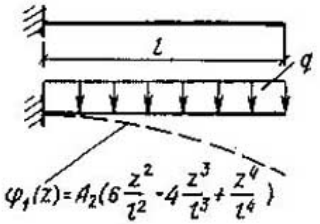


Fig. 137

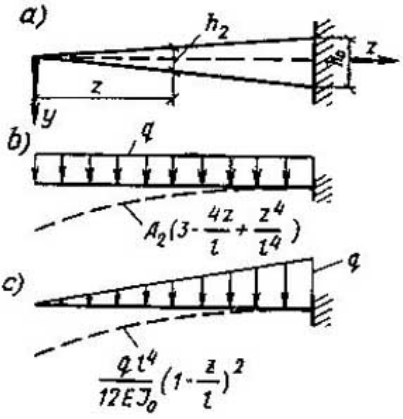


Fig. 138

Según la fórmula (7.10) tenemos:

$$\omega_k^2=\frac{\int_0^l\left[-EJ\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\operatorname{sen}\frac{k\pi z}{l}\right]''\operatorname{sen}\frac{k\pi z}{l}\,dz}{\int_0^l m\operatorname{sen}^2\frac{k\pi z}{l}\,dz}=\frac{k^4\pi^4}{l^4}\,\frac{EJ}{m}.$$

Hemos obtenido el valor exacto del cuadrado de la k-ésima frecuencia ω_k^2.

En este ejemplo se ve que para obtener una frecuencia determinada, la función adoptada $\varphi_1(z)$ tiene que ser «parecida» a la forma principal que le corresponde.

Ejemplo 34. Determinar la primera frecuencia de oscilaciones de una viga empotrada por el extremo izquierdo (fig. 137).

Tomamos por $\varphi_1(z)$ la línea elástica debida a la carga uniforme:

$$\varphi_1(z)=A_2\left(6\frac{z^2}{l^2}-4\frac{z^3}{l^3}+\frac{z^4}{l^4}\right),\quad \text{donde}\quad A_2=\frac{ql^4}{24EJ}.$$

Según (7.10) obtendremos:

$$\omega_1^2=\frac{\int_0^l EJ\left[A_2\left(\frac{12}{l^2}-\frac{24z}{l^3}+\frac{12z^2}{l^4}\right)\right]''A_2\left(6\frac{z^2}{l^2}-4\frac{z^3}{l^3}+\frac{z^4}{l^4}\right)dz}{\int_0^l mA_2^2\left(6\frac{z^2}{l^2}-4\frac{z^3}{l^3}+\frac{z^4}{l^4}\right)^3dz}=$$

$$=\frac{12{,}46}{l^4}\,\frac{EJ}{m}=\frac{(1{,}879^2)^2}{l^4}\,\frac{EJ}{m}.$$

El valor exacto de $\omega_1=\frac{1{,}875^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}$.

Ejemplo 35. Determinar la primera frecuencia de oscilaciones de una cuña de ancho constante empotrada por el extremo derecho (fig. 138, *a*):

$$h_z = \frac{h_0}{l} z; \quad m(z) = m_0 \frac{z}{l}; \quad J_z = J_0 \frac{z^3}{l^3}.$$

1. Tomamos por $\varphi_1(z)$ la línea elástica de la viga de sección constante debida a la carga uniforme (fig. 138, *b*):

$$\varphi_1(z) = A_2 \left(3 - 4\frac{z}{l} + \frac{z^4}{l^4}\right).$$

Según la fórmula (7.10) obtenemos lo siguiente:

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^l \left[EJ_0 \frac{z^3}{l^3} A_2 \frac{12z^2}{l^2}\right]'' A_2 \left(3 - 4\frac{z}{l} + \frac{z^4}{l^4}\right) dz}{\int_0^l m_0 \frac{z}{l} A_2^2 \left(3 - 4\frac{z}{l} + \frac{z^4}{l^4}\right)^2 dz} = \frac{39{,}38}{l^4} \frac{EJ_0}{m_0};$$

$$\omega_1 = \frac{6{,}275}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_0}{m_0}}.$$

Lo mismo obtendremos según la fórmula (7.13).

El valor exacto de $\omega_1 = \frac{5{,}315}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_0}{m_0}}$. Como se ve, en el caso dado la aproximación es inexacta.

2. Por $\varphi_1(z)$ tomamos $\varphi_1(z) = \left(1 - \frac{z}{l}\right)^2$. Esta curva es proporcional a la línea elástica debida a la carga triangular que actúa sobre el voladizo (fig. 138, *c*) para $J(z) = J_0 z^3/l^3$, satisfaciendo por eso a todas las condiciones de frontera.

Según la fórmula (7.10) obtendremos:

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^l \left[EJ_0 \frac{z^3}{l^3} \frac{2}{l^2}\right]'' \left(1 - \frac{z}{l}\right)^2 dz}{\int_0^l m_0 \frac{z}{l} \left(1 - \frac{z}{l}\right)^4 dz} = \frac{30}{l^4} \frac{EJ_0}{m_0}.$$

De aquí se desprende que $\omega_1 = \frac{5{,}477}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_0}{m_0}}$ y así, hemos obtenido una aproximación buena, alrededor de un 3%.

3. Tomamos por $\varphi_1(z)$ la curva $\varphi_2(z) = \left(1 - \frac{z}{l}\right)^2$ que satisface a las condiciones de frontera, puesto que $EJ(0) = 0$. Según la fórmula (7.10) tenemos que

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^l \left[EJ_0 \frac{z^3}{l^3} \frac{6}{l^2} \left(1 - \frac{z}{l}\right)\right]'' \left(1 - \frac{z}{l}\right)^3 dz}{\int_0^l m_0 \frac{z}{l} \left(1 - \frac{z}{l}\right)^6 dz} = \frac{33{,}6}{l^4} \frac{EJ_0}{m_0}$$

o bien $\omega_1 = \frac{5{,}797}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_0}{m_0}}$ (una aproximación del orden del 9%).

4. Precisemos la solución adoptando dos curvas utilizadas en los puntos 2 y 3:

$$\varphi_1(z)=\left(1-\frac{z}{l}\right)^2; \quad \varphi_2(z)=\left(1-\frac{z}{l}\right)^3.$$

Según la fórmula (7.6) hallamos:

$$c_{11}=\int_0^l \left\{\left[EJ_0\frac{z^3}{l^3}\frac{2}{l^2}\right]''\left(1-\frac{z}{l}\right)^2-\right.$$

$$\left.-\omega_1^2 m_0\frac{z}{l}\left(1-\frac{z}{l}\right)^4\right\}dz=\frac{EJ_0}{l^3}-m_0\omega_1^2\frac{l}{30};$$

$$c_{22}=\int_0^l \left\{\left[EJ_0\frac{z^3}{l^3}\frac{6}{l^2}\left(1-\frac{z}{l}\right)\right]''\left(1-\frac{z}{l}\right)^3-\right.$$

$$\left.-\omega_1^2 m_0\frac{z}{l}\left(1-\frac{z}{l}\right)^6\right\}dz=\frac{EJ_0}{l^3}\frac{6}{10}-m_0\omega_1^2\frac{l}{56};$$

$$c_{12}=\int_0^l \left\{\left[EJ_0\frac{z^3}{l^3}\frac{6}{l^2}\left(1-\frac{z}{l}\right)\right]''\left(1-\frac{z}{l}\right)^2-\right.$$

$$\left.-\omega_1^2 m_0\frac{z}{l}\left(1-\frac{z}{l}\right)^2\left(1-\frac{z}{l}\right)^3\right\}dz=\frac{EJ_0}{l^3}\frac{6}{10}-m_0\omega_1^2\frac{l}{42};$$

$$c_{21}=\int_0^l \left\{\left[EJ_0\frac{z^3}{l^3}\frac{2}{l^2}\right]''\left(1-\frac{z}{l}\right)^3-\right.$$

$$\left.-\omega_1^2 m_0\frac{z}{l}\left(1-\frac{z}{l}\right)^3\left(1-\frac{z}{l}\right)^2\right\}dz=\frac{EJ_0}{l^3}\frac{6}{10}-m_0\omega_1^2\frac{l}{42};$$

$$c_{12}=c_{21}.$$

Según la condición (7.7) se tiene que

$$D=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{vmatrix}=c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}=0$$

o bien

$$\left(\frac{EJ_0}{l^3}-m_0\omega_1^2\frac{l}{30}\right)\left(\frac{EJ_0}{l^3}\frac{6}{10}-m_0\omega_1^2\frac{l}{56}\right)-\left(\frac{EJ_0}{l^3}\frac{6}{10}-m_0\omega_1^2\frac{l}{42}\right)^2=0.$$

La raíz mínima de esta ecuación $\omega_1=\frac{5{,}319}{l^2}\sqrt{\frac{EJ_0}{m_0}}$.

Hemos obtenido el valor casi exacto de la primera frecuencia.

§ 62. MÉTODO DE LAGRANGE—RITZ. El método de Lagrange—Ritz se basa en la investigación de la energía potencial total del sistema, bajo la cual se entiende el trabajo realizado por las fuerzas internas y externas del sistema al pasar del estado deformado al no deformado:

$$U=\int_0^l \frac{EJ(z)}{2}[y''(z)]^2\,dz-\int_0^l q(z)\,y(z)\,dz-\sum P_i y(z_i) \quad (7.23)$$

(con cargas positivas dirigidas hacia abajo).

1. Oscilaciones libres. Como ya se ha dicho en el § 39, las fuerzas de inercia de oscilaciones propias respecto a la forma principal $y_j(z)$, pueden reemplazarse *condicionalmente* por la base elástica con característica negativa según (5.9) $c = -m(z)\,\omega_j^2$ y, de esta manera, el problema dinámico puede reducirse al estático. Esto quiere decir, que la energía elástica del sistema debe calcularse como la suma de la energía elástica de la flexión y de la energía *convencional* de la base elástica *convencional* con la característica negativa.

Examinemos tal momento de tiempo, cuando la energía cinética de movimiento es igual a cero, es decir, durante los desplazamientos de la amplitud de la viga, y existe solamente la energía elástica, la cual basándose en lo expuesto puede escribirse así:

$$U = \int_0^l \frac{EJ(z)}{2} [y_j''(z)]^2\,dz - \frac{\omega_j^2}{2} \int_0^l m(z)\, y_j^2(z)\,dz. \qquad (7.24)$$

Si sobre la viga, además de la masa distribuida $m(z)$, están presentes también las masas puntuales concentradas m_i con la coordenada z_i, entonces en estos lugares se deben añadir a la base convencional distribuida los resortes concentrados con la característica negativa (véase el § 20), y sumar, respectivamente, a la expresión (7.24) el sumando

$$\Delta U = -\frac{\omega_j^2}{2} \sum m_i y_j^2(z_i). \qquad (7.25)$$

La expresión (7.24) puede obtenerse de otra manera, si relacionamos las fuerzas de inercia de amplitud $m(z)\,\omega_j^2 y_j(z)$ con las fuerzas externas. Puesto que estas fuerzas son proporcionales a $y_j(z)$, entonces se debe, como es sabido, introducir en este caso en el segundo sumando de la ecuación (7.23) el factor $^1/_2$, al igual que en el trabajo de las fuerzas elásticas.

Seguidamente la expresión (7.24) se examina como la energía potencial corriente del sistema en condiciones de equilibrio.

Puede ser que nuestros razonamientos no sean estrictos, pero son cómodos y conducen a resultados correctos.

La forma principal de oscilaciones se adopta, al igual que en el método de Búbnov—Galiorkin, en forma de un polinomio (7.3). Sustituyendo su valor en (7.24) y considerando (7.25) tenemos:

$$U = \int_0^l \frac{EJ(z)}{2} \Big[\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i''(z)\Big]^2 dz - \frac{\omega_j^2}{2} \int_0^l m(z) \Big[\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(z)\Big]^2 dz -$$

$$- \frac{\omega_j^2}{2} \sum_{\substack{\text{respecto} \\ \text{a masas} \\ \text{concent.}}} m_i \Big[\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(z_i)\Big]^2. \qquad (7.26)$$

Compongamos una ecuación canónica general del método examinado en forma de condición de mínimo de la energía potencial:

$$\frac{\partial U}{\partial a_k} = \int_0^l EJ(z)\Big[\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i''(z)\Big]\varphi_k''(z)\,dz - \omega_j^2 \int_0^l m(z) \times$$

$$\times \Big[\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(z)\Big]\varphi_k(z)\,dz - \omega_j^2 \sum_{\substack{\text{respecto}\\ \text{a masas}\\ \text{concent.}}} m_i \Big[\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(z_i)\Big]\varphi_k(z_i) = 0 \tag{7.27}$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$.

Esta expresión en forma despejada será:

$$a_1\Big\{\int_0^l EJ(z)\,\varphi_1''(z)\,\varphi_k''(z)\,dz - \omega_j^2\Big[\int_0^l m(z)\,\varphi_1(z)\,\varphi_k(z)\,dz +$$

$$+ \sum m_i \varphi_1(z_i)\,\varphi_k(z_i)\Big]\Big\} + a_2\Big\{\int_0^l EJ(z)\,\varphi_2''(z)\,\varphi_k''(z)\,dz -$$

$$- \omega_j^2\Big[\int_0^l m(z)\,\varphi_2(z)\,\varphi_k(z)\,dz + \sum m_i \varphi_2(z_i)\,\varphi_k(z_i)\Big]\Big\} +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ a_n\Big\{\int_0^l EJ(z)\,\varphi_n''(z)\,\varphi_k''(z)\,dz - \omega_j^2\Big[\int_0^l m(z)\,\varphi_n(z)\,\varphi_k(z)\,dz +$$

$$+ \sum m_i \varphi_n(z_i)\,\varphi_k(z_i)\Big]\Big\} = 0$$

o bien, definitivamente,

$$c_{k1}a_1 + c_{k2}a_2 + \ldots + c_{kn}a_n = 0 \text{ para } k = 1, 2, \ldots, n, \tag{7.28}$$

donde

$$c_{kl} = \int_0^l EJ(z)\,\varphi_i''(z)\,\varphi_k''(z)\,dz -$$

$$- \omega_j^2\Big[\int_0^l m(z)\,\varphi_i(z)\,\varphi_k(z)\,dz + \sum_{\substack{\text{respecto}\\ \text{a masas}\\ \text{concent.}}} m_i \varphi_i(z_i)\,\varphi_k(z_i)\Big]. \tag{7.29}$$

No es difícil observar que $c_{kl} = c_{lk}$.

A partir de la ecuación (7.28) se componen n ecuaciones canónicas con los coeficientes incógnitos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, al igual que en el método de Búbnov—Galiorkin. Por eso todo lo expresado en el

§ 61 respecto a la ecuación (7.5) es aplicable también a la expresión (7.28).

En la primera aproximación, es decir, cuando $n = 1$, la ecuación canónica será

$$c_{11}a_1 = 0. \tag{7.30}$$

Por consiguiente,

$$c_{11} = \int_0^l EJ(z)\,[\varphi_1''(z)]^2\,dz -$$

$$-\omega_j^2\Big[\int_0^l m(z)\,\varphi_1^2(z)\,dz + \sum_{\substack{\text{respecto}\\ \text{a masas}\\ \text{concent.}}} m_i\varphi_1^2(z)\Big] = 0. \tag{7.31}$$

De aquí obtenemos que

$$\omega_j^2 = \int_0^l EJ(z)\,[\varphi_1''(z)]^2\,dz : \Big[\int_0^l m(z)\,\varphi_1^2(z)\,dz + \sum_{\substack{\text{respecto}\\ \text{a masas}\\ \text{concent.}}} m_i\varphi_1^2(z)\Big]. \tag{7.32}$$

Esta fórmula, sin considerar las masas concentradas, coincide con la fórmula (7.13).

En la segunda aproximación, al existir dos funciones $\varphi_i(z)$, la ecuación de frecuencias (7.7) será la siguiente:

$$D = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = 0. \tag{7.33}$$

Movimientos forzados de la viga durante la carga vibratoria. En el movimiento permanente, las fuerzas de inercia durante la carga vibratoria con la frecuencia θ se determinan según (7.24) reemplazando ω_j^2 por θ^2. Por eso la expresión (7.23) tiene que escribirse así:

$$U = \int_0^l \frac{EJ(z)\,[y''(z)]^2\,dz}{2} - \int_0^l \frac{m(z)\,y(z)\,\theta^2 y(z)}{2} -$$

$$- \sum_{\substack{\text{respecto}\\ \text{a masas}\\ \text{concent.}}} \frac{m_i\theta^2 y^2(z_i)}{2} - \int_0^l q(z)\,y(z)\,dz - \sum P_i y(z_i). \tag{7.34}$$

Consideramos, al igual que antes, que

$$y(z) = \sum a_i\varphi_i(z). \tag{7.35}$$

Sustituyendo su valor en (7.34) obtendremos:

$$U = \int_0^l \frac{EJ(z)\big[\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i''(z)\big]^2\,dz}{2} - \int_0^l \frac{m(z)\,\theta^2\big[\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i(z)\big]^2\,dz}{2} -$$

$$- \sum_{\substack{\text{respecto}\\ \text{a masas}\\ \text{concent.}}} m_i \theta^2 \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i (z_i)\right]^2}{2} -$$

$$- \int_0^l q(z) \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i (z)\, dz - \sum P_i \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i (z_i). \qquad (7.36)$$

Compongamos la ecuación del mínimo de la energía potencial:

$$\frac{\partial U}{\partial a_k} - \int_0^l FJ(z) \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i'' (z)\right] \varphi_k'' (z) -$$

$$- \theta^2 \int_0^l m(z) \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i (z)\right] \varphi_k (z)\, dz -$$

$$- \theta^2 \sum_{\substack{\text{respecto}\\ \text{a masas}\\ \text{concent.}}} m_i \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i (z_i)\right] \varphi_k (z_i) -$$

$$- \int_0^l q(z) \varphi_k (z)\, dz - \sum P_i \varphi_k (z_i) = 0. \qquad (7.37)$$

Los tres primeros sumandos de esta igualdad coinciden por la forma con (7.27), por eso la expresión (7,37), por analogía con (7.28), puede escribirse así:

$$c_{k1} a_1 + c_{k2} a_2 + \ldots + c_{kn} a_n + C_{kp} = 0, \qquad (7.38)$$

donde

$$c_{ki} = \int_0^l EJ(z)\, \varphi_i'' (z)\, \varphi_k'' (z)\, dz - \theta^2 \left[\int_0^l m(z)\, \varphi_i (z)\, \varphi_k (z)\, dz + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{\text{respecto}\\ \text{a masas}\\ \text{concent.}}} m_i \varphi_i (z_i)\, \varphi_k (z_i)\right]; \qquad (7.39)$$

$$C_{kp} = - \int_0^l q(z)\, \varphi_k (z)\, dz - \sum P_i \varphi_k (z_i). \qquad (7.40)$$

Notemos que las expresiones (7.38) y (7.40) son aplicables también para la carga estática, si se considera que $\theta = 0$.

Ejemplo 36. Determinar aproximadamente la flecha y el momento flector en el centro de la luz de la viga donde actúa la fuerza vibratoria P sen θt (fig. 119) con los siguientes datos: $l = 2$ m; $J = 8000 \cdot 10^{-8}$ m^4; $E = 2 \cdot 10^{11}$ Pa;

$\theta = 900\ s^{-1}$; $m = 100$ kg/m. Comparar los resultados obtenidos con sus valores exactos (véase el ejemplo 31).

1. Adoptamos que $y(z) = a_1 \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l}$;

$$M(z) = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} a_1 \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l}.$$

Por consiguiente, $y(l/2) = a_1$; $M(l/2) = (\pi^2 EJ/l^2)\, a_1$.
Según (7.38) obtenemos:

$$c_{11} a_1 + C_{1p} = 0.$$

Según (7.39) y (7.40):

$$c_{11} = \int_0^l EJ \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{l}\, dz - \theta^2 \int_0^l m \operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{l}\, dz = \frac{\pi^4 EJ}{l^4} \cdot \frac{l}{2} - m\theta^2 \frac{l}{2}.$$

$$C_{1p} = -P.$$

Es decir,

$$a_1 = -\frac{C_{1p}}{c_{11}} = P : \frac{\pi^4 EJ}{2l^3} \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_1^2}\right),$$

donde

$$\omega_1^2 = \frac{\pi^4 EJ}{l^4 m} = \frac{\pi^4 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 8000 \cdot 10^{-8}}{2^4 \cdot 100} = \pi^4\ 10^4.$$

Ahora

$$a_1 = y\left(\frac{l}{2}\right) = \left[P : \frac{\pi^4 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 8000 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 2^3} \left(1 - \frac{900^2}{10^4 \pi^4}\right)\right] = 60{,}942 \cdot 10^{-9} P,\ \text{m}$$

[el valor exacto de $y(l/2) = 61{,}094 \cdot 10^{-9}\ P$, m];

$$M(l/2) = 9{,}86960\, \frac{2 \cdot 10^{11} \cdot 8000 \cdot 10^{-8}}{2^2}\, 60{,}942 \cdot 10^{-9} P = 2{,}40589P,\ \text{N} \cdot \text{m}$$

[el valor exacto de $M(l/2) = 2{,}501102P$, N·m]

2. Adoptamos, para precisar, que

$$y(z) = a_1 \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} + a_2 \operatorname{sen} \frac{3\pi z}{l};$$

$$M(z) = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} a_1 \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} + 9\, \frac{\pi^2 EJ}{l^2} a_2 \operatorname{sen} \frac{3\pi z}{l};\quad y\left(\frac{l}{2}\right) = a_1 - a_2;$$

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} a_1 - \frac{9\pi^2 EJ}{l^2} a_2.$$

Según (7.38)

$$c_{11} a_1 + c_{12} a_2 + C_{1p} = 0.$$
$$c_{21} a_1 + c_{22} a_2 + C_{2p} = 0.$$

Según (7.39)—(7.40) obtenemos:

$$c_{11} = \frac{\pi^4 EJ}{2l^3} \left(1 - \frac{\theta^2}{\pi^4 10^4}\right)\ \text{(el valor anterior)}.$$

Tomando en consideración la propiedad de ortogonalidad de las funciones trigonométricas, tenemos lo siguiente:

$$c_{12}=\int_0^l EJ\,\frac{\pi^2}{l^2}\,\operatorname{sen}\frac{\pi z}{l}\,\frac{9\pi^2}{l^2}\,\operatorname{sen}\frac{3\pi z}{l}\,dz-\theta^2\int_0^l m\,\operatorname{sen}\frac{\pi z}{l}\,\operatorname{sen}\frac{3\pi z}{l}\,dz=0;$$

$$c_{22}=\int_0^l EJ\left(\frac{3\pi}{l}\right)^4\operatorname{sen}^2\frac{3\pi z}{l}\,dz-\theta^2\int_0^l m\,\operatorname{sen}^2\frac{3\pi z}{l}\,dz=$$

$$=\frac{81\pi^4 EJ}{l^4}\,\frac{l}{2}-\theta^2 m\,\frac{l}{2}.$$

Las ecuaciones canónicas son: $C_{1p}=-P$; $C_{2p}=P$;

$$\frac{\pi^4 EJ}{2l^3}\left(1-\frac{\theta^2}{\pi^4 10^4}\right)a_1+0\cdot a_2-P=0;$$

$$0\cdot a_1+\frac{\pi^4 EJ}{2l^3}\left(81-\frac{\theta^2}{\pi^4\cdot 10^4}\right)a_2+P=0.$$

De aquí obtenemos que

$$a_1=\frac{P}{\frac{\pi^4 EJ}{2l^3}\left(1-\frac{\theta^2}{\pi^4\cdot 10^4}\right)}=60{,}942\cdot 10P^{-9},\ \text{m (el valor anterior)}.$$

$$a_2=-P:\frac{\pi^4 EJ}{2l^3}\left(81-\frac{\theta^2}{\pi^4\cdot 10^4}\right)=$$

$$=\left[-P:\frac{\pi^4\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot 8000\cdot 10^{-8}}{2\cdot 2^3}\left(81-\frac{900^2}{\pi^4\cdot 10^4}\right)\right]=-0{,}128\cdot 10^{-9}P,\ \text{m}.$$

Según la segunda aproximación obtendremos lo siguiente:

$$y\,(l/2)=a_1-a_2=60{,}942\cdot 10^{-9}P+0{,}128\cdot 10^{-9}P=6107\cdot 10^{-9}P,\ \text{m}.$$

$$M\,(l/2)=\frac{9{,}86960\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot 8000\cdot 10^{-9}}{2^2}\,60{,}942\cdot 10^{-9}P+$$

$$+\frac{9\cdot 9{,}86960\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot 8000\cdot 10^{-8}}{2^2}\,0{,}128\cdot 10^{-9}P=2{,}45139P,\ \text{N}\cdot\text{m}.$$

Ejemplo 37. Determinar la flecha de la viga en el centro de la luz donde actúa la fuerza estática P (fig. 139). La viga es de sección constante. Se conoce que la flecha es $f=Pl^3:48EJ$.

1. Adoptamos $\varphi_1(z)=\operatorname{sen}\dfrac{\pi z}{l}$; $f=a_1$.

La ecuación canónica (7.38) es

$$c_{11}a_1+C_{1p}=0.$$

Según (7.39) y (7.40) obtenemos:

$$c_{11}=\int_0^l EJ\left(-\frac{\pi^2}{l^2}\operatorname{sen}\frac{\pi z}{l}\right)^2 dz=\frac{\pi^4}{l^4}\,EJ\,\frac{l}{2};$$

$$C_{1p}=-P.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\pi^4 EJ}{2l^3} a_1 - P = 0; \quad a_1 = f = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ}.$$

2. Adoptamos

$$y(z) = a_1 \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} + a_2 \operatorname{sen} \frac{3\pi z}{l}; \quad f = a_1 - a_2.$$

Según (7.38) se tiene:

$$c_{11}a_{11} + c_{12}a_2 + C_{1p} = 0; \quad c_{21}a_1 + c_{22}a_2 + C_{2p} = 0.$$

Según (7.39) y (7.40) obtenemos que

$$c_{11} = \frac{\pi^4 EJ}{2l^3}; \quad c_{12} = c_{21} = 0;$$

$$c_{22} = \int_0^l EJ\,[\varphi_2''(z)]^2\,dz = \int_0^l EJ \left(\frac{9\pi^2}{l^2} \operatorname{sen} \frac{3\pi z}{l}\right)^2 dz = \frac{81\pi^4 EJ}{2l^3}.$$

Ecuaciones canónicas en cifras:

$$\frac{\pi^4 EJ}{2l^3} a_1 + 0 \cdot a_2 - P = 0; \quad 0 \cdot a_1 + \frac{81\pi^4 EJ}{2l^3} a_2 + P = 0.$$

Por consiguiente,

$$a_1 = 2Pl^3 : \pi^4 EJ; \quad a_2 = -2Pl^3 : 81\,\pi^4 EJ.$$

Ejemplo 38. Obtener la ecuación de la línea elástica de una viga de sección constante (fig. 140).

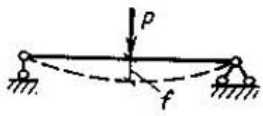


Fig. 139

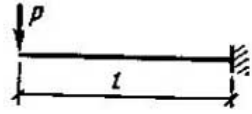


Fig. 140

Admitimos por $\varphi_1(z)$ la línea elástica debida a la fuerza P:

$$\varphi_1(z) = A\left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{z}{l} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z^3}{l^3}\right)^3, \quad \text{donde} \quad A = \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

La ecuación canónica (7.38) es

$$c_{11}a_1 + C_{1p} = 0, \text{ de aquí } a_1 = -C_{1p} : c_{11}.$$

Según (7.39) y (7.40) obtendremos:

$$\varphi_1''(z) = \frac{3A}{l^2} \cdot \frac{z}{l};$$

$$c_{11} = \int_0^l EJ \left(\frac{3A}{l^2}\right)^2 \frac{z^2}{l^2}\,dz = \frac{EJ3A^2}{l^3}; \quad C_{1p} = -PA.$$

Por lo tanto,

$$a_1 = -C_{1p} : c_{11} = Pl^3 : 3EJA.$$

La ecuación buscada aproximada (que en el caso dado coincide con la exacta), es

$$y(z) = a_1\varphi_1(z) = \frac{Pl^3}{3EJ}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{z}{l} + \frac{1}{2}\frac{z^3}{l^3}\right).$$

Ejemplo 39. Determinar la flecha del extremo de la viga cuando $J(z) = J_0 \frac{z}{l}$ (véase la fig. 140). La ecuación exacta de la línea elástica es

$$y = \frac{Pl^3}{2EJ_0}\left(1 - 2\frac{z}{l} + \frac{z^2}{l^2}\right). \qquad (a)$$

Admitimos por $\varphi_1(z)$ la línea elástica debida a la fuerza P en la viga de sección constante:

$$\varphi_1(z) = A\left(1 - \frac{3}{2}\frac{z}{l} + \frac{1}{2}\frac{z^3}{l^3}\right),$$

donde

$$A = Pl^3 : 3EJ.$$

Ecuación canónica (7.38):

$$c_{11}a_1 + C_{1p} = 0.$$

Según (7.39) y (7.40) obtenemos:

$$c_{11} = \int_0^l EJ_0 \frac{z}{l}\frac{9A^2}{l^4}\frac{z^2}{l^2}\,dz = \frac{9}{4}\frac{A^2EJ_0}{l^3};$$

$$C_{1p} = -PA.$$

Ahora $a_1 = -\frac{C_{1p}}{c_{11}} = \frac{Pl^3}{2{,}25AEJ_0}$, por consiguiente,

$$y(z) = a_1\varphi_1(z) = \frac{Pl^3}{2{,}25EJ_0}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{z}{l} + \frac{1}{2}\frac{z^3}{l^3}\right). \qquad (b)$$

Según la ecuación (a) obtenemos:
1) $z = 0$; $y = Pl^3 : 2EJ_0$; 2) $z = l/2$; $y = Pl^3 : 8EJ_0$;
3) $z = l$; $y = 0$.

Según la ecuación (b):
1) $z = 0$; $y = Pl^3 : 2{,}25EJ_0$; 2) $z = l/2$; $y = Pl^3 : 7{,}2EJ$; 3) $z = l$, $y = 0$.

La solución aproximada difiere de la exacta, en el peor de los casos, en un 12%.

§ 63. MÉTODO ENERGÉTICO DE DETERMINACIÓN DE LAS FRECUENCIAS DE OSCILACIONES LIBRES (MÉTODO DE RELEY)

Durante las oscilaciones libres sucede el paso de la energía cinética del sistema a la energía elástica potencial y viceversa. Si nos prescindimos de las resistencias, entonces según el principio de conservación de la energía se puede escribir lo siguiente:

$$K + V = C = \text{const}, \qquad (7.41)$$

donde K es la energía cinética y V, la elástica.

Examinemos una viga con masas distribuidas y concentradas que realiza oscilaciones libres. Supongamos que la forma principal $y_k(z)$, que corresponde a la frecuencia ω_k, nos es conocida. Entonces

$$y_k(z, t) = y_k(z)\,\text{sen}\,(\omega_k t + \varphi). \qquad (7.42)$$

Respectivamente, la velocidad de movimiento es

$$\dot{y}_k(z, t) = y_k(z)\,\omega_k \cos(\omega_k t + \varphi). \qquad (7.43)$$

En el momento en que sen $(\omega_k t + \varphi) = 0$, la energía elástica potencial también será igual a cero, ya que los desplazamientos de la viga son iguales a cero. En este mismo momento, las velocidades de oscilaciones $y_k(z, t)$ serán máximas, puesto que cos $(\omega_k t + \varphi) = 1$, y por lo tanto según la ecuación (7.41) podemos escribir lo siguiente:

$$K_{\text{máx}} + 0 = C. \tag{7.44}$$

Cuando cos $(\omega_k t + \varphi) = 0$ y sen $(\omega_k t + \varphi) = 1$ las velocidades son iguales a cero, lo que quiere decir que es igual a cero la energía cinética y que son máximos los desplazamientos de la viga $y_k(z, t)$ y la energía elástica V, es decir,

$$0 + V_{\text{máx}} = C. \tag{7.45}$$

De las expresiones (7.44) y (7.45) se desprende la igualdad principal del método:

$$K_{\text{máx}} = V_{\text{máx}}. \tag{7.46}$$

La expresión de la energía cinética puede escribirse así:

$$K = \int_0^l \frac{m(z)\,\omega_k^2 y_k^2(z)\cos^2(\omega_k t + \varphi)\,dz}{2} + \sum \frac{m_i \omega_k^2 y_k^2(z_i)}{2} \cos^2(\omega_k t + \varphi).$$

Por consiguiente, para cos $(\omega_k t + \varphi) = 1$

$$K_{\text{máx}} = \int_0^l \frac{m(z)\,\omega_k^2 y_k^2(z)}{2}\,dz + \frac{1}{2}\sum m_i \omega_k^2 y_k^2(z_i). \tag{7.47}$$

Sustituyendo esta expresión en (7.46) obtendremos:

$$\omega_k^2 = 2V_{\text{máx}} : \left[\int_0^l m(z)\,y_k^2(z)\,dz + \sum m_i y_k^2(z_i)\right]. \tag{7.48}$$

La energía elástica expresada a través del trabajo de las fuerzas internas es la siguiente:

$$V = \sum \int \frac{M^2}{2EJ(z)}\,dz = \sum \int \frac{EJ(z)\,[y_k''(z,\ t)]^2\,dz}{2}.$$

Tomando en consideración la ecuación (7.42) obtendremos:

$$V = \sum \int \frac{EJ(z)\,[y_k''(z)]^2 \operatorname{sen}^2(\omega_k t + \varphi)\,dz}{2}.$$

Por fin, cuando sen $(\omega_k t + \varphi) = 1$

$$V_{\text{máx}} = \sum \int \frac{EJ(z)\,[y_k''(z)]^2\,dz}{2}. \tag{7.49}$$

Ahora, según la ecuación (7.48) obtenemos:

$$\omega_k^2 = \sum \int EJ(z)\,[y_k''(z)]^2\,dz : \Big[\int_0^l m(z)\,y_k^2(z)\,dz + \sum m_i y_k^2(z_i)\Big]. \tag{7.50}$$

Para el caso cuando sobre la viga no hay masas concentradas, esta fórmula coincide con las fórmulas (7.13) y (7.32). Si la forma principal de las oscilaciones fuera conocida, la fórmula (7.50) nos daría una respuesta exacta. En los cálculos aproximados es necesario fijar la forma principal. En este caso, cuanto más se acerque la curva aproximada a la curva verdadera de la forma principal $y_k(z)$, que corresponde a la frecuencia ω_k, tanto más exacto será el cálculo según esta fórmula.

Mostremos que la frecuencia determinada por la ecuación (7.50) para curvas fijadas casualmente $\varphi_k(z)$ siempre es mayor que la verdadera.

En efecto, cuando es exacto el valor de la forma principal de oscilaciones $y_k(z)$, las fuerzas de inercia que le corresponden serán $m(z)\,y_k(z)\,\omega_k^2$, es decir, proporcionales a $y_k(z)$.

En la forma principal aproximada $\varphi_k(z)$, la diferencia $\Delta y(z) = \varphi_k(z) - y_k(z)$ puede considerarse como desplazamientos complementarios debida a las reacciones de los enlaces elásticos imaginarios colocados ininterrumpidamente sobre la viga.

La colocación de los enlaces aumenta la rigidez de la viga, lo que conduce al crecimiento de las frecuencias de sus oscilaciones libres. Por eso, si un mismo problema está resuelto varias veces por el método energético, empleando las formas principales fijadas diferentemente, entonces la más proxima a la verdadera será la frecuencia mínima obtenida.

Generalmente se recomienda adoptar en calidad de la forma principal aproximada de la viga $y_k(z)$, su línea elástica debida a las cargas que actúan sobre la viga o a las cargas próximas a ellas. En estos casos la energía potencial $V_{\text{máx}}$ para (7.48) puede calcularse a través del trabajo de las cargas externas que actúan o, respectivamente, de las cargas imaginarias próximas a ellas, a saber:

$$V_{\text{máx}} = \sum \int \frac{m(z)\,g y_k(z)\,dz}{2} + \sum \frac{m_i g y_k(z_i)}{2}.$$

Entonces (7.48) será:

$$\omega_k^2 = \Big[\sum \int m(z)\,g y_k(z)\,dz + \sum m_i g y_k(z)\Big] : \Big[\int_0^l m(z)\,y_k^2(z)\,dz + \sum m_i y_k^2(z_i)\Big]. \tag{7.51}$$

Si para la ecuación (7.51) se adopta una curva casual, entonces es necesario que ésta tenga por lo menos un punto común con la línea

elástica debida a aquellas cargas, cuyo trabajo se determina por el numerador de (7.51), lo que se ve del siguiente ejemplo.

Para precisar la frecuencia, se puede representar $y_k(z)$, al igual que en el método de Ritz, en la siguiente forma:

$$y_k(z) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(z), \tag{7.52}$$

es decir, como una curva que consta de varias curvas $\varphi_i(z)$ con parámetros indeterminados a_i. Luego, es necesario escoger estos parámetros de tal manera, que la frecuencia ω_j sea mínima. Mostremos cómo se hace esto. Con este propósito sustituyamos en la fórmula (7.50) el valor de $y_k(z)$ según (7.52):

$$\omega_j^2 = \frac{\sum \int EJ(z) \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i''(z)\right]^2 dz}{\int_0^l m(z) \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(z)\right]^2 dz + \sum_{\substack{\text{por ma-}\\ \text{sas con-}\\ \text{cent.}}} m_k \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(z_k)\right]^2} = \frac{A}{B}.$$

Las condiciones de mínimo son:

$$\frac{\partial \omega_1^2}{\partial a_k} - \frac{\partial}{\partial a_k}\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{\frac{\partial A}{\partial a_k} B - A \frac{\partial B}{\partial a_k}}{B^2} = \frac{1}{B}\left(\frac{\partial A}{\partial a_k} - \frac{A}{B}\frac{\partial B}{\partial a_k}\right) = 0.$$

O bien

$$\frac{\partial}{\partial a_k}(A - \omega_j^2 B)_{k=1,\ 2,\ \ldots,\ n} = 0. \tag{7.53}$$

Tomando en consideración (7.53) obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial a_k}\left[\sum \int EJ(z)\left[\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i''(z)\right]^2 dz - \omega_j^2 \left\{\int_0^l m(z) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(z)\right]^2 dz + \sum_{\substack{\text{por}\\ \text{masas}\\ \text{concent.}}} m_k \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(z_k)\right]^2 \right\}\right] = 0. \tag{7.54}$$

Después de la diferenciación y simplificación tenemos:

$$\sum \int EJ(z)\left[\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i''(z)\right] \varphi_k''(z)\, dz - \omega_j^2 \left\{\int_0^l m(z) \times \right.$$

$$\left. \times \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(z)\right] \varphi_k(z)\, dz + \sum_{\substack{\text{por masas}\\ \text{concent.}}} m_k \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(z_k)\right] \varphi_k(z_k) \right\} = 0. \tag{7.55}$$

Esta ecuación coincide con la ecuación (7.27).

Basándose en la ecuación (7.55) se componen n ecuaciones homogéneas con respecto a los parámetros a_i. Igualando el determinante de estas ecuaciones a cero, obtendremos la ecuación de las frecuencias, cuya raíz mínima ofrecerá el valor buscado de la frecuencia.

Así, por ejemplo, según los datos de [34], si para una viga empotrada por el extremo derecho (voladizo) de una sección rectangular variable con longitud l, cuando $b=1$, $h_z=h\frac{z}{l}$; $J=\frac{h^3z^3}{12l^3}$; $m(z)=\frac{\rho hz}{l}$ (ρ es la densidad), cuyo valor exacto de $\omega_1^2=\frac{2{,}657h}{l^2}\sqrt{\frac{E}{3\rho}}$, ponemos que

$$y_1(z)=a_1\left(1-\frac{z}{l}\right)^2+a_2\frac{z}{l}\left(1-\frac{z}{l}\right)^2,$$

entonces, al considerar solamente el primer sumando, $\omega_1^2=\frac{2{,}740h}{l^2}\sqrt{\frac{E}{3\rho}}$ (un error de $\sim 3\%$), y al considerar ambos sumandos $\omega_1^2=\frac{2{,}660}{l^2}\sqrt{\frac{E}{3\rho}}$ (un error de $\sim 0{,}1\%$).

Ejemplo 40. Determinar la frecuencia de oscilaciones de una viga simple sobre dos apoyos.

1. Determinemos la frecuencia ω_k fijando el valor exacto de la forma principal $y_k(z)=f_k \operatorname{sen}\frac{k\pi z}{l}$.

La carga que corresponde a ella es

$$q_k(z)=EJy_k^{IV}(z)=EJf_k\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4\operatorname{sen}\frac{k\pi z}{l}.$$

Según la fórmula (7.51) obtendremos:

$$\omega_k^2=\int_0^l EJ\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 f_k\operatorname{sen}\frac{k\pi z}{l}\,f_k\operatorname{sen}\frac{k\pi z}{l}\,dz:$$

$$:\int_0^l mf_k^2\operatorname{sen}^2\frac{k\pi z}{l}\,dz=\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4\frac{EJ}{m}.$$

El resultado es exacto.

2. Determinemos la primera frecuencia fijando la forma principal en forma de una línea elástica de la carga uniforme:

$$y_1(z)=A\left(\frac{z}{l}-2\frac{z^3}{l^3}+\frac{z^4}{l^4}\right),\quad \text{donde}\quad A=\frac{ql^4}{24EJ}. \tag{a}$$

Según la fórmula (7.51) se tiene:

$$\omega_1^2=\int_0^l qA\left(\frac{z}{l}-2\frac{z^3}{l^3}+\frac{z^4}{l^4}\right)dz:\int_0^l mA^2\left(\frac{z}{l}-2\frac{z^3}{l^3}+\frac{z^4}{l^4}\right)dz=$$

$$=\frac{24\cdot 126}{31l^4}\frac{EJ}{m}=\frac{97{,}584}{l^4}\frac{EJ}{m}.$$

3. Determinamos la primera frecuencia fijando la forma principal en forma de una línea elástica debida a la fuerza concentrada en el centro de la luz de la viga:

$$y_1(z)=f\left(3\frac{z}{l}-4\frac{z^3}{l^3}\right),\ \text{donde}\ f=Pl^3:48EJ. \qquad (b)$$

Según la fórmula (7.51) se tiene:

$$\omega_1^2=2\int_0^{l/2} qf\left(3\frac{z}{l}-4\frac{z^3}{l^3}\right)dz:2\int_0^{l/2} mf^2\left(3\frac{z}{l}-4\frac{z^3}{l^3}\right)^2dz=\frac{q\cdot 70\cdot 5}{m\cdot 16\cdot 17f}.$$

La curva está adoptada independientemente de la carga que actúa. Es necesario que una ordenada de ella coincida con la ordenada de la línea elástica debida a la carga uniforme; para ello adoptemos $f=5ql^4:384EJ$.

Ahora se tiene

$$\omega_1^2=\frac{70\cdot 24}{17l^4}\cdot\frac{EJ}{m}=\frac{98{,}824}{l^4}\cdot\frac{EJ}{m}.$$

El valor exacto es

$$\omega_1^2=\frac{97\cdot 409}{l^4}\cdot\frac{EJ}{m}.$$

Ejemplo 41. Determinar la primera frecuencia de oscilaciones de la viga de sección constante (fig. 141).

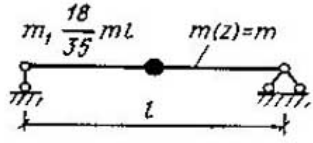


Fig. 141

Por forma principal admitimos $y_1(z)=f\left(3\frac{z}{l}-4\frac{z^3}{l^3}\right)$, donde $f=Pl^3:48EJ$.

1. De acuerdo con la fórmula (7.50) tenemos:

$$y''(z)=-f\frac{24z}{l^3};$$

$$\omega_1^2=2\int_0^{l/2}\frac{EJf^2 24^2z^2}{l^6}dz:\left[2\int_0^{l/2} mf^2\left(3\frac{z}{l}-4\frac{z^3}{l^3}\right)^2dz+\frac{18}{35}mlf^2\right]=48EJ:ml^4.$$

2. Según la fórmula (7.51) obtenemos:

$$\omega_1^2=2\int_0^{l/2} mgf\left(3\frac{z}{l}-4\frac{z^3}{l^3}\right)dz:$$

$$:\left[2\int_0^{l/2} f^2\left(3\frac{z}{l}-4\frac{z^3}{l^3}\right)^2dz+\frac{18}{35}mlf^2\right]=319g:280f.$$

Exijamos que

$$f=\frac{18}{35}mgl\frac{l^3}{48EJ}+\frac{5}{384EJ}mgl^4=\frac{319mgl^4}{48\cdot 280EJ}.$$

Ahora $\omega_1^2=48EJ:ml^4$.

Ejemplo 42. Determinar la primera frecuencia de oscilaciones de una viga imponderable de sección constante con masas concentradas (fig. 142).

Por forma principal tomamos la línea elástica debida a dos pesos iguales Mg. Como no hay masas distribuidas, es necesario determinar sólo las flechas bajo los pesos:

$$y\left(\frac{l}{3}\right) = Mg5l^3 : 162EJ.$$

Aplicamos la fórmula (7.51):

$$\omega_1^2 = (2MgMg5l^3 : 162EJ) : 2M\,(Mg5l^3 : 162EJ)^2 = \frac{162EJ}{5Ml^3}.$$

Hemos obtenido una respuesta exacta, ya que hemos partido de la forma principal exacta.

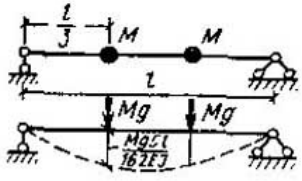


Fig. 142

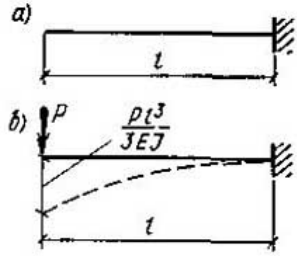


Fig. 143

Ejemplo 43. Determinar la forma principal de oscilaciones de la viga de sección constante (fig. 143, *a*):

1. Por forma principal tomamos la línea elástica de la carga uniforme:

$$y(z) = A\left(3 - 4\frac{z}{l} + \frac{z^4}{l^4}\right), \text{ donde } A = ql^4 : 24EJ.$$

Según la fórmula (7.54) obtenemos:

$$\omega_1^2 = \int_0^l qA\left(3 - 4\frac{z}{l} + \frac{z^4}{l^4}\right)dz : \int_0^l mA^2\left(3 - 4\frac{z}{l} + \frac{z^4}{l^4}\right)^2 dz =$$

$$= \frac{18 \cdot 9}{13}\,\frac{EJ}{ml^4} = 12{,}46\,\frac{EJ}{ml^4}.$$

2. Por forma principal tomamos la línea elástica debida a la carga imaginaria (fig. 143, *b*):

$$y(z) = \frac{Pl^3}{3EJ}\left(1 - \frac{3}{2}\,\frac{z}{l} + \frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{l^3}\right).$$

Según la fórmula (7.51) tenemos:

$$\omega_1^2 = P\,\frac{Pl^3}{3EJ} : \int_0^l m\,\frac{P^2l^6}{9(EJ)^2}\left(1 - \frac{3}{2}\,\frac{z}{l} + \frac{1}{2}\,\frac{z^3}{l^3}\right)^2 dz =$$

$$= \frac{140}{11}\cdot\frac{EJ}{ml^4} = 12{,}73\,\frac{EJ}{ml^4}.$$

§ 64. MÉTODO DE DESPLAZAMIENTOS POSIBLES EMPLEADO CUANDO SE DETERMINAN LAS FRECUENCIAS DE OSCILACIONES PROPIAS. Dejemos que la ecuación de oscilaciones de la viga sea la siguiente:

$$y_k(z, t) = y_k(z) \operatorname{sen}(\omega_k t + \varphi). \tag{7.56}$$

Las fuerzas de inercia son:
debidas a las masas distribuidas

$$i_k^*(z, t) = -m(z)\frac{\partial^2 y_k(z, t)}{\partial t^2} = m(z)\, y_k(z)\, \omega_k^2 \operatorname{sen}(\omega_k t + \varphi);$$

debidas a las masas concentradas

$$J_i^*(z, t) = m_i y_k(z_i)\, \omega_k^2 \operatorname{sen}(\omega_k t + \varphi).$$

Estas fuerzas externas provocan en la viga los momentos M y Q que varían con el tiempo según la misma ley de sen $(\omega_k t + \varphi)$, es decir,

$$\left.\begin{aligned} M_k(z, t) &= M_k(z) \operatorname{sen}(\omega_k t + \varphi); \\ Q_k(z, t)) &= Q_k(z) \operatorname{sen}(\omega_k t + \varphi). \end{aligned}\right\} \tag{7.57}$$

Apliquemos el principio de los desplazamientos posibles. Demos a la viga la posibilidad de desplazamiento en forma de cierta línea elástica $\varphi_k(z)$ debida a cualquier carga imaginaria. Supongamos que las fuerzas internas que corresponden a $\varphi_k(z)$ son $\overline{M}_k$ y $\overline{Q}_k$.

Compongamos la ecuación de trabajo de las fuerzas internas y externas, tomando en consideración, para simplificar la exposición, solamente los momentos flectores:

$$\int_0^l m(z)\, y_k(z)\, \omega_k^2 \operatorname{sen}(\omega_k t + \varphi)\, \varphi_k(z)\, dz +$$

$$+ \sum m_i y_k(z_i)\, \omega_k^2 \operatorname{sen}(\omega_k t + \varphi)\, \varphi_k(z_i) =$$

$$= \sum \int M_k(z) \operatorname{sen}(\omega_k t + \varphi) \frac{\overline{M}_k}{EJ(z)}\, dz.$$

De aquí obtenemos que

$$\omega_k^2 = \sum \int \frac{M_k(z)\, \overline{M}_k}{EJ(z)}\, dz : \left[\int m(z)\, y_k(z)\, \varphi_k(z)\, dz + \right.$$

$$\left. + \sum m_i y_k(z_i)\, \varphi_k(z_i)\right]. \tag{7.58}$$

En este método nos vemos obligados a fijar dos funciones: $y_k(z)$ y $\varphi_k(z)$. Si en calidad de los desplazamientos posibles $\varphi_k(z)$ fijamos

el desplazamiento real $y_k(z)$, la fórmula (7.58) coincidirá con la fórmula (7.50) del método energético.

Si en calidad de $\varphi_k(z)$ adoptamos la línea elástica debida a la fuerza $P = 1$ aplicada a la viga cuando $z = a$, entonces el denominador de (7.58) determinará la flecha en el punto $z = a$, es decir, $y_k(a)$. En este caso podemos escribir la ecuación (7.58) del modo siguiente:

$$\omega_k^2 = 1 : \left[\int_0^l m(z) \frac{y_k(z)}{y_k(a)} \varphi_k(z)\, dz + \sum m_i \frac{y_k(z_i)}{y_k(a)} \varphi_k(z_i) \right]. \quad (7.59)$$

Ejemplo 44. Determinar la primera frecuencia de oscilaciones de una viga de sección constante sobre dos apoyos articulados con una masa uniformemente distribuida.

Por $y_1(z)$ tomamos la línea elástica debida a la carga uniforme $q = mg$:

$$y_1(z) = \frac{ql^4}{24EJ} \left(\frac{z}{l} - 2\frac{z^3}{l^3} + \frac{z^4}{l^4} \right).$$

Por $\varphi_1(z)$ tomamos la línea elástica de $P = 1$ en el centro de la luz:

$$\varphi_1(z) = \frac{l^3}{48EJ} \left(3\frac{z}{l} - 4\frac{z^4}{l^3} \right).$$

La flecha de la viga debida a la carga uniforme $y\left(\frac{l}{2}\right) = 5ql^4 : 384EJ$. Según la fórmula (7.59) obtendremos:

$$\omega_1^2 = 1 : \left[2 \int_0^{l/2} m \frac{ql^4}{24EJ} \left(\frac{z}{l} - 2\frac{z^3}{l^3} + \frac{z^4}{l^4} \right) \frac{l^3}{48EJ} \left(3\frac{z}{l} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{4z^3}{l^3} \right) : \frac{5ql^4}{384EJ} \right] = \frac{102{,}455}{l^4} \frac{EJ}{m}.$$

§ 65. MÉTODO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS EMPLEADO CUANDO SE DETERMINAN LAS FRECUENCIAS DE OSCILACIONES LIBRES. Las fuerzas de inercia en la posición extrema de la viga, cuando las velocidades de desplazamientos son iguales a cero, son las siguientes: las distribuidas $i^*(z) = m(z)\, y_k(z)\, \omega_k^2$; las concentradas $J_i^* = m_i y_k(z_i)\, \omega_k^2$.

Dichas cargas determinan la forma principal de oscilaciones de la viga $y_k(z)$. Examinemos ahora una carga que es ω_k^2 veces menor (fig. 144):

$$\bar{i}^*(z) = m(z)\, y_k(z): \quad \bar{J}_i^* = m_i \bar{y}_k(z_i).$$

Está claro, que también la línea elástica con tales cargas $\bar{y}_{k1}(z)$ será en ω_k^2 veces menor que la anterior, es decir,

$$\bar{y}_{k1}(z) = y_k(z) : \omega_k^2.$$

De aquí se desprende que

$$\omega_k^2 = y_k(z) : \bar{y}_{k1}(z). \quad (7.60)$$

Esta igualdad es válida para cualesquiera de los valores z.

En los cálculos aproximados, adoptamos en calidad de $y_k(z)$ una curva conveniente $\varphi_k(z)$ y entonces obtendremos la primera aproximación:

$$\omega_{k1}^2 = \varphi_k(z) : \bar{\varphi}_{k1}(z). \tag{7.61}$$

Aquí $\bar{\varphi}_{k1}(z)$ es, respectivamente, la línea elástica debida a las cargas distribuidas y concentradas

$$\bar{i}_1^*(z) = m(z)\,\varphi_k(z); \quad \bar{J}_{i1}^* = m_i \varphi_k(z_i).$$

En este caso (7.61) dará la función y no el número como en la ecuación (7.60). Por consiguiente, es necesario calcular, según (7.61),

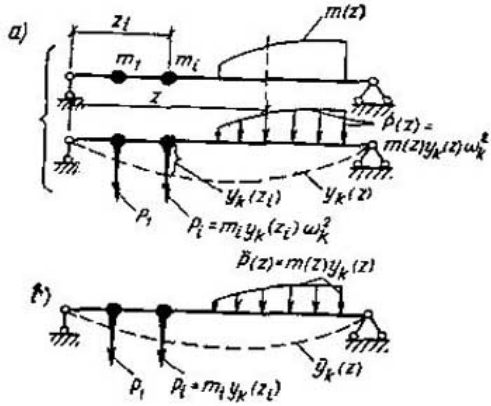


Fig. 144

ω_{k1}^2 para una serie de valores diferentes de z, y si las frecuencias obtenidas no difieren mucho una de la otra, hay que tomar el valor promedio de ω_{k1}^2. Esta será la primera aproximación. Si ω_{k1}^2 para diferentes z difieren mucho, entonces hay que seguir el cálculo y determinar ω_{k2}^2 de la segunda aproximación. Con este propósito es necesario hallar, respectivamente, la línea elástica $\varphi_{k2}(z)$ debida a las cargas distribuida y concentrada:

$$\bar{\bar{i}}_2^*(z) = m(z)\,\bar{\varphi}_{k1}(z); \quad \bar{\bar{J}}_{i2}^* = m_i \bar{\varphi}_{k1}(z_i),$$

luego, por la fórmula

$$\omega_{k2}^2 = \frac{\bar{\varphi}_{k1}(z)}{\bar{\bar{\psi}}_{k2}(z)} \tag{7.62}$$

calcular la segunda aproximación, etc.

El método de aproximaciones sucesivas permite obtener ω_k^2 con cualquiera precisión. Sin embargo, es bastante voluminoso, ya que requiere hallar las líneas elásticas debidas a cargas complicadas.

§ 66. MÉTODO DE SUSTITUCIÓN DE LAS MASAS DISTRIBUIDAS POR LAS CONCENTRADAS. Dicho método se basa en la idea de la sustitución aproximada del sistema con un grado infinito de libertad por el sistema con un grado finito, mediante el reemplazo de la masa distribuida por las concentradas, lo que puede realizarse por dos métodos.

Según el primer método las masas distribuidas se dividen en tramos, y en cada tramo la masa distribuida se sustituye por la concentrada en el centro de su gravedad (fig. 145, *a*).

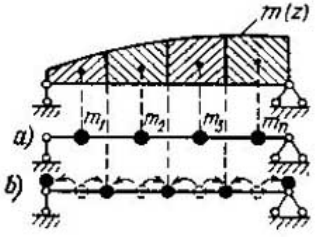


Fig. 145

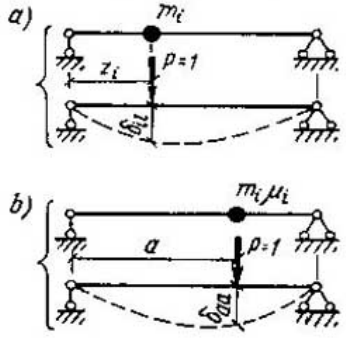


Fig. 146

De acuerdo con el segundo método las masas en los tramos se distribuyen según la ley de la palanca (fig. 145, *b*). Muchas veces el segundo método ofrece un sistema más simple con un número menor de grados de libertad que el primero.

§ 67. MÉTODO DE TRASLACIÓN DE MASAS PARA DETERMINAR LA PRIMERA FRECUENCIA DE OSCILACIONES LIBRES. Examinemos un sistema con un grado de libertad en forma de una viga imponderable con una masa concentrada m_i (fig. 146). La frecuencia de oscilaciones libres de tal sistema $\omega^2 = 1/m_i\delta_{ii}$ (fig. 146, *a*).

Traslademos esta masa con cierto coeficiente de corrección μ_i a otro lugar de la viga (fig. 146, *b*) obteniendo un nuevo sistema con una frecuencia $\omega^2 = 1/\mu_i m_i \delta_{aa}$. Exijamos que ambos sistemas tengan igual frecuencia, es decir,

$$\frac{1}{m_i\delta_{ii}} = \frac{1}{\mu_i m_i \delta_{aa}}.$$

De aquí obtenemos el valor del coeficiente de corrección μ_i, al trasladar la masa de un lugar a otro:

$$\mu_i = \delta_{ii} : \delta_{aa}. \qquad (7.63)$$

Si tenemos ahora un sistema análogo con n grados de libertad (fig. 147), entonces, reuniendo todas las masas en un punto para

$z = a$, sustituimos aproximadamente tal sistema por el sistema con un grado de libertad. En este caso la masa reducida será

$$M = \sum_1^n \mu_i m_i = \sum_1^n m_i (\delta_{ii} : \delta_{aa}). \tag{7.64}$$

Frecuencia aproximada de oscilaciones:

$$\omega^2 = \frac{1}{M\delta_{aa}} = 1 : \sum_1^n m_i \delta_{ii}. \tag{7.65}$$

La magnitud inversa a ésta es

$$\frac{1}{\omega^2} = \sum_1^n m_i \delta_{ii} = m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22} + \ldots + m_n\delta_{nn}. \tag{7.66}$$

Esta expresión puede escribirse así:

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \ldots + \frac{1}{\omega_n^2}. \tag{7.67}$$

Así pues, el valor inverso del cuadrado de la frecuencia de oscilaciones del sistema con n grados de libertad es igual a la suma n

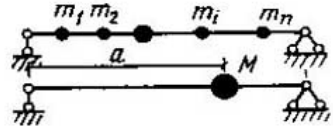


Fig. 147

de valores inversos de los cuadrados de las frecuencias, si el sistema se considera cada vez con un grado de libertad que tiene alternativamente las masas m_1, m_2, . . ., m_n.

Como se ve, la fórmula (7.67) es bastante simple. Ella no exige la elección del lugar de ubicación de la masa reducida M, ni la determinación del valor de la masa, con lo que se alcanza una solución simple. El mérito de la fórmula consiste también en el hecho de que siempre ofrece valores rebajados de la frecuencia a determinar, como se dice, da aproximación por abajo [18]. Esto permite, en unión con el método energético que da la aproximación de la frecuencia por arriba, establecer los límites prácticamente estrechos, entre los cuales se halla el valor verdadero de la frecuencia.

La insuficiencia de la fórmula consiste en que ella a veces da aproximaciones inexactas.

Si junto con las masas concentradas el sistema tiene masas distribuidas (fig. 148), entonces la fórmula (7.67) será la siguiente:

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \ldots + \frac{1}{\omega_k^2} + \int_0^l m(z)\,\delta_{zz}\,dz, \tag{7.68}$$

donde δ_{zz} es el desplazamiento de una masa infinitamente pequeña $m\,(z)\,dz$ debido a la fuerza unitaria aplicada con la coordenada z (fig. 148).

Ejemplo 45. Determinar la primera frecuencia de oscilaciones de la viga sobre dos apoyos con masa uniformemente distribuida y una rigidez constante EJ.

Para una viga sobre dos apoyos

$$\delta_{zz}=\frac{l^3}{3EJ}\,\frac{z^2}{l^2}\left(1-\frac{z}{l}\right)^2.$$

Según la fórmula (7.68) obtenemos:

$$\frac{1}{\omega^2}=\int_0^l m\,\frac{l^3}{3EJ}\,\frac{z^2}{l^2}\left(1-\frac{z}{l}\right)^2 dz=\frac{ml^4}{90EJ}.$$

De aquí $\omega=\dfrac{9{,}487}{l^2}\sqrt{\dfrac{EJ}{m}}$. El valor exacto de $\omega=\dfrac{9{,}87}{l^2}\sqrt{\dfrac{EJ}{m}}$.

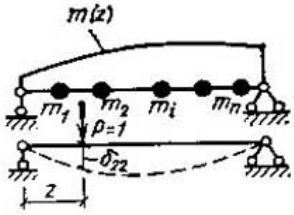


Fig. 148

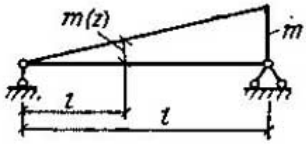


Fig. 149

Según el método energético (véase el ejemplo 33), anteriormente se obtuvo

$$\omega=\frac{9{,}88}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

Por lo tanto, $9{,}49 < 9{,}87 < 9{,}88$. La diferencia con el valor exacto es, aproximadamente, de un 3,9%.

Ejemplo 46. Determinar la primera frecuencia de oscilaciones de la viga de rigidez constante EJ con una masa distribuida según el diagrama triangular (fig. 149).

Según la fórmula (7.68) tenemos:

$$\frac{1}{\omega^2}=\int_0^l m\,\frac{z}{l}\,\frac{l^3}{3EJ}\,\frac{z^2}{l^2}\left(1-\frac{z}{l}\right)^2 dz=\frac{ml^4}{180EJ}.$$

De aquí se desprende que: $\omega=\dfrac{13{,}42}{l^2}\sqrt{\dfrac{EJ}{m}}$. El valor exacto está dentro de los límites de $\dfrac{13{,}89}{l^2}\sqrt{\dfrac{EJ}{m}}<\omega<\dfrac{13{,}91}{l^2}\sqrt{\dfrac{EJ}{m}}$. La solución ha determinado la frecuencia con precisión de un 3,5%, aproximadamente.

Ejemplo 47. Determinar la primera frecuencia de oscilaciones de la viga (véase la fig. 141). Según la fórmula (7.68) tenemos:

$$\frac{1}{\omega^2}=\frac{1}{\omega_1^2}+\int_0^l m\frac{l^3}{3EJ}\cdot\frac{z^2}{l^2}\left(1-\frac{z}{l}\right)^2 dz=\frac{1}{\omega_1^2}+\frac{ml^4}{90EJ};$$

$$\omega_1^2=\frac{1}{\frac{48}{35}ml\frac{l^3}{48EJ}};\quad \frac{1}{\omega^2}=\frac{3ml^4}{280EJ}+\frac{ml^4}{90EJ}=\frac{55ml^4}{2520EJ}$$

Por consiguiente, $\omega^2=\frac{45{,}82EJ}{ml^4}$. Según el método energético $\omega^2=\frac{48EJ}{ml^4}$ (véase el ejemplo 41). El valor verdadero de la primera frecuencia ω se encuentra dentro de los siguientes límites:

$$\sqrt{45{,}82EJ:ml^4}<\omega<\sqrt{48EJ:ml^4}.$$

Si se adopta el valor medio de $\omega=\frac{6{,}848}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}$, la diferencia será igual al 1%, aproximadamente.

Ejemplo 48. Determinar la primera frecuencia de oscilaciones de la viga (fig. 142). Los desplazamientos unitarios de las mases son:

$$\delta_{11}=\delta_{22}=4l^3:243EJ.$$

Según la fórmula (7.67) tenemos:

$$\frac{1}{\omega_1^2}=\frac{1}{\omega_2^2}=M\frac{4l^3}{243EJ};\quad \frac{1}{\omega^2}=\frac{1}{\omega_1^2}+\frac{1}{\omega_2^2}=2M\frac{4l^3}{243EJ}.$$

El valor exacto de $\frac{1}{\omega^2}=15Ml^3:486EJ$.

§ 68. MÉTODO DE REDUCCIÓN DE LAS MASAS EMPLEADO PARA DETERMINAR LA PRIMERA FRECUENCIA DE OSCILACIONES LIBRES.

El esquema con masas concentradas m_i y una masa distribuida $m(z)$ se sustituye por una viga imponderable con una masa M concentrada en cualquier punto (véase la fig. 147). La viga de sustitución debe ser dinámicamente equivalente a la dada. Ella se establece basándose en la comparación de las energías cinéticas de estas dos vigas.

Dejemos que la primera forma de oscilaciones sea $y(z)$. Entonces

$$y(z,\ t)=y(z)\,f(t);\quad \dot{y}(z,\ t)=y(z)\,\dot{f}(t).$$

Situamos la masa concentrada M para $z=a$. La energía cinética de la viga dada es

$$K=\frac{1}{2}\int_0^l m(z)\,y^2(z)\,[\dot{f}(t)]^2\,dz+\frac{1}{2}\sum m_i y^2(z_i)\,[\dot{f}(t)]^2.$$

La energía cinética de la viga de sustitución es:

$$K=\frac{1}{2}My^2(a)\,[\dot{f}(t)]^2.$$

De la igualdad de las energías cinéticas obtenemos:

$$M = \left[\int_0^l m(z)\, y^2(z)\, dz + \sum m_i y^2(z_i) \right] : y^2(a) \qquad (7.69)$$

La frecuencia de oscilaciones es

$$\omega^2 = 1 : M\delta_{11}. \qquad (7.70)$$

La insuficiencia de este método consiste en la indeterminación de elección del lugar para la masa reducida. Generalmente, en una viga sobre dos apoyos, la masa reducida se suele ubicar en el centro de la luz.

Si la viga tiene una masa m uniformemente distribuida, entonces para $y(z) = \operatorname{sen}(\pi z/l)$ la masa M reducida al centro de la luz será la siguiente:

$$M = \int_0^l m \operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{l}\, dz = \frac{ml}{2}. \qquad (7.71)$$

Este resultado corresponde a la separación de la masa de la viga en dos partes (véase la fig. 145) y a su distribución según la ley de la palanca en los límites de las separaciones.

Huelga señalar que para $a = l/2$ el carácter de la curva adoptada no se refleja mucho en el resultado, a condición de que su curvatura tenga un mismo signo. Así, por ejemplo, si $y(z)$ se adopta en forma de una línea elástica debida a la fuerza concentrada P en el centro de la luz, es decir, $y(z) = A\left(3\frac{z}{l} - 4\frac{z^3}{l^3}\right)$, $A = l^3/48EJ$, entonce según (7.69) obtendremos:

$$M = 2\int_0^{l/2} mA^2\left(3\frac{z}{l} - 4\frac{z^3}{l^3}\right)^2 dz : A^2 = \frac{8ml}{15} \approx \frac{ml}{2}.$$

§ 69. MÉTODO DE DETERMINACIÓN APROXIMADA DE LA PRIMERA FRECUENCIA DE OSCILACIONES LIBRES EN UN SISTEMA CON n GRADOS DE LIBERTAD. Cuando una viga está sustituida por un sistema con n grados de libertad, la primera frecuencia de sus oscilaciones puede determinarse aproximadamente según la desigualdad establecida por S. A. Bernstein:

$$\frac{1}{\sqrt{B_2}} < \omega_1^2 < 2 : B_1\left(1 + \sqrt{2\frac{B_2}{B_1^2} - 1}\right), \qquad (7.72)$$

donde

$$B_1 = \sum m_i\delta_{ii} = m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22} + \ldots + m_n\delta_{nn}; \qquad (7.73)$$

$$B_2 = \sum m_i^2\delta_{ii}^2 + 2\sum m_i m_k \delta_{ik}^2 \text{ (cuando } i \neq k). \qquad (7.74)$$

Se puede considerar, con presición aceptable, que

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{B_2}} + \frac{2}{B_1\left(1+\sqrt{2\frac{B_2}{B_1^2}-1}\right)}\right]. \qquad (7.75)$$

Ejemplo 49. Determinar la primera frecuencia de oscilaciones de una viga (véase la fig. 142):

$$\delta_{11} = \delta_{22} = 8l^3 : 486EJ; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = 7l^3 : 486EJ;$$

$$B_1 = (m8l^3 : 486EJ)\,2 = 16ml^3 : 486EJ;$$

$$B_2 = [m^2 (8l^3 : 486EJ)^2]\,2 + 2mm\,(7l^3 : 486EJ)^2 = 226m^2l^6 : (486EJ)^2;$$

$$\frac{B_2}{B_1^2} = \frac{226}{256}.$$

Según la fórmula (7.75) obtenemos:

$$\omega_1^2 \approx \frac{1}{2}\left(\frac{486EJ}{ml^3 15{,}033} + \frac{486EJ}{ml^3 15}\right).$$

El valor exacto de

$$\omega_1^2 = 486EJ : 15ml^3.$$

§ 70. CÁLCULO APROXIMADO DE UNA VIGA A LA ACCIÓN DE LAS CARGAS DISTRIBUIDAS Y DE LOS IMPULSOS DISTRIBUIDOS. La viga con una masa distribuida se sustituye por una viga imponderable con masa concentrada, es decir, su cálculo se reduce al cálculo del sistema con un grado de libertad.

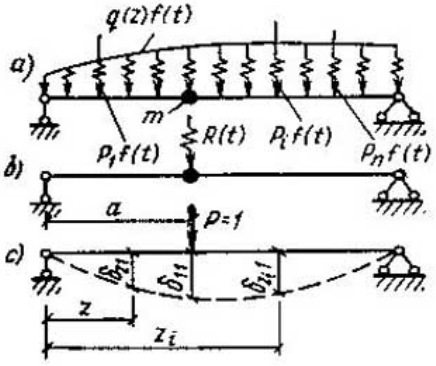


Fig. 150

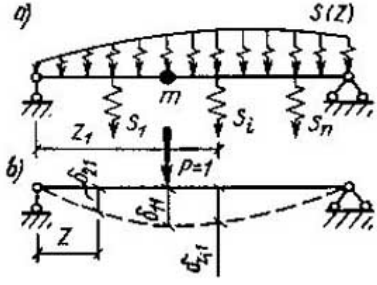


Fig. 151

Cálculo a la acción de la carga distribuida y de las fuerzas concentradas. Sustituyamos la acción de las cargas dadas por la fuerza concentrada $R\,(t)$ aplicada directamente a la masa, la cual provoca el mismo desplazamiento de la masa que la carga dada (fig. 150, *a*, *b*).

Con este propósito apliquemos la línea de influencia del desplazamiento de la masa, la cual se determina por la línea elástica debida a $P = 1$ aplicada en el lugar de disposición de la masa m, es decir, para $z = a$ (fig. 150, *c*). Escribamos la igualdad de los desplaza-

mientos debidos a la carga dada y de la fuerza concentrada $R(t)$ que la sustituye:

$$R(t)\,\delta_{11} = \int_0^l q(z)\,f(t)\,dz\,\delta_{z1} + \sum P_i f(t)\,\delta_{z_i 1}. \qquad (7.76)$$

Notemos que $\int_0^l q(z)\delta_{z1}\,dz + \sum P_i \delta_{z_i 1} = y(a)$ es la flecha de la viga en el lugar de disposición de la masa debida a la carga dada, si la consideramos estática, es decir, cuando $f(t) = 1$. Ahora a partir de (7.76) obtendremos el valor de la fuerza de sustitución:

$$R(t) = \frac{\left(\int_0^l q(z)\,\delta_{z1}\,dz + \sum P_i \delta_{z_i 1}\right) f(t)}{\delta_{11}} = \frac{y(a)\,f(t)}{\delta_{11}}. \qquad (7.77)$$

Una vez determinada la fuerza $R(t)$, se utiliza la teoría de los sistemas con un grado de libertad, expuesta anteriormente.

Cálculo a la acción de los impulsos distribuidos y concentrados. Al igual que la carga, los impulsos dados (fig. 151) los sustituimos por el impulso concentrado S aplicado a la masa. El desplazamiento de la masa debido al impulso concentrado aplicado a ella, es

$$y = Sf_1(t). \qquad (7.78)$$

Desplazamiento debido a los impulsos dados:

$$y = \int_0^l s(z)\,dz f_1(t)\,\frac{\delta_{z1}}{\delta_{11}} + \sum S_i f_1(t)\,\frac{\delta_{z_i 1}}{\delta_{11}}. \qquad (7.79)$$

Igualando las ecuaciones (7.78) y (7.79) obtendremos:

$$Sf_1(t) = \int_0^l s(z)\,\frac{\delta_{z1}}{\delta_{11}} f_1(t)\,dz + \sum S_i\,\frac{\delta_{z_i 1}}{\delta_{11}} f_1(t).$$

De aquí el impulso de sustitución es

$$S = \int_0^l s(z)\,\frac{\delta_{z1}}{\delta_{11}}\,dz + \sum S_i\,\frac{\delta_{z_i 1}}{\delta_{11}}. \qquad (7.80)$$

Ejemplo 50. Determinar el momento flector en una viga de rigidez constante con masa uniformemente distribuida debido al impulso s^* uniformemente distribuido (véase la fig. 116).

Anteriormente, en el § 53, tal problema fue resuelto con exactitud. Para $k = 1$ obtendremos:

$$M_{\text{máx}}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{4s^*}{\pi}\sqrt{\frac{EJ}{m}} = 1{,}273 s^* \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

Resolvamos este problema aproximadamente. La masa reducida al centro de la luz $M \approx ml/2$. El cuadrado de la frecuencia de oscilaciones propias es

$$\omega^2 = \frac{1}{M\delta_{11}} = 96EJ : ml^4.$$

En nuestro caso

$$\delta_{21}=\delta_{11}\left(3\frac{z}{l}-4\frac{z^3}{l^3}\right).$$

Según la fórmula (7.80) tenemos

$$S=2\int_0^{\frac{l}{2}} s^*\left(3\frac{z}{l}-4\frac{z^3}{l^3}\right)dz=\frac{5}{8}s^*l.$$

De acuerdo con la fórmula (2.46)

$$y=\frac{\frac{5}{8}s^*l}{\frac{ml}{2}\sqrt{96EJ:ml^4}}\operatorname{sen}\omega t.$$

Respectivamente tendremos:

$$y_{\text{máx}}=\frac{5}{4}s^*:m\sqrt{96EJ:ml^4}.$$

Hallemos la fuerza sustituidora P, la cual da el mismo desplazamiento

$$\frac{Pl^3}{48EJ}=\frac{5}{4}s^*:m\sqrt{96EJ:ml^4}.$$

De aquí obtenemos

$$P=\frac{5s^*}{4l}\sqrt{\frac{24EJ}{m}}.$$

El momento flector en el centro de la luz de la viga es:

$$M\left(\frac{l}{2}\right)=P\frac{l}{4}=\frac{5s^*}{16}\sqrt{\frac{24EJ}{m}}=1{,}521s^*\sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

CAPÍTULO 8 * ELEMENTOS DE CÁLCULO DE LAS VIGAS A LA ACCIÓN DE LA CARGA MÓVIL

§ 71. MOVIMIENTO DE UNA CARGA LIGERA POR UNA VIGA PESADA DE RIGIDEZ CONSTANTE CON LA MASA DISTRIBUIDA UNIFORMEMENTE. Imaginémonos, que por una viga apoyada en dos extremos articulados se mueve con una velocidad constante v una carga P cuya masa es despreciable en comparación con la masa de la viga (fig. 152, *a*). Examinemos primeramente la solución aproximada en la cual la viga con masa distribuida se sustituye por un sistema con un grado de libertad y con masa concentrada en el centro de la luz (fig. 152, *b*). La ecuación diferencial de los movimientos forzados de la masa reducida, sin tener en cuenta las fuerzas de resistencia, es:

$$\ddot{y}+\omega^2 y=\omega^2\delta_{1p}P(t), \qquad (8.1)$$

donde $\omega^2 = 1 : M\delta_{11}$, $\delta_{11} = l^3 : 48EJ$, es la flexión del medio de la viga producida por la fuerza $P = 1$ aplicada allí mismo.

La línea de influencia de la flexión en medio del tramo de la viga la consideraremos aproximadamente como sinusoide. Entonces,

$$\delta_{1p} = \delta_{p1} = \delta_{11} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l}. \tag{8.2}$$

Con tal suposición la ecuación (8.1) será:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \omega^2 \delta_{11} \operatorname{sen} \frac{\pi a}{l} P = \omega^2 \delta_{11} P \operatorname{sen} \theta t, \tag{8.3}$$

donde $a = vt$ y $\theta = \pi v/l$.

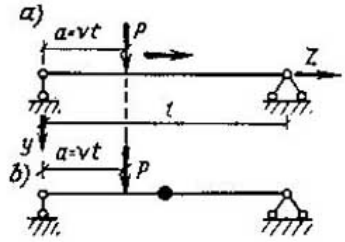


Fig. 152

Por su aspecto la ecuación (8.3) es semejante a la ecuación con la carga vibratoria P sen θt [véase (2.80)], y por tal razón escribiremos inmediatamente la integral:

$$y = A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t + \frac{P\delta_{11} \operatorname{sen} \theta t}{1 - (\theta^2/\omega^2)}. \tag{8.4}$$

Respectivamente tenemos que

$$\dot{y} = \omega A \cos \omega t - \omega B \operatorname{sen} \omega t + \theta \frac{P\delta_{11} \cos \theta t}{1 - \theta^2 : \omega^2}. \tag{8.5}$$

Las constantes de integración las determinemos basándose en las condiciones iniciales con $t = 0$. Supongamos que la viga haya estado en reposo, es decir, $y(0) = 0$; $\dot{y}(0) = v(0) = 0$. Empleando estas condiciones, obtenemos:

$$B = 0 \quad \text{y} \quad A = -\frac{\theta}{\omega} \cdot \frac{P\delta_{11}}{1 - (\theta^2/\omega^2)}.$$

Ahora la ecuación (8.4) adquiere la siguiente forma:

$$y = \frac{P\delta_{11}}{1 - \beta^2} (\operatorname{sen} \theta t - \beta \operatorname{sen} \omega t), \tag{8.6}$$

donde $\beta = \theta : \omega$.

Tomando por sinusoide la primera forma principal de las oscilaciones libres de la viga, obtenemos la masa reducida $M = ml : 2$. Por consiguiente, $\omega^2 = 96EJ : ml^4 \approx \frac{\pi^4 EJ}{ml^4}$. Señalemos que la

ecuación (8.6) puede ser obtenida de la (2.93). Representemos la (8.6) de otra forma:

$$y = \frac{P\delta_{11}}{1-\beta^2}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi a}{l} - \beta \operatorname{sen}\frac{1}{\beta}\cdot\frac{\pi a}{l}\right), \tag{8.7}$$

donde $a = vt$.

Las ecuaciones (8.6) y (8.7) determinan la flexión causada en medio de la viga por la carga móvil P en función de la posición de esta última sobre la viga. Con $\theta \to \omega$, es decir, siendo $\beta \to 1$, tenemos el caso de resonancia. Este último tiene lugar cuando

$$\beta = \pi v_{cr} : l\frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{l v_{cr}}{\pi\sqrt{EJ:m}} = 1.$$

De aquí obtenemos la velocidad crítica de la carga

$$v_{cr} = \frac{\pi}{l}\sqrt{EJ:m}. \tag{8.8}$$

Ahora examinemos la solución exacta de este problema propuesta por el académico A. N. Krilov.

La ecuación de las formas principales de oscilaciones de la viga apoyada en dos extremos es:

$$y_k(z) = \operatorname{sen}\frac{k\pi z}{l}.$$

Descompongamos en las formas principales la carga P en movimiento, siendo la coordenada $z = a$. Según (5.31) obtenemos:

$$q(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} m \operatorname{sen}\frac{k\pi z}{l}\cdot\frac{(-P)\operatorname{sen}\frac{k\pi z}{l}}{\int_0^l m \operatorname{sen}^2\frac{k\pi z}{l}\,dz} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2P}{l}\operatorname{sen}\frac{k\pi a}{l}\operatorname{sen}\frac{k\pi z}{l}. \tag{8.9}$$

La ecuación diferencial de oscilaciones transversales, sin considerar las resistencias, tiene la siguiente forma:

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{2P}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{k\pi a}{l}\operatorname{sen}\frac{k\pi z}{l}. \tag{8.10}$$

Sustituyendo más adelante $a = vt$ y designando $\theta_k = k\pi v/l$, obtenemos:

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{2P}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{sen}\theta_k t \operatorname{sen}\frac{k\pi z}{l}. \tag{8.11}$$

Buscaremos la solución de esta ecuación en la siguiente forma:

$$y(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)\, y_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)\operatorname{sen}\frac{k\pi z}{l}, \tag{8.12}$$

donde $F_k(t)$ es la función de tiempo desconocida.

Sustituyendo (8.12) en (8.11), obtenemos:

$$EJ \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) \left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} + m \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{F}_k(t) \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} =$$

$$= \frac{2P}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen} \theta_k t \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l}.$$

Igualando término a término las series y simplificando por sen $(k\pi z/l)$ tendremos:

$$\ddot{F}_k(t) + \omega_k^2 F_k(t) = \frac{2P}{ml} \operatorname{sen} \theta_k t. \tag{8.13}$$

donde $\omega_k^2 = \frac{k^4\pi^4 EJ}{ml^4}$ es la k-ésima frecuencia de oscilaciones libres.

La ecuación (8.13) coincide por su forma con la (8.3), por esta razón su integral se hallará por analogía con la (8.4):

$$F_k(t) = A_k \operatorname{sen} \omega_k t + B_k \cos \omega_k t + \frac{2P}{ml\omega_k^2} \cdot \frac{\operatorname{sen} \theta_k t}{1 - \frac{\theta_k^2}{\omega_k^2}}. \tag{8.14}$$

La velocidad es:

$$\dot{F}_k(t) = \omega_k A_k \cos \omega_k t - \omega_k B_k \operatorname{sen} \omega_k t + \frac{2P}{ml\omega_k^2} \frac{\theta_k \cos \theta_k t}{1 - \theta_k^2 : \omega_k^2}. \tag{8.15}$$

Suponiendo que $t = 0$, $\dot{y}_k(0) = 0$ e $y_k(0) = 0$, obtenemos:

$$B_k = 0;$$

$$A_k = -\frac{\theta_k}{\omega_k} 2P : ml\omega_k^2 \left(1 - \frac{\theta_k^2}{\omega_k^2}\right).$$

Ahora

$$F_k(t) = \frac{2P}{ml\omega_k^2 \left(1 - \frac{\theta_k^2}{\omega_k^2}\right)} \left(\operatorname{sen} \theta_k t - \frac{\theta_k}{\omega_k} \operatorname{sen} \omega_k t\right). \tag{8.16}$$

La solución completa la obtenemos de acuerdo con (8.12):

$$y(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2P}{ml\omega_k^2 \left(1 - \frac{\theta_k^2}{\omega_k^2}\right)} \left(\operatorname{sen} \theta_k t - \frac{\theta_k}{\omega_k} \operatorname{sen} \omega_k t\right) \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l}. \tag{8.17}$$

Puesto que las frecuencias de oscilaciones libres de la viga crecen rápidamente con el crecimiento del orden k, la serie (8.17) será de convergencia rápida.

Si con cierto $k = n$ el valor de $\theta_n \to \omega_n$, en tal caso el enésimo sumando de la expresión (8.17) da una indeterminación de tipo 0/0. Desarrollándola según las reglas conocidas, obtenemos:

$$y_n(z, t) = -\frac{P}{ml\omega_n^2} (\omega_n t \cos \omega_n t - \operatorname{sen} \omega_n t) \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l}.$$

De esta expresión se ve que, con el transcurso del tiempo, los desplazamientos de la viga crecen indefinidamente, es decir, tiene lugar la resonancia.

La expresión completa de desplazamientos de la viga en este caso será:

$$y(z, t) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n-1} + \sum_{n+1}^{\infty}\right)\left[\frac{2P}{ml\omega_k^2\left(1-\frac{\theta_k^2}{\omega_k^2}\right)}\left(\operatorname{sen}\theta_k t - \frac{\theta_k}{\omega_k}\operatorname{sen}\omega_k t\right)\operatorname{sen}\frac{k\pi z}{l}\right] -$$

$$- \frac{P}{ml\omega_n^2}(\omega_n t\cos\omega_n t - \operatorname{sen}\omega_n t)\operatorname{sen}\frac{n\pi z}{l}. \qquad (8.18)$$

Las velocidades críticas se determinan según la igualdad $\theta_k = \omega_k$ o

$$\frac{k\pi}{l} v_{k,\,cr} = \frac{k^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

De aquí

$$v_{k,\,cr} = \frac{k\pi}{l}\sqrt{\frac{EJ}{m}}. \qquad (8.19)$$

La velocidad crítica mínima (para $k = 1$) es:

$$v_{1,\,cr} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

Esta coincide con (8.8). A la velocidad mínima se le puede dar otra forma:

$$v_{1,\,cr} = \frac{\omega_1 l}{\pi} = \frac{2l}{T_1}, \qquad (8.20)$$

donde T_1 es el período de oscilaciones propias, correspondiente a la primera frecuencia.

Es necesario señalar que las velocidades críticas obtenidas según (8.20), superan considerablemente a las que se encuentran en la práctica. Así, por ejemplo, si admitimos T_1 según la fórmula para el período de oscilaciones de los puentes metálicos de vigas compuestas en la forma [3] : $T_1 = 38l \cdot 10^{-4}$ s, donde l se expresa en metros, entonces la velocidad crítica será:

$$v_{1,\,cr} = \frac{2l}{38l10^{-4}} = 530 \text{ m/s} \approx 1900 \text{ km/h}.$$

Designemos seguidamente:

$$\beta_k = \theta_k : \omega_k = vl : k\pi\sqrt{\frac{EJ}{m}}; \qquad (8.21)$$

$$\frac{2}{ml\omega_k^2} = \frac{2l^3}{k^4\pi^4 EJ} \approx \frac{l^3}{k^4 48EJ} = \frac{\delta}{k^4}, \qquad (8.22)$$

donde δ es la flexión del centro de la luz de la viga causada por $P = 1$.

Con estas designaciones la ecuación (8.17) será:

$$y(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P\delta}{k^4(1-\beta_k^2)} \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} \left(\operatorname{sen} \frac{k\pi v t}{l} - \beta_k \operatorname{sen} \frac{k\pi v t}{\beta_k l} \right). \quad (8.23)$$

O de otro modo, tomando en consideración que $vt = a$, tendremos:

$$y(z, a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P\delta}{k^4(1-\beta_k^2)} \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} \left(\operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l} - \beta_k \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{\beta_k l} \right), \quad (8.24)$$

donde a es la coordenada de la carga P; z, la coordenada de la sección de la viga.

Señalemos que, siendo $a = l$, es decir, cuando la carga está en el apoyo derecho, las flexiones de la viga no son iguales a cero, ya que el sumando $\beta_k \operatorname{sen} (k\pi/\beta_k)$ en la mayoría de los casos no se convierte en cero.

Si determinamos la flexión de la viga directamente bajo la carga, entonces en la expresión (8.24) z se debe sustituir por a:

$$y(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P\delta}{k^4(1-\beta_k^2)} \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l} \left(\operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l} - \beta_k \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{\beta_k l} \right). \quad (8.25)$$

En este caso, naturalmente, para $a = l$, la flexión bajo la carga es igual a cero. Al suprimir la carga de la viga, su acción se manifiesta en forma de oscilaciones libres de la viga determinadas por las condiciones iniciales del movimiento. Establezcamos éstas. Para ello examinemos un sumando de la expresión (8.24):

$$y_k(z, a) = \frac{P\delta}{k^4(1-\beta_k^2)} \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} \left(\operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l} - \beta_k \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{\beta_k l} \right).$$

Respectivamente,

$$\dot{y}_k(z, a) = \frac{P\delta}{k^4(1-\beta_k^2)} \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} \frac{k\pi v}{l} \left(\cos \frac{k\pi a}{l} - \cos \frac{k\pi a}{\beta_k l} \right).$$

Para $a = l$ tenemos:

$$y_k(z, l) = -\frac{P\delta}{k^4(1-\beta_k^2)} \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} \beta_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{\beta_k}; \quad (8.26)$$

$$\dot{y}_k(z, l) = \frac{P\delta}{k^4(1-\beta_k^2)} \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} \frac{k\pi v}{l} \left(\cos k\pi - \cos \frac{k\pi}{\beta_k} \right). \quad (8.27)$$

Después de suprimida la carga, las oscilaciones libres de la viga se determinan según la expresión:

$$y_k^*(z, t) = A_k^* \operatorname{sen} \omega_k (t - t_1) + B_k^* \cos \omega_k (t - t_1). \quad (8.28)$$

Las velocidades del movimiento son:

$$\dot{y}_k^*(z, t) = \omega_k A_k^* \cos \omega_k (t - t_1) - \omega_k B_k^* \operatorname{sen} \omega_k (t - t_1). \quad (8.29)$$

Haciendo uso de las condiciones iniciales del movimiento, para $t = t_1 = l/v$ obtenemos:

$$B_k^* = -P\delta \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} \beta_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{\beta_k} : k^4 (1 - \beta_k^2); \tag{8.30}$$

$$A_k^* = P\delta \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} \beta_k \left(\cos k\pi - \cos \frac{k\pi}{\beta_k} \right) : k^4 (1 - \beta_k^2). \tag{8.31}$$

Sustituyendo estos valores de las constantes arbitrarias en (8.28), después de hacer las transformaciones y tomando en consideración $a = vt$ y $l = vt_1$, tenemos:

$$y_k^*(z, a) = \frac{P\delta \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l}}{k^4 (1 - \beta_k^2)} \beta_k \left[\cos k\pi \operatorname{sen} \frac{k\pi}{\beta_k} \left(\frac{a}{l} - 1 \right) - \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi a}{\beta_k l} \right) \right] \tag{8.32}$$

Después de suprimida la carga la ecuación de oscilaciones de la viga es:

$$y^*(z, a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P\delta \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l}}{k^4 (1 - \beta_k^2)} \beta_k \left[\cos k\pi \operatorname{sen} \frac{k\pi}{\beta_k} \left(\frac{a}{l} - 1 \right) - \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi a}{\beta_k l} \right) \right]. \tag{8.33}$$

Si en la expresión (8.24) se conserva sólo el primer sumando y se supone que $z = l/2$, obtendremos la ecuación coincidente con la (8.7). Ello significa, que la solución aproximada examinada más arriba, es un caso particular de la solución de A. N. Krilov.

Las expresiones de los momentos flectores y de las fuerzas transversales las obtenemos de (8.24) y (8.33) diferenciándolas respecto a la coordenada de la sección z.

1. Estando la carga sobre la viga, es decir, cuando $a \leqslant l$, de (8.24) obtenemos:

$$M(z, a) = \frac{P2l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l}}{k^2 (1 - \beta_k^2)} \left(\operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l} - \beta_k \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{\beta_k l} \right); \tag{8.34}$$

$$Q(z, a) = \frac{P2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{k\pi z}{l}}{k (1 - \beta_k^2)} \left(\operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l} - \beta_k \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{\beta_k l} \right). \tag{8.35}$$

Señalemos que la convergencia de las series (8.34) y (8.35) es peor que la de la serie (8.24).

2. Cuando la carga está fuera de los límites de la viga, o sea, cuando $a \geqslant l$, de (8.33) tenemos:

$$M^*(z, a) =$$

$$= \frac{P2l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l}}{k^2(1-\beta_k^2)} \beta_k \left[\cos k\pi \operatorname{sen} \frac{k\pi}{\beta_k} \left(\frac{a}{l} - 1 \right) - \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{\beta_k l} \right]; \quad (8.36)$$

$$Q^*(z, a) = \frac{P2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{k\pi z}{l}}{k(1-\beta_k^2)} \beta_k \left[\cos k\pi \operatorname{sen} \frac{k\pi}{\beta_k} \left(\frac{a}{l} - 1 \right) - \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{\beta_k l} \right]. \quad (8.37)$$

§ 72. SOBRE LOS COEFICIENTES DINÁMICOS. De los coeficientes dinámicos podemos tratar sólo en aquel caso, cuando la carga P está sobre la viga, pues cuando está fuera de sus límites, entonces el coeficiente dinámico, teniendo en cuenta las oscilaciones libres, es indudablemente igual al infinito, por cuanto ya no existe la acción estática de la carga sobre la viga.

De las expresiones (8.24), (8.34) y (8.35) hallaremos las flexiones, los momentos flectores y las fuerzas transversales al desplazarse lentamente la carga P por la viga. Con este fin hay que suponer que $\beta_k \to 0$:

$$y_{est}(z, a) = P\delta \sum_{k=1}^{\infty} \left(\operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l} : k^4 \right); \quad (8.38)$$

$$M_{est}(z, a) = \frac{P2l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l} : k^2 \right); \quad (8.39)$$

$$Q_{est}(z, a) = \frac{P2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\cos \frac{k\pi z}{l} \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l} : k \right). \quad (8.40)$$

Los coeficientes dinámicos, que representan en sí las relaciones entre las magnitudes dinámicas y las estáticas, serán:

a) respecto a las flexiones tenemos:

$$\mu_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l}}{k^4(1-\beta_k^2)} \left(\operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l} - \beta_k \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{\beta_k l} \right) :$$

$$: \sum_{k=1}^{\infty} \left(\operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l} : k^4 \right); \quad (8.41)$$

b) en cuanto a los momentos flectores,

$$\mu_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l}}{k^2 (1 - \beta_k^2)} \left(\operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l} - \beta_k \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{\beta_k l} \right) : \\ : \sum_{k=1}^{\infty} \left(\operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l} : k^2 \right); \qquad (8.42)$$

c) para las fuerzas transversales,

$$\mu_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{k\pi z}{l}}{k (1 - \beta_k^2)} \left(\operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l} - \beta_k \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{\beta_k l} \right) : \\ : \sum_{k=1}^{\infty} \left(\cos \frac{k\pi z}{l} \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l} : k \right). \qquad (8.43)$$

De las expresiones obtenidas se ve que los coeficientes dinámicos son diferentes y dependen tanto de la posición de la carga sobre la viga, como de la posición de la sección; por dicha razón son inconstantes.

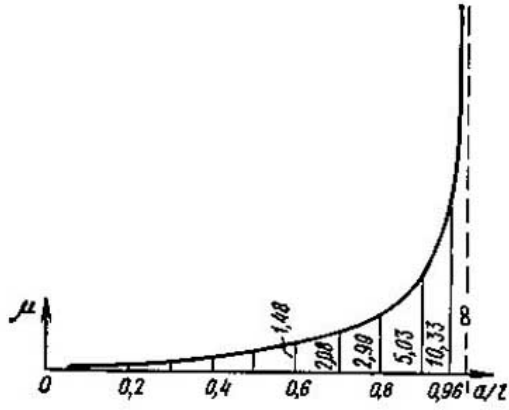


Fig. 153

Si en las sumas de las expresiones de los coeficientes dinámicos retenemos sólo los primeros sumandos, entonces, todos los coeficientes dinámicos serán iguales entre sí:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu = \frac{1}{1 - \beta_1^2} \left[1 - \left(\beta_1 \operatorname{sen} \frac{\pi a}{\beta_1 l} : \operatorname{sen} \frac{\pi a}{l} \right) \right]. \qquad (8.44)$$

En este caso el valor del coeficiente dinámico no depende de la posición de la sección, sino sólo de la posición de la carga.

En la fig. 153 están dados los coeficientes dinámicos de acuerdo con (8.44), siendo $\beta_1 = 0{,}637$. Con $b_1 = l/k$, donde $k = 1, 2, 3, \ldots$ el coeficiente dinámico será igual a cero o a dos.

Al poner la carga en medio del tramo de la viga, es decir, cuando $a = l/2$, de acuerdo con (8.44) tendremos:

$$\mu = \frac{1}{1-\beta_1^2}\left(1-\beta_1 \operatorname{sen}\frac{\pi}{\beta_1 \cdot 2}\right). \qquad (8.45)$$

Más adelante comúnmente se supone que sen $(\pi/\beta_1 2) = -1$ y se obtiene

$$\mu_{máx} = 1 : (1 - \beta_1). \qquad (8.46)$$

Precisamente este valor del coeficiente dinámico se indica de ordinario en la literatura especial. La inexactitud de este valor es obvia merced a las consideraciones que exponemos aquí.

§ 73. LÍNEAS DINÁMICAS DE INFLUENCIA. La investigación realizada en lo que se refiere a los coeficientes dinámicos ha mostrado, que el valor exacto de ellos depende de la posición de la sección y de la posición de la carga. El valor aproximado del coeficiente dinámico (8.44), igual para todas las magnitudes a calcular y para todas las secciones de la viga, depende sólo de la posición de la carga. Corrientemente el valor indicado del coeficiente dinámico (8.46) corresponde sólo a la posición de la carga en el centro de la luz de la viga y no es el máximo.

Todo ello testimonia el hecho de que el cálculo realizado de las líneas estáticas de influencia, seguido de su corrección mediante la multiplicación por el coeficiente dinámico común, sufre las siguientes insuficiencias:

1) el coeficiente dinámico no es una magnitud constante;

2) la posición de cálculo de la carga móvil sobre la viga calculada dinámicamente será diferente, para cada una de las secciones, a la calculada estáticamente.

Como la ecuación diferencial (8.10) es lineal y la fuerza P comprendida en ella es de primera potencia, es justo el principio de superposición; el cálculo será más exacto si se ejecuta por medio de las líneas dinámicas de influencia [10].

Las ecuaciones de las líneas dinámicas de influencia las hallaremos de las expresiones obtenidas en el § 71.

1. Con la posición de la carga $P = 1$ sobre la viga, cuando $a \leqslant l$: la ecuación de la línea de influencia de la flexión según (8.24) es:

$$y(z, a) = \delta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{k\pi z}{l}}{k^4(1-\beta_k^2)}\left(\operatorname{sen}\frac{k\pi a}{l} - \beta_k \operatorname{sen}\frac{k\pi a}{\beta_k l}\right); \qquad (8.47)$$

la ecuación de la línea de influencia de los momentos flectores según (8.34) es:

$$M(z, a) = \frac{2l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{k\pi z}{l}}{k^2(1-\beta_k^2)}\left(\operatorname{sen}\frac{k\pi a}{l} - \beta_k \operatorname{sen}\frac{k\pi a}{\beta_k l}\right); \qquad (8.48)$$

la ecuación de la línea de influencia de las fuerzas transversales según (8.35) es:

$$Q(z, a) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{k\pi z}{l}}{k(1-\beta_k^2)} \left(\operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l} - \beta_k \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{\beta_k l} \right). \quad (8.49)$$

Las ecuaciones de las líneas estáticas de influencia las obtenemos de (8.47)—(8.49), suponiendo en éstas que $\nu \to 0$ y, por consiguiente, $\beta_k \to 0$:

$$y_{est}(z, a) = \delta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l}; \quad (8.50)$$

$$M_{est}(z, a) = \frac{2l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l}; \quad (8.51)$$

$$Q_{est}(z, a) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos \frac{k\pi z}{l} \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l}. \quad (8.52)$$

Sustrayendo respectivamente de las expresiones (8.47)—(8.49) las expresiones (8.50)—(8.52) obtenemos para las líneas estáticas de influencia las adiciones dinámicas, las cuales para la viga se construyen de modo simple. Ello permitirá calcular con menor exactitud las adiciones dinámicas. Las ecuaciones de las adiciones dinámicas serán:

$$\Delta M(z, a) = \frac{2l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l}}{k^2(1-\beta_k^2)} \left(\beta_k \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l} - \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{\beta_k l} \right); \quad (8.53)$$

$$\Delta Q(z, a) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k \cos \frac{k\pi z}{l}}{k(1-\beta_k^2)} \left(\beta_k \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l} - \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{\beta_k l} \right). \quad (8.54)$$

Si al calcular las adiciones dinámicas nos limitamos a los primeros términos de las series, entonces las expresiones (8.53) y (8.54) se convierten en simples:

$$\Delta M(z, a) = \frac{2l}{\pi^2} \frac{\beta_1 \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l}}{1-\beta_1^2} \left(\beta_1 \operatorname{sen} \frac{\pi a}{l} - \operatorname{sen} \frac{\pi a}{\beta_1 l} \right); \quad (8.55)$$

$$\Delta Q(z, a) = \frac{2}{\pi} \frac{\beta_1 \cos \frac{\pi z}{l}}{1-\beta_1^2} \left(\beta_1 \operatorname{sen} \frac{\pi a}{l} - \operatorname{sen} \frac{\pi a}{\beta_1 l} \right). \quad (8.56)$$

Estas fórmulas dan con frecuencia las adiciones principales para las líneas estáticas de influencia.

2. Al poner la carga $P = 1$ fuera de la viga, cuando $a \geqslant l$ tenemos:

la ecuación de la línea de influencia de la flexión según (8.33),

$$y^*(z, a) = \delta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l}}{k^4 (1-\beta_k^2)} \beta_k \left[\cos k\pi \operatorname{sen} \frac{k\pi}{\beta_k} \left(\frac{a}{l} - 1 \right) - \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{\beta_k l} \right]; \tag{8.57}$$

la ecuación de la línea de influencia de los momentos flectores según (8.36),

$$M^*(z, a) = \frac{2l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l}}{k^2 (1-\beta_k^2)} \beta_k \left[\cos k\pi \operatorname{sen} \frac{k\pi}{\beta_k} \left(\frac{a}{l} - 1 \right) - \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{\beta_k l} \right]; \tag{8.58}$$

la ecuación de la línea de influencia de las fuerzas transversales según (8.37),

$$Q^*(z, a) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{k\pi z}{l}}{k (1-\beta_k^2)} \beta_k \left[\cos k\pi \operatorname{sen} \frac{k\pi}{\beta_k} \left(\frac{a}{l} - 1 \right) - \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{\beta_k l} \right]. \tag{8.59}$$

Las líneas dinámicas de influencia son aplicables sólo para las cargas que se mueven con la misma velocidad que fue adoptada al construir las líneas de fluencia.

Ejemplo 51. Construir las líneas dinámicas de influencia de los momentos flectores en las secciones de la viga: $z = l/2$ y $z = 3l/4$, si $l = 16$ m y $\beta_1 = \frac{1}{4}$.

1. Línea de influencia en la sección $z = l/2$. Según la expresión (8.55) tenemos:

$$\Delta M \left(\frac{l}{2}, a \right) = \frac{2 \cdot 16}{3{,}14^2} \frac{1}{4} \frac{1}{1-1/16} \left(\frac{1}{4} \operatorname{sen} \frac{\pi a}{l} - \operatorname{sen} \frac{4\pi a}{l} \right) =$$

$$= 0{,}865 \left(\frac{1}{4} \operatorname{sen} \frac{\pi a}{l} - \operatorname{sen} \frac{4\pi a}{l} \right). \tag{a}$$

La línea de influencia está representada en la fig. 154, *a*.

2. Línea de influencia en la sección $z = 3l : 4$. Según la expresión (8.55),

$$\Delta M \left(\frac{3l}{4}, a \right) = \frac{2 \cdot 16}{3{,}14^2} \frac{1}{4} \frac{0{,}707}{1-\frac{1}{16}} \left(\frac{1}{4} \operatorname{sen} \frac{\pi a}{l} - \operatorname{sen} \frac{4\pi a}{l} \right) =$$

$$= 0{,}612 \left(\frac{1}{4} \operatorname{sen} \frac{\pi a}{l} - \operatorname{sen} \frac{4\pi a}{l} \right). \tag{b}$$

La línea de influencia se da en la fig. 154, *b*.

La existencia de un tramo negativo en el comienzo de esta línea de influencia, por lo visto, se explica por el hecho de que en el momento de entrada de la carga sobre la viga la parte derecha de la viga a cuenta de su inercia crea como si fuera un «empotramiento» provisional, con el cual el momento en la sección

$z = 3/4l$ es negativo. Con más detalle, véase el trabajo del autor [14]; allí mismo se dan las líneas de influencia de la fuerza $P = 1 + \mu \operatorname{sen} \psi t$ y se examina el movimiento de la carga de banda.

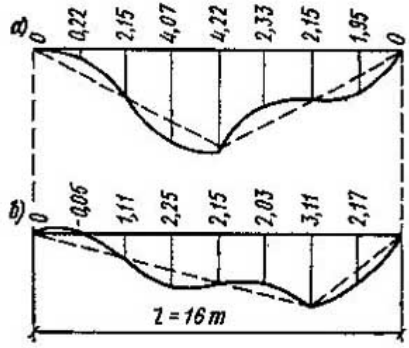


Fig. 154

§ 74. MOVIMIENTO DE UNA CARGA LIGERA POR UNA VIGA PESADA APOYADA EN DOS EXTREMOS ARTICULADOS Y EN UNA BASE ELÁSTICA. La ecuación diferencial del movimiento (8.11) aquí será:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + cby = \frac{2P}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen} \theta_k t \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l}, \qquad (8.60)$$

donde $\theta_k = k\pi v/l$; $t = a/v$; c es el coeficiente de lecho; b, el ancho de la viga.

Su solución la buscamos, como antes, en forma de (8.12), uno de cuyos sumandos lo sustituimos en (8.60), obteniendo:

$$EJF_k(t)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 + m\ddot{F}_k(t) + cbF_k(t) = \frac{2P}{l} \operatorname{sen} \theta_k t,$$

de donde tendremos

$$\ddot{F}_k(t) + \varphi_k^2 F_k(t) = \frac{2P}{ml} \operatorname{sen} \theta_k t, \qquad (8.61)$$

donde, $\varphi_k^2 = \frac{(k\pi/l)^4 EJ + cb}{m} = \omega_k^2 + \frac{cb}{m}$ es la frecuencia de oscilaciones libres de la viga apoyada en una base elástica, al cuadrado.

Esta ecuación coincide por su forma con la (8.13), por eso todas las consideraciones aplicadas a la (8.13) con la sustitución de ω_k por φ_k pueden servir aquí. En particular, la ecuación del movimiento (8.17) será:

$$y(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2P \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l}}{ml\varphi_k^2 (1 - \theta_k^2 : \varphi_k^2)} \left(\operatorname{sen} \theta_k t - \frac{\theta_k}{\varphi_k} \operatorname{sen} \varphi_k t\right). \qquad (8.62)$$

Esta puede reducirse a la forma siguiente:

$$y(z, t) = P\delta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} \left(\operatorname{sen} \frac{k\pi a}{l} - \bar{\beta}_k \operatorname{sen} \frac{1}{\bar{\beta}_k} \cdot \frac{k\pi a}{l} \right)}{k^4 \left(1 + \frac{cbl^4}{k^4\pi^4 EJ} \right) (1 - \bar{\beta}_k^2)}, \quad (8.63)$$

donde

$$\bar{\bar{\beta}}_k = \theta_k : \varphi_k = \frac{k\pi v}{l} : \sqrt{\frac{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 EJ + cb}{m}}.$$

Esta ecuación coincide por su forma con la ecuación (8.24).

Por consiguiente, todos los razonamientos referentes a los coeficientes dinámicos y a las líneas dinámicas de influencia de la viga simple, son válidos para dicho caso con la sustitución de ω_k por φ_k, β_k por $\bar{\beta}_k$ y k^4 por $k^4 \left(1 + \frac{cbl^4}{k^4\pi^4 EJ}\right)$. La velocidad crítica se obtiene a base de la condición $\theta_k = \varphi_k$:

$$v_{k,\,cr} = (l/k\pi) \sqrt{\frac{(k\pi/l)^4 EJ + c}{m}}. \quad (8.64)$$

§ 75. MOVIMIENTO DE UNA CARGA PESADA POR UNA VIGA LIGERA. En este caso despreciamos la masa de la viga. Una carga

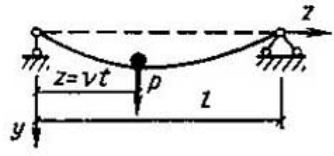


Fig. 155

pesada P con masa $m = P/g$ se mueve por la viga con una velocidad constante v (fig. 155). La presión sobre la viga, tomando en consideración las fuerzas de inercia de la carga, es:

$$R = P - \frac{P}{g} \frac{d^2y}{dt^2} = P \left(1 - \frac{v^2}{g} \frac{d^2y}{dz^2}\right), \quad (8.65)$$

donde y es el desplazamiento vertical de la carga en movimiento (trayectoria de movimiento de la carga); $z = vt$.

El desplazamiento vertical de la carga es igual a la flecha de la viga en el lugar de su aplicación. Por eso podemos escribir que

$$y = \frac{R}{EJ} \frac{z^2 (l-z)^2}{3l}. \quad (8.66)$$

Sustituyendo aquí el valor de R de la ecuación (8.65), obtenemos la ecuación diferencial de desplazamientos verticales de la carga:

$$y = P \left(1 - \frac{v^2}{g} \frac{d^2y}{dz^2}\right) \frac{1}{EJ} \frac{z^2 (l-z)^2}{3l}. \quad (8.67)$$

La resolución de esta ecuación con coeficientes variables es complicada. Por eso aducimos la solución aproximada. Con este fin, al calcular $\frac{d^2y}{dz^2}$ en el segundo miembro de la ecuación (8.65), suponemos que

$$y = \frac{\hat{P}}{EJ} \frac{z^2 (l-z)^2}{3l} \tag{8.68}$$

y, al diferenciar (8.68), consideramos constante la fuerza $\hat{P}$, la cual es variable. Por consiguiente,

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{\hat{P}}{EJ3l} (2l^2 - 12lz + 12z^2).$$

La presión sobre la viga será (8.65):

$$R = P\left[1 - \frac{v^2}{g} \frac{\hat{P}}{EJ3l} (2l^2 - 12lz + 12z^2)\right]. \tag{8.69}$$

La presión de la carga sobre la viga es variable. Su valor máximo, cuando $z = l/2$ es:

$$R_{\text{máx}} = \hat{P}\left(1 + \frac{v^2 l \hat{P}}{gEJ3}\right). \tag{8.70}$$

Generalmente se supone que $\hat{P} = P$ y se obtiene:

$$R_{\text{máx}} = P\left(1 + \frac{v^2 lP}{gEJ3}\right). \tag{8.71}$$

Hay indicaciones [37] de que dicha solución, en comparación con la solución exacta de la ecuación (8.67), da resultados admisibles para los usos prácticos.

Probablemente, la solución será más exacta, si $\hat{P}$ en (8.69) la igualamos a la fuerza R. En este caso tendremos

$$R = P:\left[1 + \frac{v^2 P}{gEJ3l} (2l^2 - 12lz + 12z^2)\right]. \tag{8.72}$$

Con $z = l/2$,

$$R_{\text{máx}} = P:\left(1 - \frac{v^2 lP}{EJ3g}\right). \tag{8.73}$$

En todo caso el valor de $R_{\text{máx}}$ se halla en los límites entre (8.71) y (8.73).

CAPÍTULO 9* CALCULO DINAMICO DE LOS PÓRTICOS PLANOS

§ 76. NOTAS DE INTRODUCCIÓN. Los cálculos dinámicos de los pórticos se dividen en exactos y aproximados. Si en el cálculo todos los elementos de los pórticos se toman con masas distribuidas (y, por su-

puesto, con las concentradas al existir éstas), el sistema se considera con grado infinito de libertad y el cálculo se ejecuta según el estado deformado, teniendo en cuenta todos los tipos de fuerzas de inercia y de deformaciones; entonces el cálculo puede estimarse exacto dentro de los límites del esquema de cálculo elegido y de las premisas suplementarias referentes al material.

Sin embargo, conviene señalar que con tal planteamiento el cálculo exacto es sumamente complicado y para simplificarlo se introducen premisas suplementarias. Así, por ejemplo, con frecuencia el cálculo se realiza en estado no deformado: ignorando las deformaciones longitudinales y transversales, las fuerzas de inercia de alargamiento, los cizallamientos y giros de las secciones. No obstante, tal cálculo se ha aceptado denominarlo exacto, lo cual, claro está, debe comprenderse sólo en el sentido convencional.

Si los elementos de los pórticos se toman con masa distribuida y el sistema se considera como sistema con grado finito de libertad o las masas distribuidas se cambian por concentradas, lo que convierte el sistema en un sistema con un grado finito de libertad, entonces, el cálculo será aproximado.

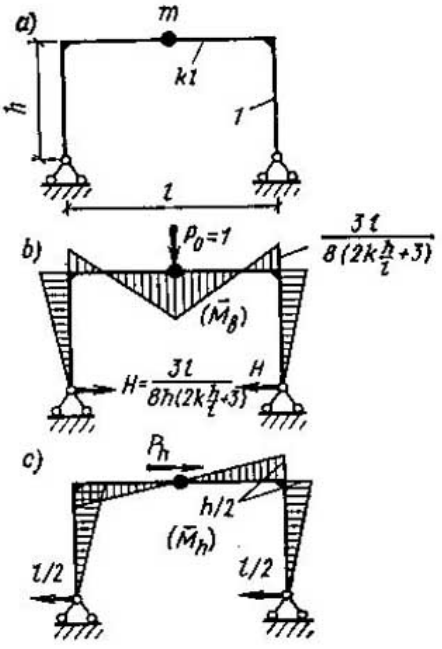


Fig. 156

En los cálculos dinámicos las simplificaciones, hablando en general, son menos legítimas que en los estáticos, ya que en la dinámica los factores ignorados frecuentemente son más esenciales que en la estática. Así, por ejemplo, en la dinámica son de importancia no sólo las magnitudes de las fuerzas, sino también las frecuencias de éstas.

Los métodos de cálculos dinámicos de los pórticos están menos elaborados que los métodos de cálculos estáticos. Además, los cálculos dinámicos de los pórticos son mucho más complicados que los estáticos ya que la complejidad de cálculos dinámicos se determina no tanto por el grado de indeterminación estática, como por el número de grados de libertad.

La indeterminación estática de los pórticos, en el cálculo dinámico, puede realizarse en formas diferentes. Aquí examinaremos la aplicación de dos métodos principales: el método de fuerzas y el de

desplazamientos, que son bien conocidos del curso general de la mecánica de construcción.

Al determinar las frecuencias de oscilaciones libres de los pórticos, hace falta tener en cuenta que los valores de las frecuencias contiguas referentes a diversas formas principales de oscilaciones no difieren uno de otro de manera tan contundente como, por ejemplo, en las vigas. Estos valores pueden ser próximos e incluso coincidir. Todo ello depende de las dimensiones de los pórticos y de la correlación de rigidez de sus elementos. Por lo tanto es necesario en los pórticos, por regla, determinar varias frecuencias.

Mostremos en el ejemplo de un pórtico imponderable con masa concentrada (fig. 156) una coincidencia posible de dos frecuencias de oscilaciones libres. Para determinarlas hay que dibujar los diagramas de los momentos flectores causados por la fuerza vertical $P_v = 1$ (fig. 156, *b*) y por la fuerza horizontal $P_h = 1$ (fig. 156, *c*) en el pórtico indicado.

a) Frecuencia de oscilaciones simétricas verticales. «Multiplicando» el diagrama ($\overline{M}_v$) por el diagrama de la fuerza $P_v = 1$, en el pórtico estáticamente determinado con un apoyo móvil obtenemos:

$$\delta_{11}^{v} = \frac{l^3}{48kEJ} \frac{8k\frac{h}{l}+3}{8k\frac{h}{l}+12}; \qquad (a)$$

$$\omega_v^2 = \frac{1}{m\delta_{11}^{v}} = \frac{1}{m} : \frac{l^3}{48kEJ} \frac{8k\frac{h}{l}+3}{8k\frac{h}{l}+12}. \qquad (b)$$

b) Frecuencia de oscilaciones horizontales antisimétricas. «Multiplicando» el diagrama ($\overline{M}_h$) por sí mismo tenemos:

$$\delta_{11}^{h} = \frac{h^3}{12kEJ}(2k + l/h); \qquad (c)$$

$$\omega_h^2 = \frac{1}{m\delta_{11}^{h}} = \frac{1}{m} \frac{12kEJ}{h^3(2k+l/h)}. \qquad (d)$$

La igualdad de frecuencias para $k = l : h$, lo determina $l/h = \sqrt{240/11}$.

§ 77. TEOREMAS GENERALES SOBRE EL TRABAJO Y LOS DESPLAZAMIENTOS DEBIDOS A UNA CARGA VIBRATORIA.

Si sobre el sistema actúa largo tiempo una carga vibratoria con frecuencia θ, entonces, las oscilaciones forzadas del sistema serán persistentes, sin tener en cuenta las resistencias, o sea, se realizarán con la frecuencia de la carga actuante.

A continuación, por desplazamientos dinámicos comprenderemos los desplazamientos que varían en el tiempo según la ley

$$\Delta_{km}(t) = \Delta_{km} \operatorname{sen} \theta t. \qquad (9.1)$$

Con ello

$$\frac{d^2\Delta_{km}(t)}{dt^2} = -\theta^2\Delta_{km}\operatorname{sen}\theta t = -\theta^2\Delta_{km}(t). \qquad (9.2)$$

Examinemos en cierto momento de tiempo cualquier sistema que se encuentra bajo la acción de diferentes cargas vibratorias con igual frecuencia en dos estados k y m (fig. 157). Para las investigaciones apliquemos el principio de desplazamientos posibles. Primeramente examinemos el trabajo de las fuerzas del estado k durante los desplazamientos del estado m y después, el trabajo de las fuerzas del estado m cuando se desplaza el estado k.

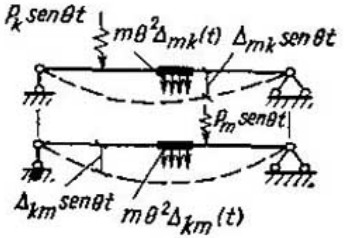


Fig. 157

En el transcurso de las oscilaciones, sobre el sistema actúan las fuerzas de inercia de las masas, que varían según la ley sen θt. De acuerdo con la misma ley también varían las fuerzas internas ($M(t)$, $Q(t)$ y $N(t)$.

El trabajo de las fuerzas del estado k realizado durante los desplazamientos del estado m, atendiendo sólo a los momentos flectores, es

$$\sum P_k \operatorname{sen}\theta t\Delta_{km}(t) + \sum \int m\theta^2\Delta_{mk}(t)\,ds\Delta_{km}(t) = \\ = \sum \int M_k(t)\frac{M_m(t)}{EJ}\,ds.$$

El trabajo de las fuerzas del estado m, cuando se desplaza el estado k, es

$$\sum P_m \operatorname{sen}\theta t\Delta_{mk}(t) + \sum \int m\theta^2\Delta_{km}(t)\,ds\Delta_{mk}(t) = \\ = \sum \int M_m(t)\frac{M_k(t)}{EJ}\,ds.$$

Basándose en la igualdad de los segundos miembros de las expresiones escritas, obtenemos la ecuación de reciprocidad de los trabajos de las cargas vibratorias

$$\sum P_k \operatorname{sen}\theta t\Delta_{km}(t) = \sum P_m \operatorname{sen}\theta t\Delta_{mk}(t). \qquad (9.3)$$

Si cada uno de los estados tiene una sola fuerza, siendo $P_k \operatorname{sen}\theta t = P_m \operatorname{sen}\theta t$, entonces la fórmula (9.3) determinará la igualdad de

los desplazamientos dinámicos:

$$\Delta_{km}(t) = \Delta_{mk}(t)$$

o

$$\Delta_{km} \operatorname{sen} \theta t = \Delta_{mk} \operatorname{sen} \theta t. \tag{9.4}$$

Con los valores de amplitud unitarios de las fuerzas que actúan, pueden establecerse de modo análogo las igualdades que encontrábamos en el curso general de la mecánica de construcción:

$$\left.\begin{aligned} \delta_{km} \operatorname{sen} \theta t &= \delta_{mk} \operatorname{sen} \theta t; \\ r_{km} \operatorname{sen} \theta t &= r_{mk} \operatorname{sen} \theta t; \\ \delta_{km} \operatorname{sen} \theta t &= -r_{mk} \operatorname{sen} \theta t. \end{aligned}\right\} \tag{9.5}$$

Examinemos ahora el trabajo de la fuerza estática unitaria $P_k = 1$ en el estado k durante los desplazamientos reales del estado m causados por la carga dinámica $P_m(t)$ (fig. 158):

$$1\Delta_{km}(t) = \sum \int \overline{M}_k \frac{M_m(t)}{EJ} ds, \tag{9.6}$$

donde $\overline{M}_k$ es la expresión de los momentos flectores producidos por la fuerza estática $P = 1$; $M_m(t)$, la expresión de los momentos flectores debidos a la carga dinámica.

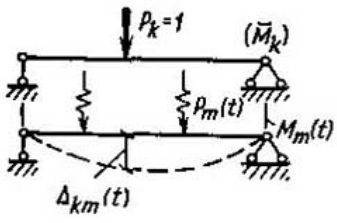


Fig. 158

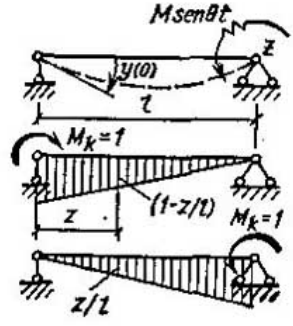


Fig. 159

La fórmula (9.6) para determinar los desplazamientos dinámicos es análoga a la conocida fórmula de Mohr—Maxwell. Sin embargo, hay que señalar que la determinación de los desplazamientos dinámicos es mucho más complicada que la determinación de los desplazamientos causados por cargas estáticas, ya que la obtención de la expresión de los momentos $M_m(t)$ debidos a cargas dinámicas, teniendo en cuenta las fuerzas de inercia, es un problema complejo, a excepción de ciertos casos sencillos, por ejemplo, el de los momentos en las vigas apoyadas en dos extremos.

En el caso general la expresión de los momentos $M_m(t)$ causados por la carga vibratoria en la viga recta con rigidez constante EJ,

puede reducirse a la forma:

$$M_m(t) = (aA_{sz} + bB_{sz} + cC_{sz} + dD_{sz}) \operatorname{sen} \theta t, \qquad (9.7)$$

donde a, b, c y d son coeficientes constantes que dependen de las condiciones concretas del problema; A_{sz}, B_{sz}, C_{sz} y D_{sz} se determinan según las fórmulas (5.49).

El valor unitario de los momentos flectores $\overline{M}_k$ en este caso puede escribirse así:

$$\overline{M}_k = ez + f. \qquad (9.8)$$

La determinación de los desplazamientos según la fórmula (9.6) está relacionada con las integrales:

$$\left.\begin{aligned}
&\int A_{sz}\,dz = \frac{1}{s} B_{sz}; && \int C_{sz}\,dz = \frac{1}{s} D_{sz};\\
&\int B_{sz}\,dz = \frac{1}{s} C_{sz}; && \int D_{sz}\,dz = \frac{1}{s} A_{sz};\\
&\int A_{sz}\,z\,dz = \frac{z}{s} B_{sz} - \frac{C_{sz}}{s^2}; && \int C_{sz}\,z\,dz = \frac{z}{s} D_{sz} - \frac{A_{sz}}{s^2};\\
&\int B_{sz}\,z\,dz = \frac{z}{s} C_{sz} - \frac{D_{sz}}{s^2}; && \int D_{sz}\,z\,dz = \frac{z}{s} A_{sz} - \frac{B_{sz}}{s^2}.
\end{aligned}\right\} \qquad (9.9)$$

Escribamos la fórmula general (9.6) de una barra cogida separadamente:

$$EJ\Delta_{km} = \int_0^l (ez + f)(aA_{sz} + bB_{sz} + cC_{sz} + dD_{sz})\,dz.$$

Integrando obtenemos:

$$\begin{aligned}
EJ\Delta_{km} = {} & ea\left(\frac{l}{s} B_\lambda - \frac{C_\lambda}{s^2}\right) + eb\left(\frac{l}{s} C_\lambda - \frac{D_\lambda}{s^2}\right) + \\
& + ec\left[\frac{l}{s} D_\lambda - \frac{A_\lambda - 1}{s^2}\right] + ed\left(\frac{l}{s} A_\lambda - \frac{B_\lambda}{s^2}\right) + fa\frac{B_\lambda}{s} + \\
& + fb\frac{C_\lambda}{s} + fc\frac{D_\lambda}{s} + fd\frac{(A_\lambda - 1)}{s},
\end{aligned} \qquad (9.10)$$

donde,

$$\lambda = sl; \qquad s^4 = m\theta^2 : EJ.$$

La aplicación de esta fórmula la mostraremos en ejemplos sencillos.

Ejemplo 52. Determinar los ángulos de giro en los extremos de una viga sencilla causado por el momento aplicado en el extremo derecho (fig. 159).

Determinamos los valores de amplitud de los ángulos de giro.

a) Giro en el extremo izquierdo de la viga. Con anterioridad [véanse (6.68) y (6.69)] se ha determinado que:

$$y'(0) = \frac{M}{sEJ}\frac{D_\lambda}{B_\lambda^2 - D_\lambda^2}; \qquad Q(0) = sM\frac{B_\lambda}{B_\lambda^2 - D_\lambda^2}. \qquad (a)$$

La expresión del momento estático es,

$$M_m = -EJsy'(0)\,D_{sz} + \frac{Q(0)}{s}\,B_{sz}.$$

Comparando con (9.7), tenemos: $a = 0$; $b = Q(0)/s$; $c = 0$; $d = -EJsy'(0)$. La expresión del momento estático es $\overline{M}_k = 1 - z/l$. Comparándola con (9.8), tenemos $e = -1/l$; $f = 1$. Hagamos sustitución en la fórmula (9.10):

$$EJ\Delta_{km} - \frac{1}{l}\frac{Q(0)}{s}\left(\frac{l}{s}\,C_\lambda - \frac{D_\lambda}{s^2}\right) + \frac{1}{l}\,EJsy'(0)\left(\frac{l}{s}\,A_\lambda - \frac{B_\lambda}{s^2}\right) +$$
$$+1\,\frac{Q(0)}{s}\,\frac{C_\lambda}{s} - EJsy'(0)\left(\frac{A_\lambda - 1}{s}\right).$$

Después de unas transformaciones simples

$$EJ\Delta_{km} = EJy'(0) + \frac{Q(0)\,D_\lambda}{s^3 l} - \frac{EJy'(0)}{sl}\,B_\lambda.$$

Teniendo en cuenta (a), obtenemos $EJ\Delta_{km} = EJy'(0)$, lo que debíamos esperar.

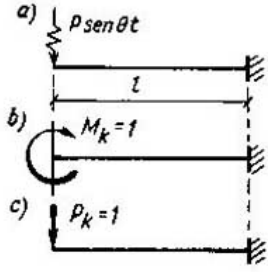


Fig. 160

b) Giro sobre el extremo derecho de la viga. En este caso $\overline{M}_k = z/l$, lo que quiere decir que $e = 1/l$ y $f = 0$. Sustituyendo en la fórmula (9.10), obtenemos:

$$EJ\Delta_{km} = \frac{1}{l}\,\frac{Q(0)}{s}\left(\frac{l}{s}\,C_\lambda - \frac{D_\lambda}{s^2}\right) - \frac{1}{l}\,EJsy'(0)\left(\frac{l}{s}\,A_\lambda - \frac{B_\lambda}{s^2}\right).$$

Teniendo en cuenta (a), tendremos:

$$\Delta_{km} = \frac{M}{sEJ}\,\frac{B_\lambda C_\lambda - A_\lambda D_\lambda}{B_\lambda^2 - D_\lambda^2}\ \text{[véase (6.65)]}. \qquad (9.11)$$

Ejemplo 53. Determinar la flexión y el ángulo de giro en el extremo izquierdo de la viga empotrada en su extremo derecho, causados por la fuerza P sen θt (fig. 160, *a*).

Hallamos la expresión de los momentos $M_m(z)$. De acuerdo con (5.66) y (5.67) las condiciones de frontera en el extremo derecho de la viga son:

$$y(l) = y(0)\,A_\lambda + \frac{y'(0)}{s}\,B_\lambda + \frac{P}{s^3 EJ}\,D_\lambda = 0;$$

$$y'(l) = sy(0)\,D_\lambda + y'(0)\,A_\lambda + \frac{P}{s^2 EJ}\,C_\lambda = 0.$$

Al resolver estas ecuaciones, obtenemos:

$$y(0)=\frac{P}{s^3EJ}\,\frac{B_\lambda C_\lambda - A_\lambda D_\lambda}{A_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda}\,; \quad y'(0)=\frac{P}{s^2EJ}\,\frac{D_\lambda^2 - A_\lambda C_\lambda}{A_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda}\,. \qquad \text{(a)}$$

La expresión de los momentos $M_m(z)$ según (5.68) es:

$$M_m(z)=-s^2EJy(0)\,C_{sz}-sEJy'(0)\,D_{sz}-\frac{P}{s}\,B_{sz}.$$

Comparándola con (9.7): $a=0$;

$$b=-\frac{P}{s}\,; \quad c=-s^2EJy(0); \quad d=-sEJy'(0).$$

Determinamos el ángulo de giro en el extremo izquierdo (fig. 160, *b*): $\overline{M}_k = 1$, de acuerdo con (9.8) ello significa: $e=0$; $f=1$. Según la fórmula (9.10)

$$EJ\Delta_{km}=-\frac{P}{s}\,\frac{C_\lambda}{s}-s^2EJy(0)\,\frac{D_\lambda}{s}-sEJy'(0)\,\frac{A_\lambda-1}{s}\,.$$

Tomando en consideración (a), obtenemos lo que hemos esperado: $\Delta_{km}=y'(0)$.

Determinamos la flexión en el extremo izquierdo de la viga (fig. 160, *c*); $\overline{M}_k=-lz$, lo que quiere decir que: $e=-1$, $f=0$.

Según la fórmula (9.10),

$$EJ\Delta_{km}=-1\left(-\frac{P}{s}\right)\left(\frac{l}{s}\,C_\lambda-\frac{D_\lambda}{s^2}\right)+$$

$$+s^2EJy(0)\left(\frac{l}{s}\,D_\lambda-\frac{A_\lambda-1}{s^2}\right)+sEJy'(0)\left(\frac{l}{s}\,A_\lambda-\frac{B_\lambda}{s^2}\right).$$

Al realizar las transformaciones

$$\Delta_{km}=y(0)+y(0)(\lambda D_\lambda+A_\lambda)+\frac{y'(0)}{s}(\lambda A_\lambda-B_\lambda)+\frac{P}{s^2EJ}(\lambda C_\lambda-D_\lambda).$$

Teniendo en cuenta (a),

$$\Delta_{km}=y(0).$$

§ 78. CÁLCULO DE LOS PÓRTICOS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADOS A LA ACCIÓN DE UNA CARGA VIBRATORIA Y DETERMINACIÓN DE LAS FRECUENCIAS DE OSCILACIONES LIBRES POR EL MÉTODO DE FUERZAS.

Sea que sobre cierto pórtico estáticamente indeterminado actúa una carga vibratoria de una misma frecuencia $P(t)=\sum P_i \operatorname{sen}\theta t$ (fig. 161, *a*). Examinaremos las oscilaciones persistentes. En tal caso todas las reacciones, fuerzas internas y desplazamientos variarán según la ley $\operatorname{sen}\theta t$. Convirtamos el sistema prefijado en principal eliminando las relaciones y sustituyéndolas por las reacciones de vibración desconocidas $X_1, \ldots, X_n$ (fig. 161, *b*). Cualquier incógnita es $X_k(t)=X_k \operatorname{sen}\theta t$, donde X_k es el valor de amplitud de la reacción de enlace desconocida.

Al desestimar la influencia de las fuerzas longitudinales variables sobre los momentos flectores, la ecuación diferencial de oscilaciones transversales de la barra será lineal, por lo tanto es justo el principio de superposición del cual haremos uso.

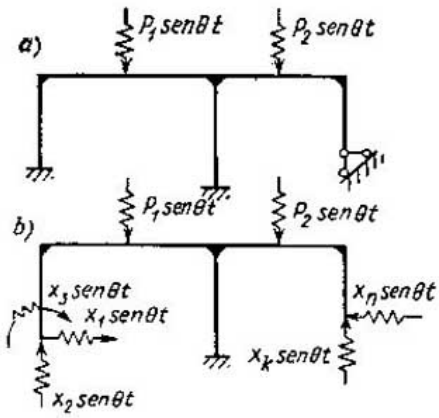


Fig. 161

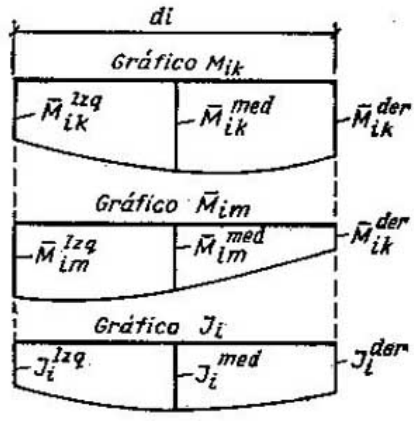


Fig. 162

Todo desplazamiento $\Delta_{km}(t)$ lo representaremos así:

$$\Delta_{km}(t) = \Delta_{km} \operatorname{sen} \theta t.$$

Escribamos el desplazamiento en dirección hacia la incógnita X_k debido a todas las reacciones desconocidas $X_1, \ldots, X_n$ y a la carga dada:

$$\Delta_k(t) = \Delta_{k1} \operatorname{sen} \theta t + \Delta_{k2} \operatorname{sen} \theta t + \ldots + \Delta_{kn} \operatorname{sen} \theta t + \\ + \Delta_{kp} \operatorname{sen} \theta t = 0.$$

Suponiendo más adelante que $\frac{\Delta_{km} \operatorname{sen} \theta t}{X_m \operatorname{sen} \theta t} = \delta_{km}$, escribimos esta ecuación así:

$$\delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \ldots + \delta_{kn}X_n + \Delta_{kp} = 0, \qquad (9.12)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

donde δ_{km} es el valor de amplitud del desplazamiento en dirección de la fuerza X_k debido a la fuerza $X_m = 1 \operatorname{sen} \theta t$, mientras que Δ_{kp} es el desplazamiento de amplitud debido a la carga y en dirección de la misma fuerza.

La ecuación (9.12) es una ecuación canónica de forma general del método de fuerzas. Suponiendo en (9.12) que $k = 1, 2, \ldots, n$, obtenemos n ecuaciones para determinar $X_1, \ldots, X_n$ valores de amplitud de las reacciones de enlaces eliminados.

Los coeficientes y términos independientes se determinan según (9.6):

$$\delta_{km} = \sum \int \overline{M}_k \frac{\overline{M}_m}{EJ} ds; \qquad \Delta_{kp} = \sum \int \overline{M}_k \frac{M_p}{EJ} ds. \qquad (9.13)$$

Aquí M_k son momentos debidos a la fuerza estática $X_k = 1$; $\overline{M}_m$ y M_p, los valores de amplitud de los momentos flectores debidos a la fuerza dinámica $X_m = 1 \operatorname{sen} \theta t$ y a la carga dada.

A veces, por ejemplo, al calcular vigas continuas, estos desplazamientos se determinan de modo más sencillo, o sea, como elementos de una línea elástica de elementos separados del sistema principal, lo cual mostraremos más abajo.

La más grave complejidad del cálculo por el método de fuerzas radica en la obtención de diagramas unitarios y de carga en el sistema fundamental debido a las reacciones de vibración de los enlaces eliminados y a la carga prefijada.

El diagrama de momentos flectores se determina según la expresión:

$$(M_p) = (\overline{M}_1) X_1 + (\overline{M}_2) X_2 + \ldots + (\overline{M}_n) X_n + (M_p^0). \qquad (9.14)$$

Las ecuaciones canónicas (9.12) en forma matricial son:

$$\mathbf{DX} + \mathbf{D}_p = 0, \qquad (9.15)$$

donde,

$$\mathbf{D} = \| \delta_{km} \| = \begin{Vmatrix} \delta_{11}\delta_{12} \ldots \delta_{1n} \\ \delta_{21}\delta_{22} \ldots \delta_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \delta_{n1}\delta_{n2} \ldots \delta_{nn} \end{Vmatrix} = \overline{\mathbf{M}}_k \cdot \mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{M}}_m =$$

$$= \begin{Vmatrix} \overline{M}'_{11}\overline{M}'_{21} \ldots \overline{M}'_{t1} \\ \overline{M}'_{12}\overline{M}'_{22} \ldots \overline{M}'_{t2} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \overline{M}'_{1n}\overline{M}'_{2n} \ldots \overline{M}'_{tn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} A_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_t \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \overline{M}_{11}\overline{M}_{12} \ldots \overline{M}_{1n} \\ \overline{M}_{21}\overline{M}_{22} \ldots \overline{M}_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \overline{M}_{t1}\overline{M}_{t2} \ldots \overline{M}_{tn} \end{Vmatrix}$$

n filas, t columnas — t filas, t columnas — t filas, a columnas

$$\overline{\mathbf{M}}_{tk} = \| \overline{M}_{ik}^{\text{iz}} \overline{M}_{ik}^{\text{med}} \overline{M}_{ik}^{\text{der}} \| \text{ (fig. 162)} \qquad (9.16)$$

es la fila de una matriz (columna transpuesta) de los momentos $\overline{M}_{ik}$ en el i-ésimo tramo debidos a la fuerza estática $X_k = 1$, para $k = 1, 2, \ldots, n$, destinada para la matriz $\overline{M}'_k$.

$$\mathbf{A}_i = \frac{d_i}{6EJ_0} \begin{Vmatrix} a_i^{\text{iz}} & 0 & 0 \\ 0 & 4a_i^{\text{med}} & 0 \\ 0 & 0 & a_i^{\text{der}} \end{Vmatrix}; \qquad (9.17)$$

$$a_i = EJ_0 : E_i J_i$$

es la matriz de flexibilidad en el i-ésimo tramo; J_0 es el momento libre de inercia igual para todo el sistema;

$$\overline{\mathbf{M}}_{im} = \vec{\overline{\mathbf{M}}}_{im} = \left\| \begin{matrix} \overline{M}_{im}^{\text{iz}} \\ \overline{M}_{im}^{\text{med}} \\ \overline{M}_{im}^{\text{der}} \end{matrix} \right\| = | \{ \overline{M}_{im}^{\text{iz}} \overline{M}_{im}^{\text{med}} \overline{M}_{im}^{\text{der}} \} | \qquad (9.18)$$

es la matriz-columna de los momentos de amplitud debidos a la fuerza de vibración $X_m = 1 \cdot \operatorname{sen} \theta t$ en i-ésimo tramo, siendo $m = 1, 2, \ldots, n$, escrito para la matriz M_m en tres formas.

$$\mathbf{X} = | \{ X_1 X_2 \ldots X_n \} | \qquad (9.19)$$

es la matriz-columna de incógnitas;

$$\mathbf{D}_p = \overline{\mathbf{M}}_k' \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{M}_p^0 = \left\| \begin{matrix} \overline{\mathbf{M}}_{11}' \overline{\mathbf{M}}_{21}' & \ldots & \overline{\mathbf{M}}_{t1}' \\ \overline{\mathbf{M}}_{12}' \overline{\mathbf{M}}_{22}' & \ldots & \overline{\mathbf{M}}_{t2}' \\ \ldots\ldots\ldots & & \\ \overline{\mathbf{M}}_{1n}' \overline{\mathbf{M}}_{21}' & \ldots & \overline{\mathbf{M}}_{tn}' \end{matrix} \right\| \times$$

$$\times \left\| \begin{matrix} \mathbf{A}_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mathbf{A}_t \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \overline{\mathbf{M}}_{1p}^0 \\ \overline{\mathbf{M}}_{2p}^0 \\ \ldots \\ \overline{\mathbf{M}}_{tp}^0 \end{matrix} \right\| ;$$

$$M_{ip}^0 = | \{ M_{ip}^{0\text{iz}} M_{ip}^{0\text{med}} M_{ip}^{0\text{der}} \} | \qquad (9.20)$$

es la matriz-columna de los momentos flectores causados por la carga en el i-ésimo tramo.

Sustituyendo en (9.15) lo obtenido, tendremos:

$$\overline{\mathbf{M}}_k' \cdot \mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{M}}_m \cdot \mathbf{X} + \overline{\mathbf{M}}_k' \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{M}_P^0 = 0. \qquad (9.21)$$

Los diagramas de los momentos flectores debidos a la carga en el sistema indicado se construyen según la siguiente expresión:

$$\mathbf{M}_p = \overline{\mathbf{M}}_m \mathbf{X} + \mathbf{M}_p^0 =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \overline{\mathbf{M}}_{11} \mathbf{M}_{12} \ldots \overline{\mathbf{M}}_{1n} \\ \overline{\mathbf{M}}_{21} \overline{\mathbf{M}}_{22} \ldots \overline{\mathbf{M}}_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{\mathbf{M}}_{t1} \overline{\mathbf{M}}_{t2} \ldots \overline{\mathbf{M}}_{tn} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \overline{\mathbf{X}}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \ldots \\ \mathbf{X}_n \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \mathbf{M}_{1p}^0 \\ \mathbf{M}_{2p}^0 \\ \ldots \\ \mathbf{M}_{np}^0 \end{matrix} \right\| . \qquad (9.22)$$

Las oscilaciones naturales de pórticos se investigan por el método de fuerzas según las ecuaciones canónicas de forma (9.12) sin términos independientes, es decir,

$$\delta_{k1} X_1 + \delta_{k2} X_2 + \ldots + \delta_{kn} X_n = 0. \qquad (9.23)$$

Sólo en este caso la frecuencia de la carga actuante θ debe sustituirse por una frecuencia desconocida de oscilaciones libres ω_t, mediante la cual se expresarán de forma implícita los coeficientes δ_{km} de ésta ecuación.

Como las ecuaciones canónicas obtenidas según la expresión (9.23), para $k = 1, 2, \ldots, n$, son homogéneas, entonces, para obtener los valores de X_t diferentes a cero, es necesario convertir en cero el determinante de los coeficientes de las ecuaciones:

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11}\delta_{12} & \ldots & \delta_{1n} \\ \delta_{21}\delta_{22} & \ldots & \delta_{2n} \\ \delta_{n1}\delta_{n2} & \ldots & \delta_{nn} \end{vmatrix} = 0. \qquad (9.24)$$

El desarrollo de este determinante nos da una ecuación de las frecuencias. En ésta entra el valor s relacionado con la frecuencia ω_t por medio de la igualdad

$$s_t^4 = m\omega_t^2 : EJ.$$

Puesto que diferentes elementos del pórtico pueden tener diferentes valores de s_t, entonces, es menester reducir todos ellos a algún elemento único, el cual lo denominaremos principal. Dejemos que el coeficiente s_i del elemento principal sea s_{t0}, mientras que el de otro cualquiera, s_{tn}. Dado que, al oscilar el pórtico por la forma principal, las frecuencias de todos sus elementos son iguales entre sí, entonces, podemos escribir:

$$\frac{s_{t0}^4 EJ_0}{m_0} = \frac{s_{tn}^4 EJ_n}{m_n}.$$

De aquí obtenemos,

$$s_{tn} = s_{t0}\zeta_n, \qquad (9.25)$$

donde,

$$\zeta_n = \sqrt[4]{m_n J_0 : m_0 J_n}.$$

Con la misma facilidad obtenemos,

$$\lambda_n = s_{tn} l_n = s_{t0}\zeta_n l_n = \lambda_0 \frac{l_n}{l_0}\zeta_n. \qquad (9.26)$$

La frecuencia se determina por medio de s_{t0} según la fórmula

$$\omega_t^2 = s_{t0}^4 EJ_0 : m_0 = \frac{\lambda_0^4}{l_0^4}\frac{EJ_0}{m_0}. \qquad (9.27)$$

La ecuación de frecuencias resulta ser complicada trascendente respecto a la magnitud s_{t0} o λ_0 del elemento principal, por lo tanto puede resolverse sólo por medio de la selección.

Para determinar con aproximación las raíces de la ecuación de frecuencias, es recomendable trazar la curva de valores del determinante (9.24) (fig. 163). La intersección de esta curva con el eje de abscisas nos dará valores de raíces de la ecuación de frecuencias.

Es de señalar que las ecuaciones canónicas de (9.23), hablando en general, pueden ser satisfechas también con $X_1, \ldots, X_n = 0$. Esta es la así llamada solución *trivial* de las ecuaciones (9.23).

Si las oscilaciones libres del sistema son posibles físicamente cuando $X_1 = \ldots = X_n' = 0$, lo que puede ser en algunos casos

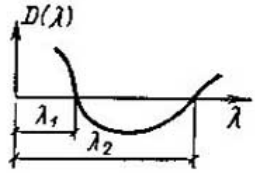


Fig. 163

particulares, entonces, la solución trivial es aplicable para ellas. Esto significa, que algunas formas principales de oscilaciones propias del sistema fundamental coincidirán con ciertas formas principales del sistema prefijado, cuando los desplazamientos interiores de aquél en dirección hacia las incógnitas son iguales a cero.

En estos casos debemos investigar de modo suplementario las oscilaciones del sistema fundamental con desplazamientos iguales a cero y dirigidos hacia las desconocidas.

En caso cuando, al presenciar oscilaciones libres, en las ecuaciones (9.23), incógnitas aisladas pueden ser notoriamente iguales a cero, éstas deben eliminarse de las ecuaciones y para el nuevo sistema de ecuaciones canónicas hay que componer su determinante (9.24).

En los sistemas simétricos las oscilaciones libres serán simétricas y antisimétricas. Sus investigaciones deben realizarse por separado, tomando por incógnitas las fuerzas pares o cambiando el sistema por sus mitades (véase la fig. 62).

Notemos, que el método de fuerzas, en caso general, es complicado para el uso práctico y en relación con esto cede a menudo ante el método de desplazamientos. Pero puede aplicarse con éxito cuando el cálculo de coeficientes de las ecuaciones canónicas (9.12) y (9.23) no representa dificultades, como, por ejemplo, al calcular vigas continuas.

Las ecuaciones (9.23) y (9.24) en forma matricial son:

$$\mathbf{DX} = 0,$$

$$D = |\mathbf{D}| = 0. \qquad (9.28)$$

§ 79. CÁLCULO DE LOS PÓRTICOS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADOS A LA ACCIÓN DE UNA CARGA VIBRATORIA Y DETERMINACIÓN DE LAS FRECUENCIAS DE OSCILACIONES LIBRES POR EL MÉTODO DE DESPLAZAMIENTOS.

Examinemos algún pórtico estáticamente indeterminado que se halla bajo la acción de una carga de vibración (fig. 164, *a*). Al igual que en el método de fuerzas, examinaremos las oscilaciones persistentes del pórtico con la frecuencia θ de la carga actuante, debido a las cuales las reacciones, las fuerzas internas y los desplazamientos varían según la ley sen θt. Convirtamos el sistema prefijado en fundamental (fig. 164, *b*) y apliquemos a él los desplazamientos de vibración desconocidos en dirección de los enlaces introducidos $Z_1, \ldots, Z_n$. Cada uno de los desplazamientos desconocidos es:

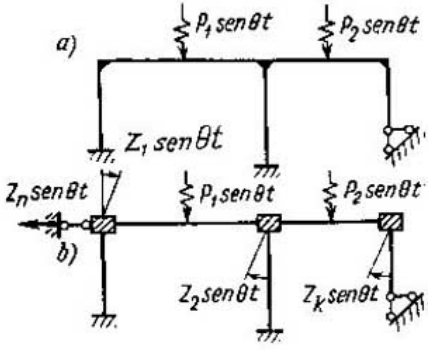


Fig. 164

$$Z_k(t) = Z_k \operatorname{sen} \theta t.$$

De modo análogo, cada una de las reacciones del enlace superpuesto es:

$$R_{km}(t) = R_{km} \operatorname{sen} \theta t.$$

De acuerdo con el principio de superposición la ecuación canónica es:

$$R_k(t) = R_{k1} \operatorname{sen} \theta t + R_{k2} \operatorname{sen} \theta t + \ldots + R_{kn} \operatorname{sen} \theta t + \\ + R_{kp} \operatorname{sen} \theta t = 0.$$

Suponiendo en adelante que $r_{km} = \dfrac{R_{km} \operatorname{sen} \theta t}{Z_m \operatorname{sen} \theta t}$, obtenemos en definitiva:

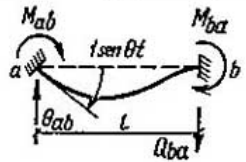
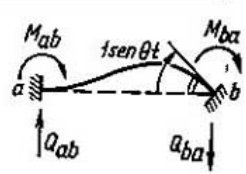
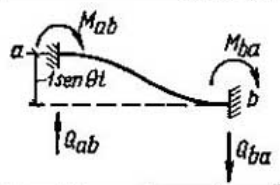
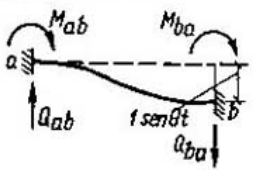
$$r_{k1}Z_1 + r_{k2}Z_2 + \ldots + r_{kn}Z_n + R_{kp} = 0, \qquad (9.29)$$

donde r_{km} es el valor de amplitud de la reacción causada en el enlace k por el desplazamiento de vibración unitario del enlace m; R_{kp}, la reacción de amplitud del mismo enlace provocada por la carga de vibración dada.

De esta ecuación con $k = 1, 2, \ldots, n$ obtendremos n ecuaciones canónicas. Sus coeficientes y los términos independientes se determinan por los procedimientos usuales del método de desplazamientos.

Por cuanto el sistema fundamental de este método consta de elementos estándares, entonces, la construcción de los diagramas unitarios referentes a los valores de amplitud de desplazamientos

Tabla 6

Nº	Esquema	Valores de amplitud			
		$M_{ab} = M(0)$	$M_{ba} = M(l)$	$Q_{ab} = Q(0)$	$Q_{ba} = Q(l)$
1		$\frac{4EJ}{l}\mu_1(\lambda)$ $\mu_1(\lambda)$ según (6.89)	$\frac{2EJ}{l}\mu_2(\lambda)$ $\mu_2(\lambda)$ según (6.90)	$-\frac{6EJ}{l^2}\varepsilon_1(\lambda)$ $\varepsilon_1(\lambda)$ según (6.94)	$-\frac{6EJ}{l^2}\varepsilon_2(\lambda)$ $\varepsilon_2(\lambda)$ según (6.95)
2		$\frac{2EJ}{l}\mu_2(\lambda)$ $\mu_2(\lambda)$ según (6.90)	$\frac{4EJ}{l}\mu_1(\lambda)$ $\mu_1(\lambda)$ según (6.89)	$-\frac{6EJ}{l^2}\varepsilon_2(\lambda)$ $\varepsilon_2(\lambda)$ según (6.95)	$-\frac{6EJ}{l^2}\varepsilon_1(\lambda)$ $\varepsilon_1(\lambda)$ según (6.94)
3		$-\frac{6EJ}{l^2}\mu_3(\lambda)$ $\mu_3(\lambda)$ según (6.91)	$-\frac{6EJ}{l^2}\mu_4(\lambda)$ $\mu_4(\lambda)$ según (6.92)	$\frac{12EJ}{l^3}\varepsilon_3(\lambda)$ $\varepsilon_3(\lambda)$ según (6.96)	$\frac{12EJ}{l^3}\varepsilon_4(\lambda)$ $\varepsilon_4(\lambda)$ según (6.97)
4		$-\frac{6EJ}{l^2}\mu_4(\lambda)$ $\mu_4(\lambda)$ según (6.92)	$-\frac{6EJ}{l^2}\mu_3(\lambda)$ $\mu_3(\lambda)$ según (6.91)	$\frac{12EJ}{l^3}\varepsilon_4(\lambda)$ $\varepsilon_4(\lambda)$ según (6.97)	$\frac{12EJ}{l^3}\varepsilon_3(\mu)$ $\varepsilon_3(\lambda)$ según (6.96)

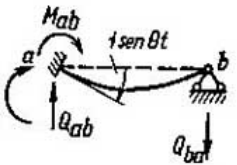
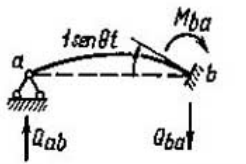
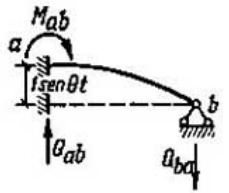
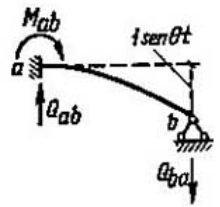
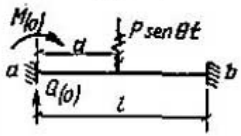
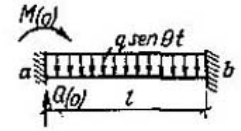
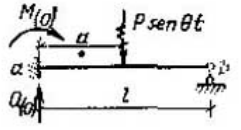
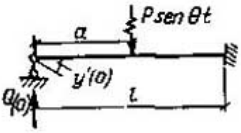
5		$\frac{3EJ}{l}\mu_5(\lambda)$ $\mu_5(\lambda)$ según (6.122)	0	$-\frac{3EJ}{l^2}\varepsilon_5(\lambda)$ $\varepsilon_5(\lambda)=\mu_6(\lambda)$ $\varepsilon_5(\lambda)$ según (6.126)	$-\frac{3EJ}{l^2}\varepsilon_5^*(\lambda)$ $\varepsilon_5^*(\lambda)=\mu_7(\lambda)$ según (6.124)
6		0	$\frac{3EJ}{l}\mu_5(\lambda)$ $\mu_5(\lambda)$ según (6.122)	$-\frac{3EJ}{l^2}\varepsilon_5^*(\lambda)$ $\varepsilon_5^*(\lambda)$ según (6.124)	$-\frac{3EJ}{l^2}\varepsilon_5(\lambda)$ $\varepsilon_5(\lambda)$ según (6.126)
7		$-\frac{3EJ}{l^2}\mu_6(\lambda)$ $\mu_6(\lambda)$ según (6.123)	0	$+\frac{3EJ}{l^3}\varepsilon_6(\lambda)$ $\varepsilon_6(\lambda)$ según (6.127)	$+\frac{3EJ}{l^3}\varepsilon_6^*(\lambda)$ $\varepsilon_6^*(\lambda)=\varepsilon_7(\lambda)$ $\varepsilon_7(\lambda)$ según (6.128)
8		$-\frac{3EJ}{l^2}\mu_7(\lambda)$ $\mu_7(\lambda)$ según (6.124)	0	$\frac{3EJ}{l^3}\varepsilon_7(\lambda)$ $\varepsilon_7(\lambda)$ según (6.128)	$\frac{3EJ}{l^3}\varepsilon_8(\lambda)$ $\varepsilon_8(\lambda)$ según (6.131)

Tabla 7

N°	Esquema	Valores de amplitud de los parámetros iniciales	
		$M(0) = M_{ab}$	$Q(0) = Q_{ab}$
1		$\frac{P}{s}[C_\lambda D_{s(l-a)} - D_\lambda C_{s(l-a)}] : \Delta_1$ véase (6.82)	$P[C_\lambda C_{s(l-a)} - B_\lambda D_{s(l-a)}] : \Delta_1$ véase (6.83)
2		$\frac{q}{s^2}[C_\lambda (A_\lambda - 1) - D_\lambda^2] : \Delta_1$ véase (6.84)	$\frac{q}{s}[C_\lambda D_\lambda - B_\lambda (A_\lambda - 1)] : \Delta_1$ véase (6.85)
3		$\frac{P}{s}[-B_\lambda D_{s(l-a)} + D_\lambda B_{s(l-a)}] : \Delta_2$ véase (6.117)	$P[-C_\lambda B_{s(l-a)} + A_\lambda D_{s(l-a)}] : \Delta_2$ véase (6.118)
		$y'(0)$	$Q(0)$
4		$\frac{P}{s^2 EJ}[-D_\lambda C_{s(l-a)} + C_\lambda D_{s(l-a)}] : \Delta_2$ véase (6.107)	$P[-B_\lambda C_{s(l-a)} + A_\lambda D_{s(l-a)}] : \Delta_2$ véase (6.108)

$$\Delta_1 = C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda - \frac{1}{2}(1 - \operatorname{ch}\lambda \cos\lambda);$$

$$\Delta_2 = A_\lambda D_\lambda - B_\lambda C_\lambda = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}\lambda \cos\lambda - \operatorname{ch}\lambda \operatorname{sen}\lambda)$$

unitarios, así como a la carga prefijada, no representa grandes dificultades. En la tabla 6 se aducen los valores de amplitud de los momentos y de las fuerzas transversales de los extremos de los elementos estándares del sistema fundamental, los cuales fueron obtenidos en el capítulo 6, mientras que en la tabla 7, los causados por algunos tipos de carga de vibración.

Si el sistema prefijado es simétrico, entonces, en calidad de incógnitas deben tomarse los desplazamientos pares o hace falta dividir la

carga en simétrica y antisimétrica, sustituyendo el sistema por sus mitades (véase la fig. 62).

Si sobre el pórtico actúa la fuerza $P(t)$, la cual varía en el tiempo según una ley arbitraria, esta fuerza puede desarrollarse en una serie trigonométrica en concordancia con las indicaciones del § 17. Después de desarrollada la carga, el pórtico se calcula por separado con respecto a cada uno de los sumandos de la serie y, posteriormente, los resultados del cálculo se suman. El cálculo es válido sólo para las oscilaciones persistentes debidas a la acción de la carga indicada.

El diagrama de momentos flectores se halla según la expresión

$$(M_p) = (\overline{M}_1) Z_1 + (\overline{M}_2) Z_2 + \ldots + (\overline{M}_n) Z_n + (M_p^0). \quad (9.30)$$

Si en el lugar de acción de la fuerza $P \operatorname{sen} \theta t$ existe una masa concentrada m no despreciable, entonces, para tomar en consideración esta última, los datos respectivos pueden encontrarse en la obra [12] y más abajo, en el § 82.

Las oscilaciones libres se investigan según las ecuaciones canónicas (9.29) sin términos independientes:

$$r_{k1} Z_1 + r_{k2} Z_2 + \ldots + r_{kn} Z_n = 0. \quad (9.31)$$

Las ecuaciones canónicas de (9.31) son homogéneas, por eso

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} r_{12}, \ldots, r_{1n} \\ r_{21} r_{22}, \ldots, r_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ r_{n1} r_{n2}, \ldots, r_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (9.32)$$

Desarrollando el determinante, obtendremos la ecuación de frecuencias con las incógnitas ω_i o s_i. Todo lo dicho acerca del determinante (9.24), también es justo para el determinante (9.32).

Aquí, lo mismo que en el método de fuerzas, las investigaciones de las oscilaciones simétricas y antisimétricas deben realizarse por separado, tomando en calidad de incógnitas los desplazamientos pares o sustituyendo el sistema por sus mitades (véase la fig. 62).

A semejanza del método de fuerzas, aquí también señalemos que en casos particulares es posible la coincidencia de algunas formas principales del sistema prefijado con algunas formas principales de oscilaciones propias del sistema fundamental, cuando en este último los desplazamientos en dirección hacia las incógnitas son iguales a cero. Ello significa que las ecuaciones (9.31) pueden ser satisfechas también con los valores triviales de las incógnitas $Z_i = 0$.

Las ecuaciones (9.29) — (9.31) en forma matricial son:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{Z} + \mathbf{R}_p = 0; \quad (9.33)$$

$$\mathbf{D} = |\mathbf{R} \cdot \mathbf{Z}| = 0, \quad (9.34)$$

donde

$$\mathbf{R} = \| r_{km} \| = \begin{Vmatrix} r_{11} r_{12} \dots r_{1n} \\ r_{21} r_{22} \dots r_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ r_{n1} r_{n2} \dots r_{nn} \end{Vmatrix} \quad (9.35)$$

es la matriz de coeficientes de las ecuaciones canónicas;

$$\mathbf{Z} = | \{Z_1 Z_2 \dots Z_n\} | \quad (9.36)$$

es la matriz-columna (vector) de incógnitas;

$$\mathbf{R}_p = | \{R_{1p} R_{2p} \dots R_{np}\} | \quad (9.37)$$

es la matriz-columna (vector) de las reacciones de carga.

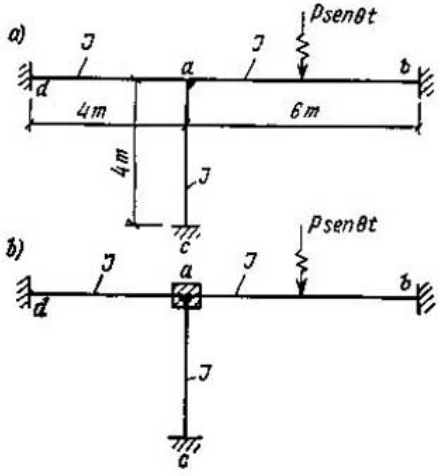


Fig. 165

El diagrama de los momentos (M_p) en forma matricial es:

$$(\mathbf{M}_p) = \overline{\mathbf{M}}_i \cdot \mathbf{Z} + \mathbf{M}_p^0, \quad (9.38)$$

donde

$$\overline{\mathbf{M}}_i \| (\overline{M}_1) (\overline{M}_2) \dots (\overline{M}_n) \| \quad (9.39)$$

es la fila de una matriz de los diagramas unitarios de momentos en el sistema fundamental.

Ejemplo 54. Construir el diagrama de los momentos dinámicos causados en el pórtico por la carga de vibración (fig. 165, *a*) con los datos siguientes: EJ=const; $s_{ab} = 0{,}6\ \text{m}^{-1}$; $s_{ac} = 0{,}3\ \text{m}^{-1}$ y $s_{ad} = 0{,}5\ \text{m}^{-1}$. El sistema fundamental tendrá un solo enlace de momento (fig. 165, *b*).

La ecuación canónica es: $r_{11}Z_1 + R_{1p} = 0$.

El valor de r_{11}, visto como una reacción de momento, es igual a la suma de los momentos causados en los extremos de las barras, convergentes en un nudo, debido al giro de éste en un ángulo $Z_1 = 1$.

Según la tabla 6 (el primer caso) tenemos,

$$r_{11} = \sum \frac{4EJ}{l} \mu_1 = 4EJ \{[\mu_1(\lambda_{ab}) : l_{ab}] + [\mu_1(\lambda_{ac}) : l_{ac}] + [\mu_1(\lambda_{ad}) : l_{ad}]\};$$

$$\lambda_{ab} = s_{ab} l_{ab} = 0{,}6 \cdot 6 = 3{,}6; \quad \mu_1(3{,}6) = 0{,}42845;$$
$$\lambda_{ac} = s_{ac} l_{ac} = 0{,}3 \cdot 4 = 1{,}2; \quad \mu_1(1{,}2) = 0{,}99505;$$
$$\lambda_{ad} = s_{ad} l_{ad} = 0{,}5 \cdot 4 = 2{,}0; \quad \mu_1(2{,}0) = 0{,}96083.$$

Por consiguiente,

$$r_{11} = 4EJ\ (1/6 \cdot 0{,}42845 + 1/4 \cdot 0{,}99505 + 1/4 \cdot 0{,}96083) = 2{,}24151\ EJ.$$

La reacción R_{1p} la determinaremos a base de los datos de la tabla 7 (el primer caso):

$$R_{1p} = M(0) = \frac{P}{0{,}6} \frac{9{,}60477 \cdot 0{,}98416 - 9{,}36399 \cdot 1{,}66823}{9{,}60477^2 - 8{,}92147 \cdot 9{,}36399} = -1{,}18024P.$$

Por consiguiente,

$$Z_1 = -R_{1p} : r_{11} = -1{,}18024P : 2{,}24151EJ = 0{,}526536\,\frac{P}{EJ}.$$

Construcción del diagrama de los momentos flectores.
Elemento $a - b$; $s_{ab} = 0{,}6$; $\lambda_{ab} = 3{,}6$.
Condiciones iniciales del extremo izquierdo del elemento: $y(0) = 0$;

$$y'(0) = Z_1 = 0{,}526536\,\frac{P}{EJ}; \quad M(0) = \overline{M}_1 Z_1 + M_p^0;$$

$$\overline{M}_1 = 4\frac{EJ}{6}\,0{,}42845 = 0{,}285633EJ; \quad M_p^0 = R_{1p} = -1{,}18024P.$$

Ahora $M(0) = 0{,}285633EJ \cdot 0{,}526536\,\frac{P}{EJ} - 1{,}18024P = -1{,}02984P$. De acuerdo con la tabla 6 (el primer caso) tenemos:

$$\overline{Q}_1 = -\frac{6EJ}{6^2}\,s_1(3{,}6) = -\frac{EJ}{6}\,\frac{\lambda_{ab}^2\,(C_{\lambda_{ab}}A_{\lambda_{ab}} - B_{\lambda_{ba}}^2)}{6\,(C_{\lambda_{ab}}^2 - B_{\lambda_{ab}}D_{\lambda_{ab}})} =$$

$$= -\frac{EJ}{36}\,\frac{3{,}6^2\,(9{,}60477 \cdot 8{,}70801 - 8{,}92147^2)}{9{,}60477^2 - 8{,}92147 \cdot 9{,}36399} = 0{,}1672\,EJ.$$

Según la tabla 7 (el primer caso) tenemos:

$$Q_{1p} = Q_p(0) = P\,\frac{C_{\lambda_{ab}}C_{\frac{\lambda_{ab}}{2}} - B_{\lambda_{ab}}D_{\frac{\lambda_{ab}}{2}}}{C_{\lambda_{ab}}^2 - B_{\lambda_{ab}}D_{\lambda_{ab}}} =$$

$$= P\,\frac{9{,}60477 \cdot 1{,}66823 - 8{,}92147 \cdot 0{,}98416}{9{,}60477^2 - 8{,}92147 \cdot 9{,}36399} = 0{,}83145\,P.$$

Por consiguiente,

$$Q(0) = 0{,}1672EJ \cdot 0{,}526536P/EJ + 0{,}83145P = 0{,}919488P.$$

De acuerdo con las expresiones (5.66) — (5.68), para el primer tramo tenemos que:

1) la ecuación de la línea elástica es,

$$y(z) = \frac{0{,}526536P}{0{,}6EJ}\,B_{sz} + \frac{1{,}02984P}{0{,}6^2EJ}\,C_{sz} - \frac{0{,}919488P}{0{,}6^3EJ}\,D_{sz}$$

o

$$EJy(z) = 0{,}87756PB_{sz} + 2{,}860667PC_{sz} - 4{,}256889PD_{sz};$$

2) la derivada de la línea elástica es:

$$EJy'(z) = 0{,}6\,(0{,}87756PA_{sz} + 2{,}860667PB_{sz} - 4{,}256889PC_{sz});$$

3) la ecuación de los momentos flectores es:

$$M(z) = 0{,}6^2\,(-0{,}87756PD_{sz} - 2{,}860667PA_{sz} + 4{,}256889PB_{sz}) =$$
$$= -0{,}315922PD_{sz} - 1{,}02984PA_{sz} + 1{,}53248PB_{sz}.$$

Los términos suplementarios para el segundo tramo según (5.70) — (5.72) son:

$$EJ\,\Delta y = \frac{P}{0{,}6^3} D_{s\left(z-\frac{l}{2}\right)} = 4{,}629630 P D_{s\left(z-\frac{l}{2}\right)};$$

$$EJ\,\Delta y' = 4{,}62963 P \cdot 0{,}6 C_{s\left(z-\frac{l}{2}\right)} = 2{,}777778 P C_{s\left(z-\frac{l}{2}\right)};$$

$$\Delta M = -4{,}62963 P \cdot 0{,}6^2 B_{s\left(z-\frac{l}{2}\right)} = -1{,}666667 P B_{s\left(z-\frac{l}{2}\right)}.$$

Verifiquemos las condiciones de frontera en el extremo derecho, para $z = l$:

$$EJy\,(l) = 0{,}87756P \cdot 8{,}92147 + 2{,}860667P \cdot 9{,}60477 -$$
$$- 4{,}256889P \cdot 9{,}36399 + 4{,}62963P \cdot 0{,}98416 = -39{,}86147P +$$
$$+ 39{,}86147P = 0.$$

El cálculo de éstas lo realizamos según la ecuación de momentos flectores:

1) $z = 0$; $sz = 0$; $M\,(0) = -1{,}02984P$;

2) $z = 1$; $sz = 0{,}6$;

$$M\,(1) = (-0{,}31592 \cdot 0{,}03606 - 1{,}02984 \cdot 1{,}00539 +$$
$$+ 1{,}53248 \cdot 0{,}60064)\,P = -0{,}1263P;$$

3) $z = 2$; $sz = 1{,}2$;

$$M\,(2) = (-0{,}31592 \cdot 0{,}28871 - 1{,}02984 \cdot 1{,}08651 +$$
$$+ 1{,}53248 \cdot 1{,}22075)\,P = 0{,}6606P;$$

4) $z = 3$, $sz = 1{,}8$;

$$M\,(3) = (-0{,}31592 \cdot 0{,}98416 - 1{,}02984 \cdot 1{,}44013 +$$
$$+ 1{,}53248 \cdot 1{,}95801)P = 1{,}2066P;$$

5) $z = 4$; $sz = 2{,}4$; $s\frac{l}{2} = 1{,}8$;

$$M\,(4) = (-0{,}31592 \cdot 2{,}39539 - 1{,}02984 \cdot 2{,}40978 +$$
$$+ 1{,}53248 \cdot 3{,}07085 - 1{,}66667 \cdot 0{,}60065)P = 0{,}4665P;$$

6) $z = 5$; $sz = 3{,}0$;

$$M\,(5) = (-0{,}31592 \cdot 4{,}93838 - 1{,}02984 \cdot 4{,}53884 +$$
$$+ 1{,}53248 \cdot 5{,}07950 - 1{,}66667 \cdot 1{,}22075)P = -0{,}4848P;$$

7) $z = 6$; $sz = 3{,}6$;

$$M\,(6) = (-0{,}31592 \cdot 9{,}36399 - 1{,}02984 \cdot 8{,}70801 +$$
$$+ 1{,}53248 \cdot 8{,}92147 - 1{,}66867 \cdot 1{,}95801)P = -1{,}5175P.$$

Elemento da; $s_{ad} = 0{,}5$; $\lambda_{da} = 2{,}00$. El origen de coordenadas está en el extremo izquierdo. Los parámetros iniciales son: $y\,(0) =$

$= 0;\ y'(0) = 0;$

$$M(0) = \frac{2EJ}{4}\mu_2(2{,}00)\,Z_1 = \frac{EJ}{2}\,1{,}05922\cdot 0{,}52654\,\frac{P}{EJ} = 0{,}278861P;$$

$$Q(0) = -\frac{6EJ}{4^2}\,\varepsilon_2(2{,}00)\,Z_1 = -\frac{6EJ}{16}\,1{,}08572\cdot 0{,}52654\,\frac{P}{EJ} =$$

$$= -0{,}214378P.$$

La ecuación de la línea elástica de acuerdo con (5.66) es:

$$y(z) = -\frac{0{,}278861P}{0{,}5^2EJ}\,C_{sz} + \frac{0{,}214378P}{0{,}5^2EJ}\,D_{sz} =$$

$$= -\frac{1{,}115444P}{EJ}\,C_{sz} + 1{,}715024\,\frac{P}{EJ}\,D_{sz}.$$

Verificación:

$$y(4) = -1{,}115444\,\frac{P}{EJ}\,2{,}08918 + 1{,}715024\,\frac{P}{EJ}\,1{,}35878 =$$

$$= -2{,}330363\,\frac{P}{EJ} + 2{,}330340\,\frac{P}{EJ} \approx 0.$$

La ecuación de la derivada de la línea elástica es:

$$y'(z) = -0{,}557722\,\frac{P}{EJ}\,B_{sz} + 0{,}857512\,\frac{P}{EJ}\,C_{sz}.$$

Verificación:

$$y'(4) = -0{,}557722\,\frac{P}{EJ}\,2{,}26808 + 0{,}857512\,\frac{P}{EJ}\,2{,}089180 =$$

$$= 0{,}5265388\,\frac{P}{EJ} \approx Z_1 = 0{,}526536\,\frac{P}{EJ}.$$

La ecuación de los momentos flectores según (5.68) es:

$$M(z) = 0{,}278861PA_{sz} - \frac{0{,}214378}{0{,}5}\,PB_{sz}.$$

Basándose en esta ecuación:

$$z = 0;\quad sz = 0;\quad M(0) = 0{,}2789P;$$
$$z = 2;\quad sz = 1;\quad M(2) = -0{,}1418P;$$
$$z = 4;\quad sz = 2;\quad M(4) = -0{,}5059P.$$

Elemento ca; $s_{ca} = 0{,}3$; $\lambda_{ca} = 1{,}2$.

El origen de coordenadas está en el extremo inferior del montante. Las condiciones iniciales son:

$$y(0) = 0;\quad y'(0) = 0;$$

$$M(0) = \frac{2EJ}{4}\,1{,}00744\cdot 0{,}52654\,\frac{P}{EJ} = 0{,}265229P;$$

$$Q(0) = -\frac{6EJ}{4^2}\,1{,}01075\cdot 0{,}52654\,\frac{P}{EJ} = -0{,}199575P.$$

A base de estos datos:

$$y(z) = -2{,}946989\frac{P}{EJ}C_{sz} + 7{,}391667\frac{P}{EJ}D_{sz};$$

$$y'(z) = -0{,}884097\frac{P}{EJ}B_{sz} + 2{,}21750\frac{P}{EJ}C_{sz}.$$

Las verificaciones han dado los resultados:

$$y(4) = (-2{,}134062 + 2{,}134048)\frac{P}{EJ} \approx 0;$$

$$y'(4) = 0{,}526542\frac{P}{EJ} \approx Z_1 = 0{,}526536\frac{P}{EJ};$$

$$M(z) = 0{,}265229PA_{sz} - 0{,}66525PB_{sz};$$

$z = 0;$ $M(0) = 2{,}2652P;$
$z = 2;$ $sz = 0{,}6;$ $M(2) = -0{,}1329P;$
$z = 4;$ $sz = 1{,}2;$ $M(4) = -0{,}5239P.$

El diagrama de momentos flectores está construida en la fig. 166, *a*.

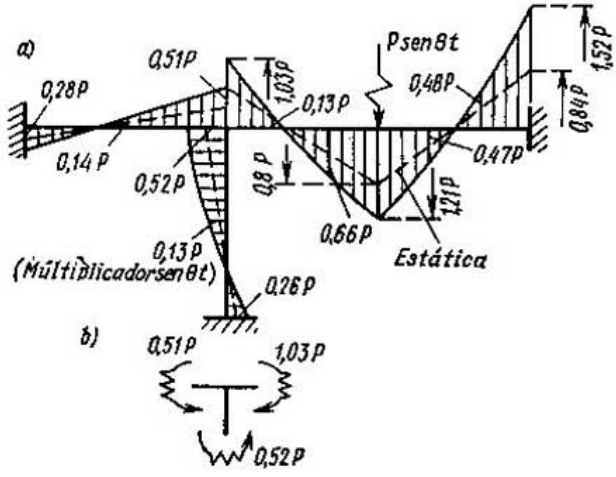


Fig. 166

Verifiquemos el equilibrio del nudo (fig. 166, *b*):

$$-0{,}5059P - 0{,}5239P + 1{,}0298\,P = 0.$$

En la fig. 166, *a* por medio de línea punteada se muestra el diagrama debido a la fuerza estática P. Los cálculos se han ejecutado con excesiva exactitud para mostrar resultados más exactos de las verificaciones.

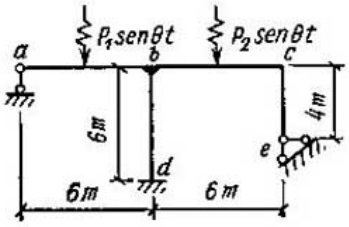


Fig. 167

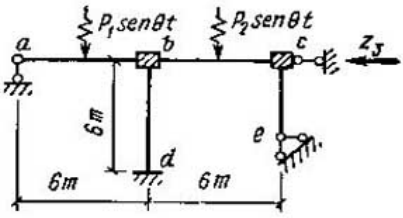


Fig. 168

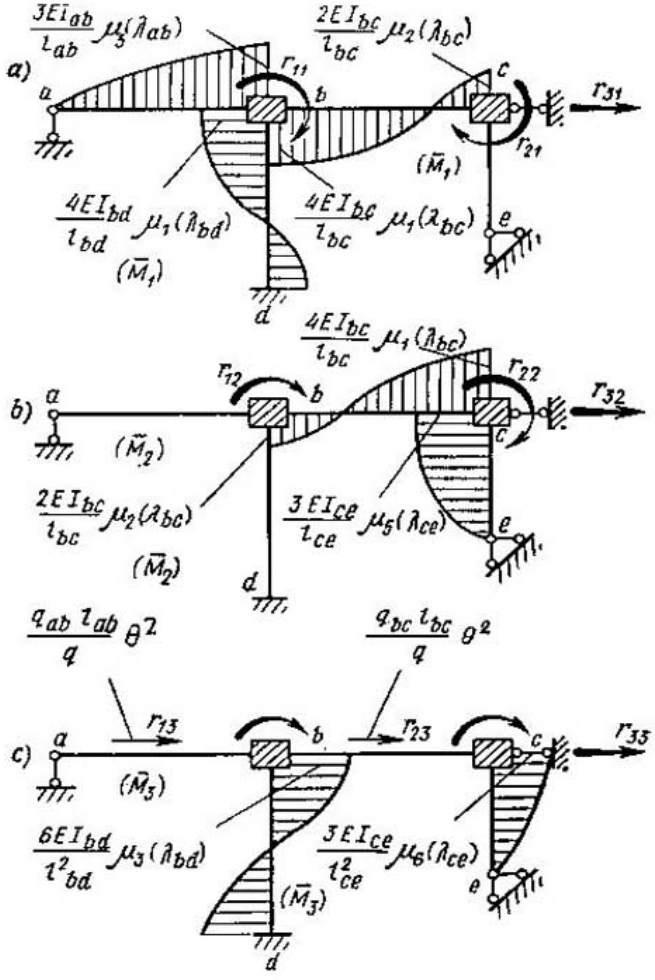


Fig. 169

Ejemplo 55. Escribir las ecuaciones canónicas para el cálculo del pórtico representado en la fig. 167. El sistema fundamental se da en la fig. 168. Las ecuaciones canónicas son:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1p} = 0,$$
$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2p} = 0;$$
$$r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3p} = 0.$$

Los desplazamientos unitarios y los diagramas referentes a éstas se muestran en la fig. 169. Los trazos de los diagramas se toman aproximados por cuanto para el problema planteado tienen importancia sólo sus ordenadas finales.

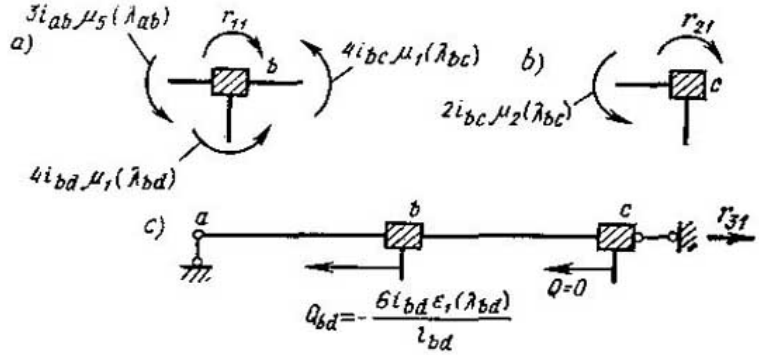


Fig. 170

Los datos necesarios para el cálculo son:

$$s^4_{ab} = \frac{m_{ab}\theta^2}{EJ_{ab}}; \quad s^4_{bc} = \frac{m_{bc}\theta^2}{EJ_{bc}};$$
$$s^4_{bd} = \frac{m_{bd}\theta^2}{EJ_{bd}}; \quad s^4_{ce} = \frac{m_{ce}\theta^2}{EJ_{ce}};$$
$$\lambda_{ab} = s_{ab}l_{ab}; \quad \lambda_{bc} = s_{bc}l_{bc};$$
$$\lambda_{bd} = s_{bd}l_{bd}; \quad \lambda_{ce} = s_{ce}l_{ce}.$$

Los coeficientes de las ecuaciones canónicas se determinan basándose en las condiciones de equilibrio de los nudos y vigas de refuerzo cortados.

Los nudos y la viga de refuerzo en el primer estado unitario (fig. 169, *a*) se muestran en la fig. 170. De la condición de equilibrio se deduce que:

$$r_{11} = 3i_{ab}\mu_5(\lambda_{ab}) + 4i_{bc}\mu_1(\lambda_{bc}) + 4i_{bd}\mu_1(\lambda_{bd}), \quad \text{(fig. 170, } a\text{)}$$

donde $i = \frac{EJ}{l}$;

$$r_{21} = 2i_{bc}\mu_2(\lambda_{bc}); \quad \text{(fig. 170, } b\text{)}$$

$$r_{31} = -\frac{6i_{bd}}{l_{bd}}\varepsilon_1(\lambda_{bd}) = -\frac{6i_{bd}}{l_{bd}}\mu_3(\lambda_{bd}). \quad \text{(fig. 170, } c\text{)}$$

De modo análogo en el segundo estado unitario (fig. 169, *b* y fig. 171) tenemos:

$$r_{12} = 2i_{bc}\mu_2(\lambda_{bc}) = r_{12}; \quad \text{(fig. 171, } a\text{)}$$

$$r_{22} = 4i_{bc}\mu_1(\lambda_{bc}) + 3i_{ce}\mu_5(\lambda_{ce}); \quad \text{(fig. 171, } b\text{)}$$

$$r_{32} = -\frac{3i_{ce}}{l_{ce}}\varepsilon_5(\lambda_{ce}) = -\frac{3i_{ce}}{l_{ce}}\mu_6(\lambda_{ce}). \quad \text{(fig. 171, } c\text{)}$$

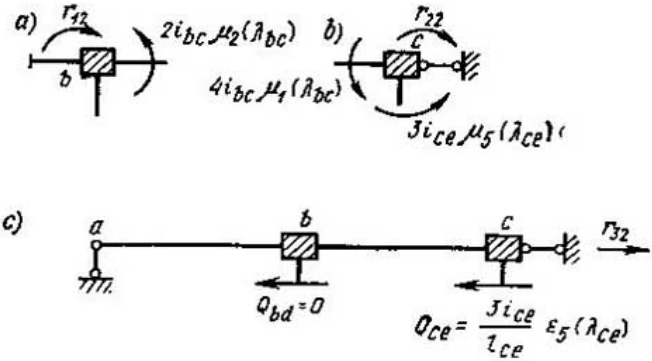


Fig. 171

Lo mismo, en el estado unitario tercero (figs. 169, *c* y 172):

$$r_{13}=-\frac{6i_{bd}}{l_{bd}}\mu_3(\lambda_{bd})=r_{31}; \qquad \text{(fig. 172, } a\text{)}$$

$$r_{23}=-\frac{3i_{ce}}{i_{ce}}\mu_6(\lambda_{ce})=r_{32}; \qquad \text{(fig. 172, } b\text{)}$$

$$r_{33}=[12i_{bd}\varepsilon_3(\lambda_{bd}):l_{bd}^2]+[3i_{ce}\varepsilon_6(\lambda_{ce}):l_{ce}^2]-\left[\frac{q_{ab}l_{ab}}{g}+\frac{q_{bc}l_{bc}}{g}\right]\theta^2. \qquad \text{(fig. 172, } c\text{)}$$

La representación aproximada del diagrama de carga se da en la fig. 173, *a*, mientras que los nudos y la viga de refuerzo cortados se muestran en la fig. 173, *b* —*d*. Partiendo de la condición de equilibrio, obtenemos:

$$R_{1p}=M_{P_1}-M_{P_2}=-$$

$$=-\frac{P_1}{s}\,\frac{B_\lambda D_{\lambda/2}-D_\lambda B_{\lambda/2}}{B_\lambda C_\lambda-A_\lambda D_\lambda}+\frac{P_2}{s}\,\frac{C_\lambda D_{\lambda/2}-D_\lambda C_{\lambda/2}}{C_\lambda^2-B_\lambda D_\lambda}; \qquad \text{(fig. 173, } b\text{)}$$

$$R_{2p}=M_{P_2}=-\frac{P_2}{s}\,\frac{C_\lambda D_{\lambda/2}-D_\lambda C_{\lambda/2}}{C_\lambda^2-B_\lambda D_\lambda}; \qquad \text{(fig. 173, } c\text{)}$$

$$R_{3p}=0. \qquad \text{(fig. 173, } d\text{)}$$

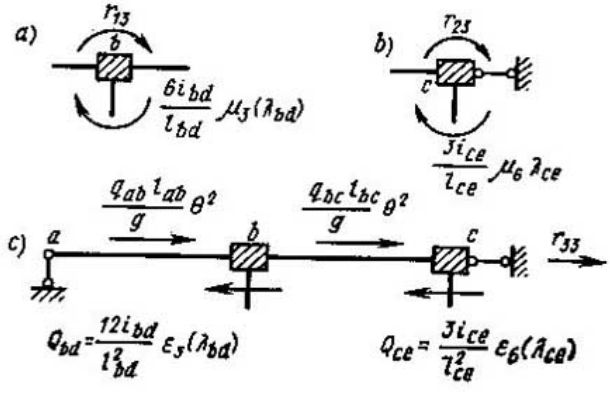


Fig. 172

Todos los coeficientes y términos independientes de las ecuaciones canónicas han sido hallados.

Ejemplo 56. Determinar las primeras frecuencias de oscilaciones propias del pórtico y trazar el diagrama de momentos flectores debidos a la fuerza de

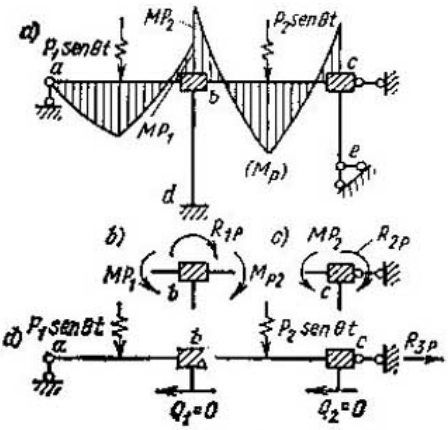


Fig. 173

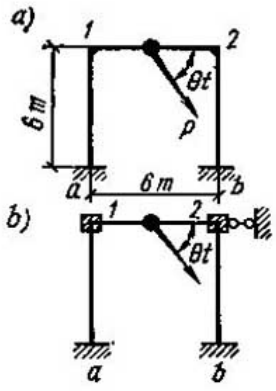


Fig. 174

rotación P (fig. 174, *a*), siendo los datos: la rigidez de todos los elementos $EJ = 4 \cdot 10^7$ N·m², el peso de cada uno de los elementos con carga uniforme es 78 480 N, la frecuencia de la carga actuante $\theta = 10$ s^{-1}. La masa del elemento

$$M = 78\,480 - 9{,}81 = 8000 \text{ kg}.$$

La masa lineal es: $m = M : l = 8000 : 6$ kg/m.

Ejecutamos la resolución por el método de desplazamientos El sistema fundamental se da en la fig. 174, *b*.

1. OSCILACIONES PROPIAS

En los sistemas simétricos las oscilaciones propias se dividen en simétricas y antisimétricas. Por este motivo realizamos la determinación de éstas por separado.

a) *Oscilaciones simétricas.* Durante las oscilaciones simétricas no tiene lugar el desplazamiento lineal de los nudos, mientras que los ángulos de giro de los nudos *1* y *2* son iguales y simétricos (o sea, de signos contrarios). Tomamos por incógnita Z_1 el giro simétrico simultáneo de estos nudos. La ecuación canónica será:

$$r_{11} Z_1 = 0.$$

Con Z_1 diferentes a cero, es necesario que sea $r_{11} = 0$. Partiendo del equilibrio del primer nudo cortado en estado unitario (fig. 175) y de los datos de la tabla 6, obtenemos:

$$\frac{r_{11}}{2} = \frac{4EJ}{6} \mu_1 (\lambda_{a-1}) + \frac{4EJ}{6} \mu_1 (\lambda_{1-2}) \quad \frac{2EJ}{6} \mu_2 (\lambda_{1-2}). \qquad (a)$$

Como los elementos del pórtico son idénticos, entonces, $\lambda_{a-1} = \lambda_{1-2} = \lambda_{b-2} = \lambda$.

Para que sea $Z_1 \neq 0$, es necesario r_{11} igualarlo a cero, o sea,

$$\frac{4EJ}{6} \mu_1 (\lambda) + \frac{4EJ}{6} \mu_1 (\lambda) - \frac{2EJ}{6} \mu_2 (\lambda) = 0$$

$$4\mu_1(\lambda) - \mu_2(\lambda) = 0. \qquad (a^*)$$

Calculemos el primer miembro de esta igualdad con ciertos valores de λ:

1) $\lambda = 3{,}50$; $4 \cdot 0{,}5126 - 1{,}7896 = 0{,}2608 > 0$;
2) $\lambda = 3{,}52$; $4 \cdot 0{,}4970 - 1{,}8164 = 0{,}1716 > 0$,
3) $\lambda = 3{,}54$; $4 \cdot 0{,}4808 - 1{,}8444 = 0{,}0788 > 0$;
4) $\lambda = 3{,}56$; $4 \cdot 0{,}4640 - 1{,}8734 = -0{,}0174 < 0$.

En la fig. 176 está trazado el gráfico, a base del cual obtenemos el valor

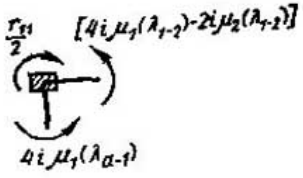


Fig. 175

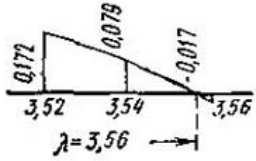


Fig. 176

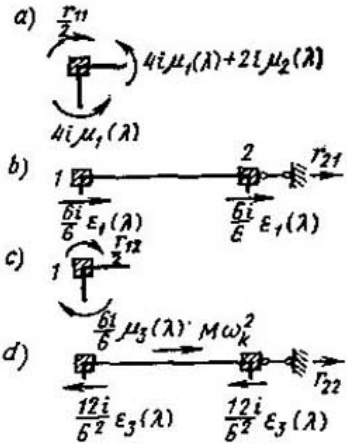


Fig. 177

buscado de la primera raíz de la ecuación (a*) $\lambda \approx 3{,}556$. Por analogía se determina la segunda raíz $\lambda \approx 7{,}43$. De acuerdo con la fórmula (9.27)

$$\omega = \frac{\lambda^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

Numéricamente será:

$$\omega = \frac{\lambda^2}{6^2}\sqrt{\frac{4 \cdot 10^7}{8000/6}} = (\lambda^2 \cdot 10^2\sqrt{3} : 36)\ \text{s}^{-1}.$$

Para el caso de que se trata:

$$\omega_1 = \frac{3{,}556^2 \cdot 10^2}{36}\sqrt{3} = 60{,}6\ \text{s}^{-1};$$

$$\omega_3 = \frac{7{,}43^2 \cdot 10^2}{36}\sqrt{3} = 265{,}6\ \text{s}^{-1}.$$

En dicho ejemplo las oscilaciones simétricas también son posibles con el valor trivial de la incógnita Z_1, igual a cero, lo cual corresponde a las oscilaciones del sistema fundamental. En este caso cada uno de los elementos del pórtico se convierte en una viga empotrada en ambos extremos, y la primera frecuencia de semejantes oscilaciones según (6.10) será:

$$\omega_2 = \frac{4{,}73^2 \cdot 10^2}{36}\sqrt{3} = 107{,}64\ \text{s}^{-1}.$$

b) *Oscilaciones antisimétricas.* Tomamos por incógnita Z_1 el ángulo de giro simultáneo de los nudos *1* y *2* en una dirección en sentido horario, mientras que por incógnita Z_2, desplazamiento lineal de éstos por la horizontal.

Las ecuaciones canónicas son:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 = 0;$$
$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 = 0.$$

Con Z_1 y Z_2 diferentes a cero, es necesario que

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Partiendo de los equilibrios de las partes cortadas del pórtico en el primer estado unitario con el giro de los nudos según la tabla 6 tenemos:

a) partiendo del equilibrio del primer nudo cortado (fig. 177, *a*):

$$\frac{r_{11}}{2} = 4i\mu_1(\lambda) + [4i\mu_1(\lambda) + 2i\mu_2(\lambda)]; \qquad (b)$$

b) partiendo del equilibrio de la viga de refuerzo cortada (fig. 177,*b*):

$$r_{21} = \left[-\frac{6i}{6}\varepsilon_1(\lambda) \right] 2 = \left[-\frac{6i}{6}\mu_3(\lambda) \right] 2. \qquad (c)$$

Basándose en los equilibrios de las partes cortadas del pórtico en el segundo estado unitario con el desplazamiento lineal tenemos:

a) basándose en el equilibrio del primer nudo cortado (fig. 177, *c*):

$$\frac{r_{12}}{2} = -\frac{6i}{6}\mu_3(\lambda); \qquad (d)$$

b) basándose en el equilibrio de la dintel cortada (fig. 177, d):

$$r_{22} = 2\frac{12i}{6^2}\varepsilon_3'(\lambda) - M\omega_k^2; \qquad (e)$$

aquí según (9.27), siendo $M = ml$, tenemos:

$$M\omega_k^2 = \frac{i\lambda^4}{36}. \qquad (f)$$

Ahora el determinante D será:

$$D = \begin{vmatrix} [16i\mu_1(\lambda) + 4i\mu_2(\lambda)] & -2i\varepsilon_1(\lambda) \\ -2i\varepsilon_1(\lambda) & \left[\frac{2i}{3}\varepsilon_3(\lambda) - \frac{i\lambda^4}{36} \right] \end{vmatrix} = 0.$$

Después de las simplificaciones

$$[4\mu_1(\lambda) + \mu_2(\lambda)][24\varepsilon_3(\lambda) - \lambda^4] - 36\varepsilon_1^2(\lambda) = 0.$$

Mediante la elección, determinamos $\lambda = 1{,}79$.

La primera frecuencia de las oscilaciones antisimétricas es:

$$\omega_1 = \frac{1{,}79^2 \cdot 10^2}{36}\sqrt{3} = 15{,}42\ s^{-1}.$$

La primera frecuencia de las oscilaciones antisimétricas es la frecuencia mínima (fundamental) de las oscilaciones naturales del pórtico.

2. OSCILACIONES FORZADAS

Las oscilaciones forzadas simétricas y antisimétricas las examinamos también por separado.

a) *Oscilaciones simétricas causadas por la componente vertical de la fuerza.* La característica básica es:

$$s = \sqrt[4]{\frac{m\theta^2}{EJ}} = \sqrt[4]{\frac{\frac{8000}{6}10^2}{4\cdot 10^7}} = 0{,}24 \text{ m}^{-1}.$$

Respectivamente $\lambda = sl = 0{,}24 \cdot 6 = 1{,}44$.

Por incógnita Z_1 tomamos el giro simétrico simultáneo de los nudos *1* y *2*. La ecuación canónica es:

$$r_{11}Z_1 + R_{1p} = 0.$$

Según la fórmula (a) de este ejemplo, siendo $\lambda = 1{,}44$, tenemos:

$$\frac{r_{11}}{2} = 4i\ 0{,}98969 + 4i\ 0{,}98969 - 2i\ 1{,}01550 = 5{,}588652\ i;$$

$$\frac{R_{1p}}{2} = M_{(1-2)p}(0).$$

Según la fórmula (6,82),

$$M_{(1-2)p}(0) = \frac{P}{0{,}24}\ \frac{1{,}04919 \cdot 0{,}06223 - 0{,}50021 \cdot 0{,}25939}{1{,}04919^2 - 1{,}49167 \cdot 0{,}50021} = -0{,}75730P.$$

La ecuación canónica en forma numérica:

$$11{,}77304\,iZ_1 - 1{,}51460P = 0. \text{ De aquí } Z_1 = 0{,}12865P/i.$$

Trazamos el diagrama de momentos flectores.

Elemento 1—2. Los parámetros iniciales son: $y(0) = 0$; $y'(0) = Z_1$;

$$M(0) = [4i\mu_1(1{,}44) - 2i\mu_2(1{,}44)]\,Z_1 + M_{(1-2)p}(0).$$

O bien

$$M(0) = (4i\ 0{,}98969 - 2i\ 1{,}01550)\ 0{,}12865\ P/i - 0{,}75730\ P = -0{,}50929\ P$$

$$Q(0) = \frac{6i}{l}[-\varepsilon_1(1{,}44) + \varepsilon_2(1{,}44)]\,Z_1 + Q_{(1-2)p}(0).$$

De acuerdo con la fórmula (6.83),

$$Q_{(1-2)p}(0) = P\ \frac{1{,}04919 \cdot 0{,}25939 - 1{,}49167 \cdot 0{,}06223}{1{,}04919^2 - 1{,}49167 \cdot 0{,}50021} = 0{,}50561P.$$

Ahora

$$Q(0) = i\,(-0{,}96222 + 1{,}02241)\ 0{,}12865\ P/i + 0{,}50561\ P = 0{,}51335\ P.$$

La ecuación de momentos flectores, según (5.68) y (5.72) es:

$$M(z) = -\lambda i\ 0{,}12865\frac{P}{i}D_{sz} - 0{,}50929PA_{sz} +$$

$$+ \frac{0{,}51335P}{0{,}24}B_{sz}\Big|_0^{l/2} - \frac{P}{0{,}24}B_{s(z-l/2)}\Big|_{l/2}^{l}.$$

Tras unas cuantas simplificaciones,

$$M(z) = -0{,}18526PD_{sz} - 0{,}50929PA_{sz} + 2{,}13895PB_{sz}\Big|_0^{l/2} - 4{,}16667PB_{s(z-l/2)}\Big|_{l/2}^{l}.$$

De acuerdo con esta ecuación:

$$M\ (0) = -0{,}50929P;\quad M\ (l/4) = 0{,}25904P;\quad M\ (l/2) = 1{,}01718P;$$
$$M\ (3l/4) = 0{,}25892P;\quad (M\ (l) = -0{,}50954P.$$

Como verificación de la ecuación sirve la coincidencia de momentos en las secciones simétricas.

Elemento a—1. El origen de coordenadas está en el punto *a*. Los parámetros iniciales son: $y\ (0) = 0;\ y'\ (0) = 0;$

$$M\ (0) = 2i\ \mu_2\ (1{,}44)\ Z_1 = 2i\ 1{,}01550 \cdot 0{,}12865P/i = 0{,}26129P;$$

$$Q\ (0) = -\frac{6i}{l}\ \varepsilon_2\ (1{,}44)\ Z_1 = -i\ 1{,}02241 \cdot 0{,}12865P/l = -0{,}13153P.$$

La ecuación de momentos flectores es:

$$M\ (z) = 0{,}26129PA_{sz} - 0{,}54805PB_{sz};$$
$$M\ (0) = 0{,}26129P;\quad M\ (l/4) = 0{,}06415P;\quad M\ (l/2) = -0{,}13126P;$$
$$M\ (3l/4) = -0{,}32250P;\quad M\ (l) = -0{,}50929P.$$

Basándose en los datos obtenidos, está construido el diagrama de momentos en la fig. 178, *a*.

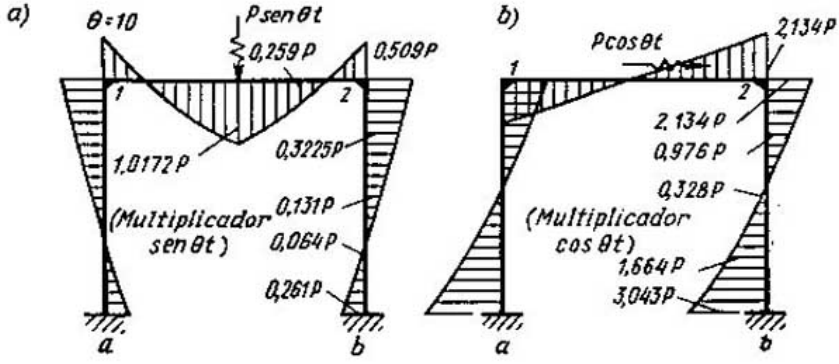


Fig. 178

b) *Oscilaciones antisimétricas causadas por la componente horizontal de la fuerza P* cos θ*t*. Consideramos como incógnita Z_1 el giro simultáneo de los nudos *1* y *2* en sentido horario y, como incógnita Z_2, el desplazamiento horizontal de éstos.

Las ecuaciones canónicas son:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0;$$
$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0.$$

De acuerdo con la expresión (b) para $\lambda = 1{,}44$ tenemos:

$$\frac{r_{11}}{2} = 4i\ 0{,}98969 + 4i\ 0{,}98969 + 2i\ 1{,}01550 = 9{,}94852\ i.$$

Según la expresión (c),

$$\frac{r_{21}}{2} = -\frac{6i}{6}\ \varepsilon_1\ (1{,}44) = -0{,}96222\ i.$$

De acuerdo con la expresión (d),

$$\frac{r_{12}}{2} = -\frac{6i}{6}\,\mu_3\,(1{,}44) = -0{,}96222\ i.$$

De acuerdo con la expresión (e) con la sustitución de $M\omega_R^2$ por $M\theta^2$ tenemos:

$$r_{22} = 2\,\frac{12i}{6^2}\,\varepsilon_3\,(\lambda) - M\theta^2 = 2\,\frac{i}{3}\,0{,}86634 - 0{,}12\ i = 0{,}45756\ i.$$

$$\text{Aquí } 0{,}12\ i = M\theta^2 = 8000 \cdot 10^2\ i\,\frac{6}{4 \cdot 10^7};$$

$$R_{1p} = 0; \quad R_{2p} = -P.$$

Las ecuaciones canónicas en forma numérica son:

$$19{,}89704\ iZ_1 - 1{,}92444\ iZ_2 = 0;$$

$$-1{,}92444\ iZ_1 + 0{,}45756\ iZ_2 - P = 0.$$

De aquí $Z_1 = 0{,}356337\ P/i$; $Z_2 = 3{,}684218\ P/i$. Construimos el diagrama de momentos flectores.

Elemento 1—2. Los parámetros iniciales son $y\,(0) = 0$, $y'\,(0) = Z_1$;

$$M\,(0) = [4i\mu_1\,(1{,}44) + 2i\mu_2\,(1{,}44)]\,Z_1 =$$

$$= (4i \cdot 0{,}98969 + 2i \cdot 1{,}01550)\,0{,}356337\,\frac{P}{i} = 2{,}134373\ P;$$

$$Q\,(0) = \left[-\frac{6i}{6}\,\varepsilon_1\,(1{,}44) - \frac{6i}{6}\,\varepsilon_2\,(1{,}44)\right] Z_1 =$$

$$= -i\,(0{,}96222 + 1{,}02241)\,0{,}356337 = -0{,}707197\ P.$$

La ecuación de momentos flectores, en concordancia con (5.68) y (5.72) es:

$$M\,(z) = -\lambda i Z_1 D_{sz} + 2{,}134373\ PA_{sz} - (0{,}707197\ P : 0{,}24)\,B_{sz}.$$

Al realizar ciertas simplificaciones y sustituciones

$$M\,(z) = -0{,}513125\ PD_{sz} + 2{,}134373\ PA_{sz} - 2{,}946654\ PB_{sz}.$$

De acuerdo con esta ecuación:

$$M\,(0) = 2{,}134373\ P; \quad M\left(\frac{l}{4}\right) = 1{,}070932\ P;$$

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = (-2{,}158267\ P + 2{,}158278\ P) \approx 0;$$

$$M\left(\frac{3l}{4}\right) = -1{,}070932\ P; \quad M\,(l) = -2{,}134373\ P.$$

Los momentos flectores en las secciones simétricas son iguales por su magnitud y contrarios por su signo, lo cual sirve de verificación para la ecuación de momentos.

Elemento a—1. El origen de coordenadas está en el punto a. Los parámetros iniciales son $y\,(0) = 0$, $y'\,(0) = 0$;

$$M\,(0) = 2i\mu_2\,(1{,}44)\,Z_1 - \frac{6i}{6}\,\mu_4\,(1{,}44)\,Z_2 =$$

$$= 2i \cdot 1{,}01550 \cdot 0{,}356337\,\frac{P}{i} - i \cdot 1{,}02241 \cdot 3{,}684218\,\frac{P}{i} = -3{,}043061\ P;$$

$$Q\,(0) = -\frac{6i}{6}\,\varepsilon_2\,(1{,}44)\,Z_1 + \frac{12i}{6^2}\,\varepsilon_4\,(1{,}44)\,Z_2 =$$

$$= -i \cdot 1{,}02241 \cdot 0{,}356367\,\frac{P}{i} + \frac{i}{3}\,1{,}04658 \cdot 3\,684218\,\frac{P}{i} = 0{,}920953\ P.$$

La ecuación de momentos flectores es:

$$M(z) = -3{,}043061\ PA_{sz} + 3{,}837304\ PB_{sz}.$$

De aquí,

$$M(0) = -3{,}043061\ P;\ M(l/4) = -1{,}663570\ P;$$

$$M(l/2) = -0{,}328106\ P;\quad M(3l/4) = 0{,}975601\ P;\quad M(l) = 2{,}134335\ P.$$

Según la condición de equilibrio del primer nudo tendremos la ecuación,

$$2{,}134335\ P - 2{,}134373\ P \approx 0.$$

Con el fin de verificar el equilibrio del dintel cortado, componemos la ecuación de fuerzas transversales en forma de derivada de la ecuación de momentos flectores:

$$Q(z) = -0{,}730335\ PD_{sz} + 0{,}920953\ PA_{sz}.$$

De acuerdo con esta ecuación

$$Q(l) = -0{,}730335\ P \cdot 0{,}50021 + 0{,}920953\ P \cdot 1{,}17962 = 0{,}721054\ P.$$

La condición de equilibrio de la viga de refuerzo cortada es

$$\Sigma X = -2Q(l) + P + J^* = 0;$$

$$J^* = M\theta^2 Z_2 = 0{,}12\ i \cdot 3{,}684218 \frac{P}{i} = 0{,}442106\ P.$$

Ahora

$$\Sigma X = -2 \cdot 0{,}721054\ P + P + 0{,}442106\ P = -1{,}442108\ P + 1{,}442106 P \approx 0.$$

Como se ve, una pequeña precisión de los cálculos durante la acción de la carga horizontal ha conducido a buenos resultados de las verificaciones. El diagrama de los momentos está representado en la fig. 178, *b*.

§ 80. DETERMINACIÓN DE LAS FORMAS PRINCIPALES DE OSCILACIONES LIBRES DE LOS PÓRTICOS POR EL MÉTODO DE DESPLAZAMIENTOS.

Examinemos un pórtico cuyos elementos tienen una rigidez EJ longitudinal constante y una masa m

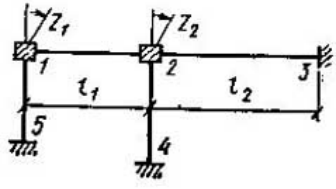


Fig. 179

distribuida. Su sistema fundamental se da en la fig. 179. Las ecuaciones canónicas serán:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 = 0;$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 = 0.$$

De aquí tenemos:

$$Z_2 : Z_1 = -\frac{r_{11}}{r_{12}} = -\frac{r_{21}}{r_{22}}. \qquad (9.40)$$

Examinemos el elemento del pórtico *1—2*. Coloquemos el origen de coordenadas en su extremo izquierdo. La ecuación de la línea elástica, de acuerdo con (5.51), es

$$y_k(z) = Z_1 \frac{B_{s_k z}}{s_k} - \frac{M(0)}{s_k^2 EJ} C_{s_k z} - \frac{Q(0)}{s_k^3 EJ} D_{s_k z}. \qquad (9.41)$$

De acuerdo a este criterio hallamos:

$$y'_k(z) = Z_1 A_{s_k z} - \frac{M(0)}{s_k EJ} B_{s_k z} - \frac{Q(0)}{s_k^2 EJ} C_{s_k z}. \qquad (9.42)$$

Las condiciones de frontera en el extremo derecho del elemento son:

$$y_k(l_1) = Z_1 \frac{B_{s_k l_1}}{s_k} - \frac{M(0)}{s_k^2 EJ} C_{s_k l_1} - \frac{Q(0)}{s_k^3 EJ} D_{s_k l_1} = 0;$$

$$y'_k(l_1) = Z_1 A_{s_k l_1} - \frac{M(0)}{s_k EJ} B_{s_k l_1} - \frac{Q(0)}{s_k^2 EJ} C_{s_k l_1} = Z_2.$$

Dividimos entre Z_1:

$$\frac{B_{s_k l_1}}{s_k} - \frac{M(0)}{Z_1} \frac{C_{s_k l_1}}{s_k^2 EJ} - \frac{Q(0)}{Z_1} \frac{D_{s_k l_1}}{s_k^3 EJ} = 0;$$

$$A_{s_k l_1} - \frac{M(0)}{Z_1} \frac{B_{s_k l_1}}{s_k EJ} - \frac{Q(0)}{Z_1} \frac{C_{s_k l_1}}{s_k^2 EJ} = \frac{Z_2}{Z_1}. \qquad (9.43)$$

Al solucionar estas ecuaciones, hallamos $M(0)/Z_1$ y $Q(0)/Z_1$, los cuales serán expresados mediante $Z_2/Z_1 = -\frac{r_{11}}{r_{12}}$. Entonces, la ecuación de la línea elástica (9.41) puede escribirse así:

$$y_k(z) = Z_1 \left(\frac{B_{s_k z}}{s_k} - \frac{M(0)}{Z_1} \cdot \frac{C_{s_k z}}{s_k^2 EJ} - \frac{Q(0)}{Z_1} \frac{D_{s_k z}}{s_k^3 EJ} \right). \qquad (9.44)$$

Precisamente ésta será la ecuación del elemento *1—2* en su forma principal correspondiente a la frecuencia ω_k^2. Por analogía se hallan las formas principales de otros elementos.

§ 81. MÉTODOS APROXIMADOS DE CÁLCULO DE LOS PÓRTICOS. Todos los métodos aproximados de cálculo dinámico de las vigas, expuestos anteriormente, también son aplicables en una u otra medida para el cálculo de los pórticos. Aquí concentramos nuestra atención en la aplicación del método de sustitución de las masas distribuidas por las concentradas, es decir, en la reducción del sistema con grado de libertad infinito al sistema con grado finito.

Recordemos que el cambio de las masas distribuidas por concentradas puede ejecutarse de modo diferente: bien cada elemento del pórtico se divide no menos que en dos partes y las masas concentradas, que son las magnitudes de masas en el tramo dado, se sitúan

en el centro de gravedad de las masas distribuidas de dicho tramo (fig. 180, *a*), o bien estas masas se distribuyen según la ley de palanca en las fronteras de división del elemento, donde se concentran (180, *b*). El segundo procedimiento de cambio de las masas distribuidas por concentradas nos dará, por regla, sistemas con menor número de grados de libertad, lo que quiere decir que es más sencillo que el primero. Sin embargo, es de esperar que la exactitud de cálculo será más precisa en el primer procedimiento. Es obvio que la exactitud, y con ella la complejidad de cálculo, crecen con el aumento del número de grados de libertad del sistema sustituidor.

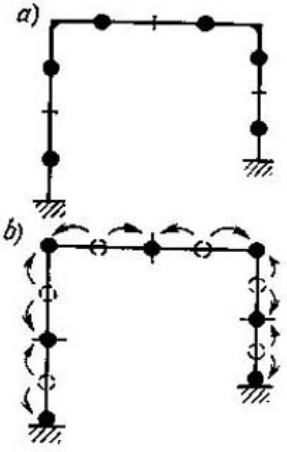


Fig. 180

La primera frecuencia en el sistema sustituidor se determina por lo común con un grado satisfactorio de precisión, lo cual no siempre puede decirsea cerca de las frecuencias superiores, la diferencia de las cuales con los valores exactos, como regla, es mayor que en las primeras frecuencias.

Si se pide determinar las frecuencias superiores (por ejemplo, la segunda y la tercera) con un grado admisible de precisión, entonces, debemos tomar el sistema sustituidor por lo menos con tres o cuatro grados de libertad (aun mejor, con cuatro y cinco), respectivamente. En ciertos casos se puede prescindir de la influencia de pequeñas masas de algunos elementos y, por lo tanto, disminuir el número de grados de libertad, lo cual es conveniente sobre todo en la elaboración del anteproyecto, cuando se determina solamente el orden de valores de las frecuencias y en este caso no hay necesidad de una gran exactitud.

En los sistemas simétricos debemos examinar las oscilaciones simétricas y antisimétricas *por separado*, con ello el sistema se sustituye por las mitades (véase la fig. 62) o se aplica el método de desplazamientos pares.

Las ecuaciones canónicas para los cálculos dinámicos de los pórticos se escriben en concordancia con el capítulo 3. El desarrollo de la indeterminación estática para el cálculo de los coeficientes de ecuaciones canónicas se ejecuta por el método de fuerzas o por el método de desplazamientos, lo cual se ilustra con un ejemplo.

Ejemplo 57. Calcular aproximadamente el pórtico examinado en el ejemplo 56, a la acción de la fuerza de vibración aplicada en medio del dintel y determinar las frecuencias de oscilaciones simétricas naturales del pórtico.

Los datos para el cálculo son: $EJ = 4 \cdot 10^7$ N·m², es el peso completo de cada uno de los elementos con la carga $G = 78\,480$ N, la masa del elemento es $M = 8000$ kg.

Dividamos cada uno de los elementos del pórtico en dos pares y concentremos las masas en los puntos de división (fig. 181, *a*). El sistema sustituidor

tiene cuatro grados de libertad. Las formas aproximadas de oscilaciones se dan en la fig. 181, *b*, *c*, *d*, *e*, en las cuales las flechas indican las direcciones de movimiento de las masas. A cada una de las formas le corresponde su propia frecuencia.

A continuación examinamos sólo las oscilaciones simétricas, con las cuales las masas situadas en los nudos del pórtico no realizarán movimientos y, por

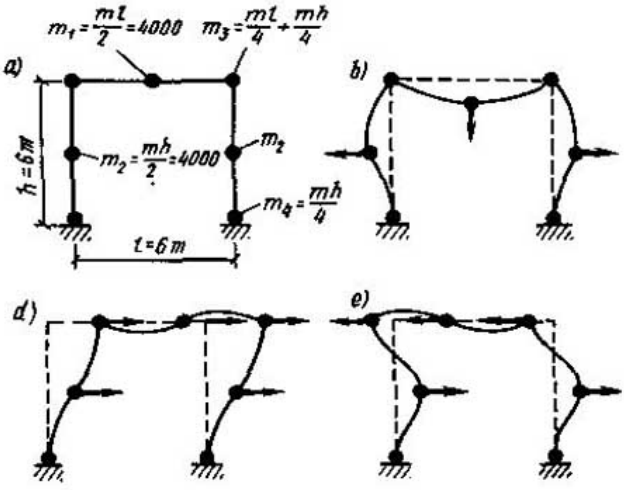


Fig. 181

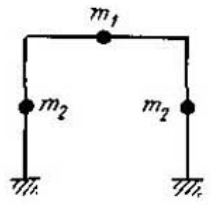


Fig. 182

lo tanto, pueden dejar de examinarse. Durante las oscilaciones simétricas sólo las masas m_1 y m_2 (fig. 182) estarán en movimiento.

MÉTODO DE DESPLAZAMIENTOS PARES

Por desplazamientos desconocidos de las masas tomaremos: y_1, el desplazamiento duplicado de la masa m_1 por la vertical, que es la suma de sus dos desplazamientos simétricos, e y_2, la suma de los desplazamientos horizontales de la masa m_2. En este caso todos los desplazamientos unitarios serán pares. Por consiguiente, de acuerdo con el § 27, debemos introducir en las ecuaciones las masas $m_1/4$ y $m_2/2$.

Oscilaciones libres. Las ecuaciones canónicas, según (4.1), son:

$$\left.\begin{aligned} -\delta_{11}\frac{m_1}{4}\omega_l^2 y_{1l}-\delta_{12}\frac{m_2}{2}\omega_l^2 y_{2l}+y_{1l}=0;\\ -\delta_{21}\frac{m_1}{4}\omega_l^2 y_{1l}-\delta_{22}\frac{m_2}{2}\omega_l^2 y_{2l}+y_{2l}=0.\end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Partiendo de (a), tenemos la siguiente ecuación de frecuencias:

$$\omega_l^4(\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}^2)\frac{m_1}{4}\frac{m_2}{2}-\omega_l^2\left(\delta_{11}\frac{m_1}{4}+\delta_{22}\frac{m_2}{2}\right)+1=0. \quad (b)$$

Para representar esta ecuación en forma numérica, debemos primeramente realizar el cálculo estático del pórtico a la acción de las

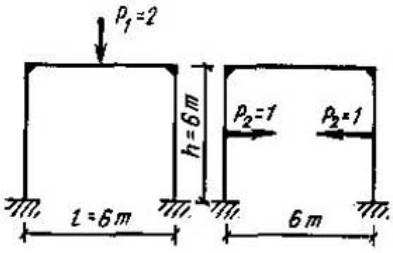


Fig. 183

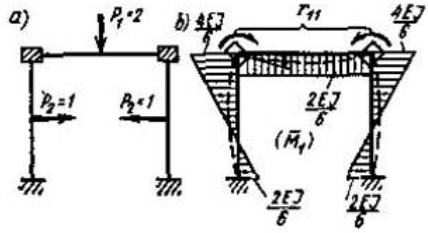


Fig. 184

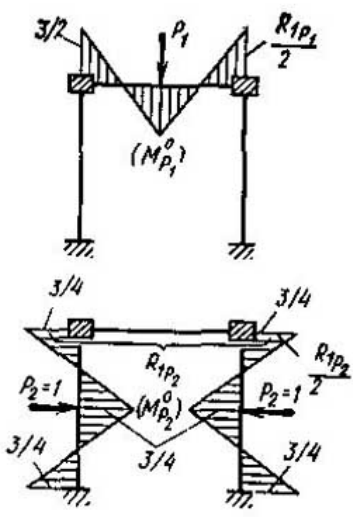


Fig. 185

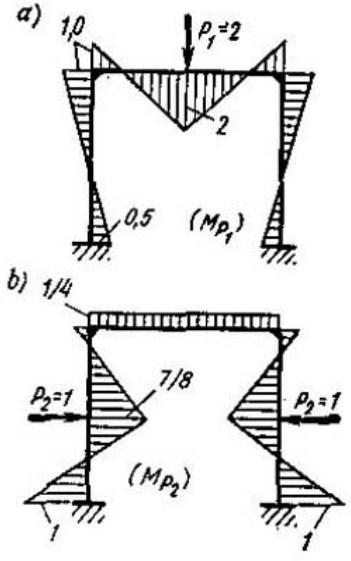


Fig. 186

fuerzas pares unitarias, indicadas en la fig. 183. Es cómodo aplicar el método de desplazamientos, admitiendo por incógnita Z_1, el desplazamiento par de grupo de los nudos del pórtico (fig. 184, *a*). La ecuación canónica es:

$$r_{11}Z_1 + R_{1p} = 0.$$

De la fig. 184, *b* tenemos que

$$r_{11} = 2\left(\frac{4EJ}{6} + \frac{6EJ}{6}\right) = 2EJ.$$

Los diagramas de carga se dan en la fig. 185. Partiendo de ellos tenemos:

1) debido a la carga vertical, $R_{1p} = -2\frac{3}{2} = -3$; la incógnita $Z_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = \frac{1,5}{EJ}$; el diagrama de momentos se aduce en la fig. 186, *a*;

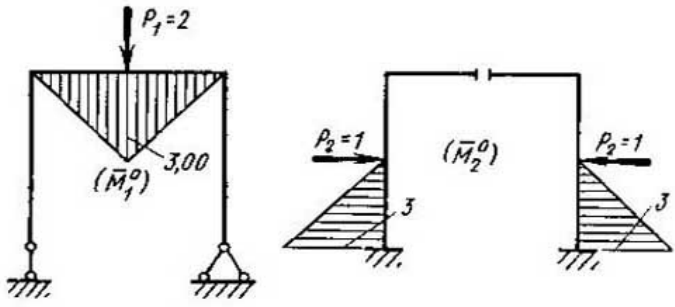


Fig. 187

2) debido a las fuerzas horizontales $R_{2p} = 2\frac{3}{4}P = \frac{3}{2}$; la incógnita $Z_1 = -\frac{0,75}{EJ}$; el diagrama de momentos está representado en la fig. 186, *b*.

Para la determinación de los desplazamientos pares δ_{11}, δ_{22} y δ_{12}, aplicamos las fuerzas unitarias pares al sistema estáticamente determinado (fig. 187). Mediante el procedimiento de «multiplicación» de los diagramas obtenemos:

$$\delta_{11} = (M_{P_1})(\bar{M}_1^0) = 9 : EJ; \quad \delta_{22} = (M_{P_2})(\bar{M}_2^0 =) 27 : 8\,EJ;$$
$$\delta_{12} = \delta_{21}(M_{P_2})(\bar{M}_1^0) = (M_{P_1})(\bar{M}_2^0) = -9 : 4\,EJ.$$

La ecuación de frecuencias (b) en forma numérica es:

$$\omega_i^4\left[\frac{9}{EJ}\frac{27}{8EJ} - \left(-\frac{9}{4EJ}\right)^2\right]\frac{4000}{4}\frac{4000}{2} -$$
$$-\omega_i^2\left(\frac{9}{EJ}\frac{4000}{4_1} + \frac{27}{8EJ}\frac{4000}{2}\right) + 1 = 0.$$

Resolviéndola obtenemos:

$$\omega_1^2 = 0,889 \cdot 10^{-4}\,EJ; \quad \omega_2^2 = 2,222 \cdot 10^{-4}\,EJ.$$

Tomando en consideración la rigidez de las barras, tendremos:

$$\omega_1 = \sqrt{4 \cdot 10^7 \cdot 0,889 \cdot 10^{-4}} = 59,6\ s^{-1};$$
$$\omega_2 = \sqrt{4 \cdot 10^7 \cdot 2,222 \cdot 10^{-4}} = 94,2\ s^{-1}.$$

Según el cálculo exacto (véase el ejemplo 56), $\omega_1 = 60,7\ s^{-1}$ y $\omega_2 = 265,5\ s^{-1}$.

Si prescindimos de las masas m_2 y reducimos el sistema al sistema con un solo grado de libertad, entonces, teniendo en cuenta que aquí δ_{11} es par merced a la fuerza par, de acuerdo con (2.17) obtenemos:

$$\omega^2 = \frac{1}{m_1\delta_{11} : 4} = \frac{1}{0,4 \cdot 2,25 : EJ} = \frac{4000}{0,9}; \quad \omega = \frac{200}{3} = 66,7\ s^{-1}.$$

Oscilaciones forzadas causadas por la carga P sen θt (fig. 188). Las ecuaciones canónicas son:

$$\left.\begin{aligned}\left(\delta_{11}\frac{m_1}{4}\theta^2-1\right)y_1+\delta_{12}\frac{m_2}{2}\theta^2y_2+\delta_{1p}P\operatorname{sen}\theta t=0;\\ \delta_{21}\frac{m_1}{4}\theta^2y_1+\left(\delta_{22}\frac{m_2}{2}\theta^2-1\right)y_2+\delta_{2p}P\operatorname{sen}\theta t=0.\end{aligned}\right\}\qquad(c)$$

Aquí δ_{1p} y δ_{2p} son los desplazamientos pares debidos a la fuerza unitaria P. Por eso $\delta_{1p}=\delta_{11}:2=9:2EJ$ y $\delta_{2p}=\delta_{21}:2=9:8EJ$.

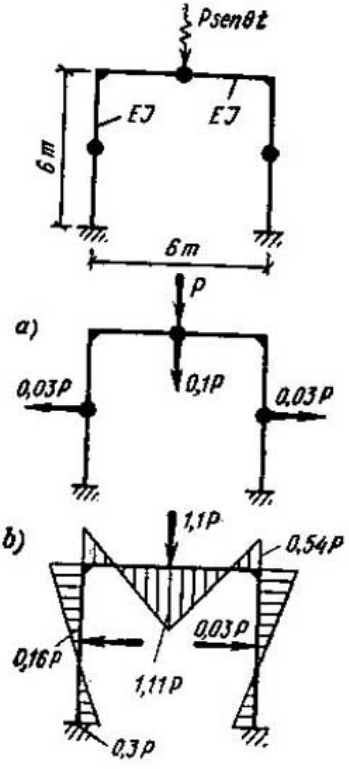


Fig. 188

$$\left(\frac{9}{EJ}\frac{4000}{4}\theta^2-1\right)y_1-$$
$$-\frac{9}{4EJ}\frac{4000}{2}\theta^2y_2+\frac{9}{2EJ}P\operatorname{sen}\theta t=0;$$
$$-\frac{9}{4EJ}\frac{4000}{4}\theta^2y_1+$$
$$+\left(\frac{27}{8EJ}\frac{4000}{2}\theta^2-1\right)y_2-$$
$$-\frac{9}{8EJ}P\operatorname{sen}\theta t=0.$$

La fuerza P se expresa en newtones y el desplazamiento y, en metros. Después de simplificar, tomando en consideración que $EJ=4\cdot10^7$ N·m²,

$$(0{,}9\,\theta^2-4000)\,y_1-0{,}45\theta^2y_2+$$
$$+4{,}5\cdot10^{-4}P\operatorname{sen}\theta t=0;\qquad(d)$$
$$-0{,}225\theta^2y_1+(0{,}675\theta^2-4000)\,y_2-$$
$$-1{,}125\cdot10^{-4}P\operatorname{sen}\theta t=0.\qquad(e)$$

Las fuerzas de inercia se determinan según las fórmulas:

$$J_1^*=\left(\frac{m_1}{4}\theta^2y_1\right)2;\quad J_2^*=\frac{m_2}{2}\theta^2y_2.\qquad(f)$$

El diagrama de momentos flectores se halla de acuerdo con la expresión

$$(M)=[(M_{P_1}):2]\,(P+J_1^*)+(M_{P2})\,J_2^*.\qquad(g)$$

Más adelante resolveremos las ecuaciones (d) empleando diferentes frecuencias de la carga:

El primer caso es: $\theta=20\ \text{s}^{-1}<\omega_1=59{,}6\ \text{s}^{-1}$:

$$(0{,}9\cdot20^2-4000)\,y_1-0{,}45\cdot20^2y_2+4{,}5\cdot10^{-4}P\operatorname{sen}\theta t=0;$$
$$-0{,}225\cdot20^2y_1+(0{,}675\cdot20^2-4000)\,y_2-$$
$$-1{,}125\cdot10^{-4}P\operatorname{sen}\theta t=0.$$

O bien

$$3640y_1 - 180y_2 + 4{,}5\cdot10^{-4}P \text{ sen } \theta t = 0;$$

$$-90y_1 + 3730y_2 - 2{,}25\cdot10^{-4}P \text{ sen } \theta t = 0.$$

De aquí se deduce: $y_1 = 1{,}252\cdot10^{-7}\,P \text{ sen } \theta t$ m;

$$y_2 = -0{,}332\cdot10^{-7}\,P \text{ sen } \theta t.$$

Las fuerzas de inercia son:

$$J_1^* = \left(\frac{4000}{4}\,20^2\cdot1{,}252\cdot10^{-7}P \text{ sen } \theta t\right) 2 \text{ N} = 0{,}10P \text{ sen } \theta t \text{ N};$$

$$J_2^* = \frac{4000}{2}\,20^2\,(-0{,}332\cdot10^{-7}P \text{ sen } \theta t) \text{ N} = -0{,}0266P \text{ sen } \theta t \text{ N}.$$

Las fuerzas que actúan sobre el pórtico, cuando sen $\theta t = 1$, se dan en la fig. 188, *a*, mientras que el diagrama de momentos construido basándose en (f) según la ecuación

$$(M) = [(M_{P_1}) : 2]\,1{,}10P - (M_{P_2})\,0{,}027P,$$

está representado en la fig. 188, *b*.

El coeficiente dinámico referente al momento de flexión en medio del dintel, es:

$$\mu = 1{,}107P : 1 = 1{,}107.$$

Aproximadamente, como en un sistema con un solo grado de libertad, tenemos

$$\mu = \frac{1}{1-\theta^2 : \omega_1^2} = \frac{1}{1-20^2 : 60^2} = 1{,}12.$$

El segundo caso es: $\theta = 40 \text{ s}^{-1} < \omega_1 = 59{,}6 \text{ s}^{-1}$;

$$(0{,}9\cdot40^2 - 4000)\,y_1 - 0{,}45\cdot40^2\,y_2 + 4{,}5\cdot10^{-4}P \text{ sen } \theta t = 0;$$

$$-0{,}225\cdot40^2y_1 + (0{,}675\cdot40^2 - 4000)\,y_2 - 1{,}125\cdot10^{-4}P \times$$

$$\times \text{ sen } \theta t = 0,$$

ó

$$-2560y_1 - 720y_2 + 4{,}5\cdot10^{-4}P \text{ sen } \theta t = 0;$$

$$-360y_1 - 2920y_2 - 1{,}125P \text{ sen } \theta t = 0.$$

De aquí:

$$y_1 = 1{,}934\cdot10^{-7}P \text{ sen } \theta t \text{ e } y_2 = -0{,}624\cdot10^{-7}P \text{ sen } \theta t.$$

Las fuerzas de inercia son:

$$J_1^* = \left(\frac{4000}{4}\,40^2\cdot1{,}934\cdot10^{-7}P \text{ sen } \theta t\right) 2 = 0{,}619P \text{ sen } \theta t;$$

$$J_2^* = \frac{4000}{2}\,40^2\,(-0{,}624\cdot10^{-7}\cdot P \text{ sen } \theta t) = -0{,}20P \text{ sen } \theta t.$$

Las fuerzas con sen $\theta t = 1$ y el diagrama de momentos debido a estas fuerzas se dan en la fig. 189. El coeficiente dinámico $\mu = 1{,}669P : 1{,}0P = 1{,}669$. Con aproximación

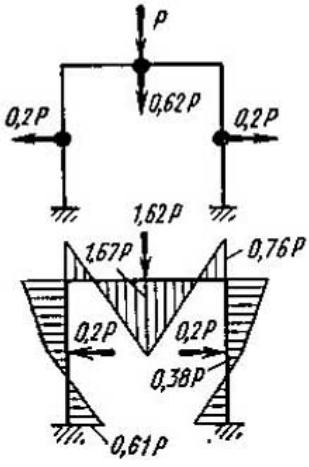


Fig. 189

$$\mu = \frac{1}{1 - 40^2 : 60^2} = 1{,}80.$$

Por analogia hemos examinado los casos: $\theta = 50\ s^{-1}$; $\theta = 50\ s^{-1}$, están cerca de la primera resonancia; $\theta = 60\ s^{-1}$, es algo superior a la primera resonancia; $\theta = 80 s^{-1}$; $\theta = 90\ s^{-1}$; $\theta = 94\ s^{-1}$, están cerca de la segunda resonancia; $\theta = 95\ s^{-1}$, es algo superior a la segunda resonancia y $\theta = 200\ s^{-1}$, está lejos de la segunda resonancia.

Las fuerzas que actúan sobre el pórtico y los diagramas respectivos se muestran en la fig. 190.

El gráfico de dependencia del coeficiente dinámico referente al momento de flexión en medio dintel del pórtico en función a la frecuencia de la carga está representado en la fig. 191.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN DEL PÓRTICO POR SU MITAD

Oscilaciones libres (fig. 192). La ecuación de frecuencias de acuerdo con (4.3) es:

$$\omega_i^4 (\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2) \frac{m_1}{2} m_2 - \omega_i^2 \left(\delta_{11} \frac{m_1}{2} + \delta_{22} m_2 \right) + 1 = 0.$$

Para la determinación de los desplazamientos δ_{11}, δ_{12} y δ_{22}, debemos en el sistema estáticamente indeterminado obtenido, construir los diagramas de momentos flectores producidos por las cargas unitarias (fig. 193). Apliquemos el método de fuerzas. El cálculo lo realizaremos sobre el sistema transformado por la introducción de consolas rígidas con traslación de las incógnitas (fig. 194). El sistema fundamental y todos los diagramas necesarios para el cálculo se dan en la fig. 195.

Las ecuaciones canónicas son:

$$\delta_{11}^0 X_1 + \delta_{12}^0 X_2 + \Delta_{1P}^0 = 0;$$
$$\delta_{21}^0 X_1 + \delta_{22}^0 X_2 + \Delta_{2p}^0 = 0.$$

Multiplicando los diagramas, obtenemos:

$$\delta_{11}^0 = (\overline{M}_1)(\overline{M}_1) \frac{6 \cdot 6}{2} \frac{2}{3} \frac{6}{EJ} = 72 : EJ; \quad \delta_{12}^0 = (\overline{M}_1)(\overline{M}_2) = 0;$$

$$\delta_{22}^0 = (\overline{M}_2)(\overline{M}_2) = \frac{6 \cdot 3 \cdot 6}{EJ} + \frac{6 \cdot 4}{2} \frac{2}{3} \frac{6}{EJ} + \frac{3 \cdot 2}{2} \frac{2}{3} \frac{3}{EJ} = 162 : EJ.$$

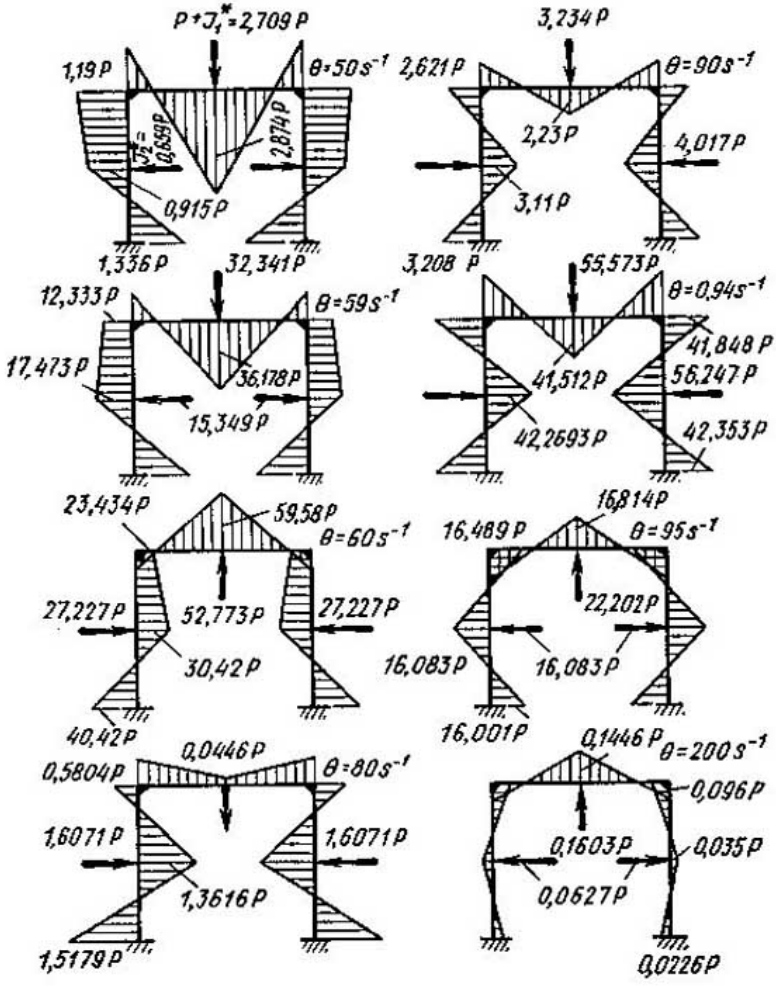


Fig. 190

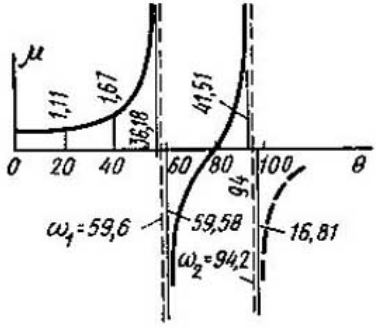


Fig. 191

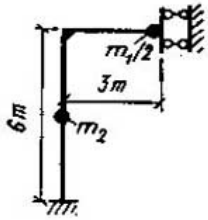


Fig. 192

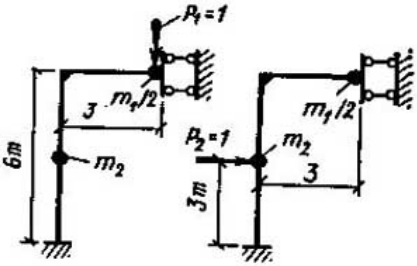


Fig. 193

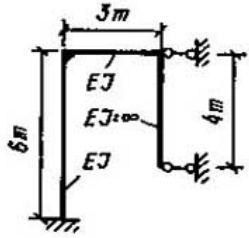


Fig. 194

1) El desplazamiento de carga debido a la carga vertical es:

$$\Delta_{1P}^0 = (M_{P_1})(\overline{M}_1) = -\frac{6\cdot 6}{2}\frac{3}{EJ} = -54 : EJ;$$

$$\Delta_{2P}^0 = (M_{P_1})(\overline{M}_2) = \left(6\cdot 3\,\frac{3}{2} + \frac{6-3}{2}\,6\cdot 3\right)\frac{1}{EJ} = \frac{54}{EJ}.$$

Por consiguiente,

$$X_1 = -\Delta_{1P}^0 : \delta_{11}^0 = 3/4; \quad X_2 = -\Delta_{2P}^0 : \delta_{22} = -1/3.$$

El diagrama de los momentos se da en la fig. 196.

2) El desplazamiento de carga causado por la carga horizontal es el siguiente:

$$\Delta_{1P}^0 = (M_{P_2}^P)(\overline{M}_1) = -\frac{3\cdot 3}{2}\frac{5}{EJ} = -\frac{45}{2EJ};$$

$$\Delta_{2P}^0 = (M_{P_2}^0)(\overline{M}_2) = -\frac{3\cdot 3}{2}\frac{3}{2EJ} = -\frac{27}{4EJ}.$$

Las incógnitas son:

$$X_1 = 5/16; \quad X_2 = 1/24.$$

El diagrama de los momentos está representado en la fig. 197.

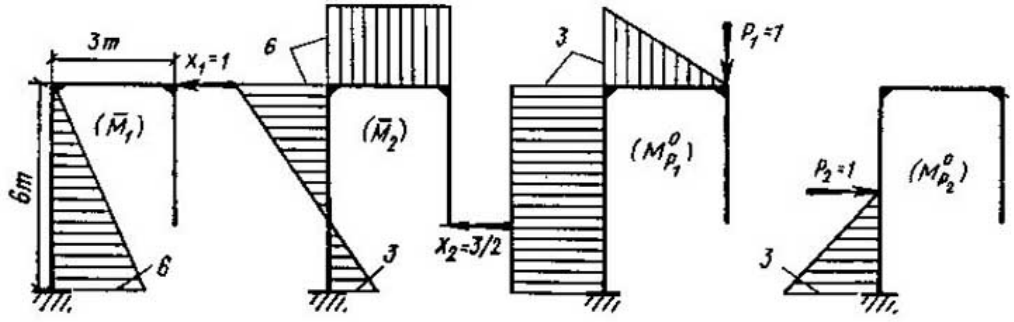


Fig. 195

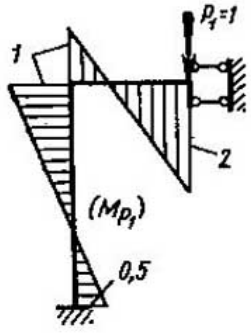


Fig. 196

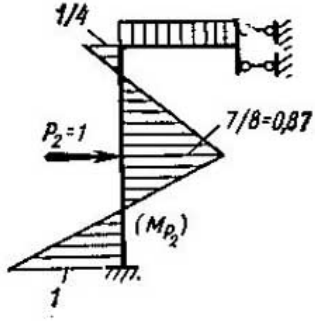


Fig. 197

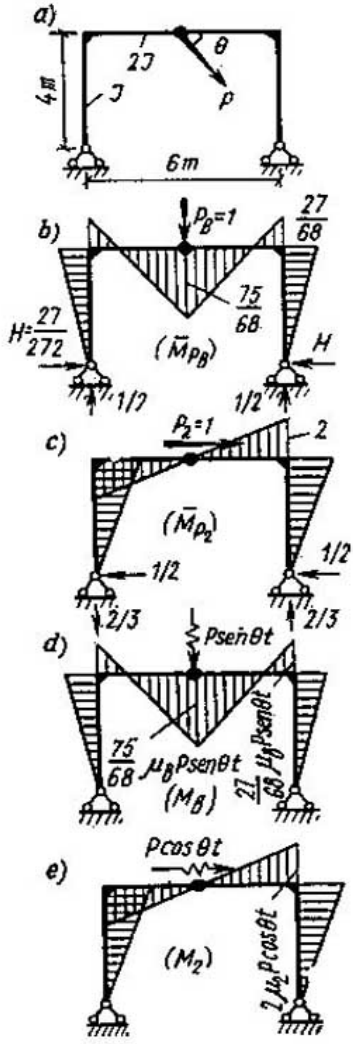


Fig. 198

Los desplazamientos para la ecuación de frecuencias son:

$$\delta_{11}=(M_1)(M_{P_1})=3\cdot 6\,\frac{0,5}{2EJ}=\frac{9}{2EJ};$$

$$\delta_{22}=(M_2)(M_{P_2})=\frac{3\cdot 3}{2}\left(\frac{2}{3}\,|1-\frac{1}{3}\,\frac{7}{8}\right)=\frac{27}{16EJ};$$

$$\delta_{12}=(M_1)(M_{P_2})=-\frac{3\cdot 3}{2}\,\frac{1}{4EJ}=-\frac{9}{8EJ}.$$

La ecuación de frecuencias en forma numérica es:

$$\omega_1^4\left[\frac{9}{2EJ}\,\frac{27}{16EJ}-\left(-\frac{9}{8EJ}\right)^2\right]\frac{4000}{2}\,4000-\omega_1^2\left[\frac{9}{2EJ}\,\frac{4000}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{27}{16EJ}\,4000\right]+1=0.$$

Esta es idéntica a la ecuación de frecuencias del primer método.

Oscilaciones forzadas por la fuerza P sen θt. Las ecuaciones canónicas son:

$$\left(\delta_{11}\frac{m_1}{2}\theta^2-1\right)y_1^*+\delta_{12}m_2\theta^2y_2^*+\delta_{1p}\frac{P}{2}\operatorname{sen}\theta t=0;$$

$$\delta_{21}\frac{m_1}{2}\theta^2y_1^*+(\delta_{22}m_2\theta^2-1)\,y_2^*+\delta_{2p}\frac{P}{2}\operatorname{sen}\theta t=0.$$

Teniendo en cuenta que $\delta_{1p}=\delta_{11}$ y $\delta_{2p}=\delta_{21}$, obtenemos:

$$\left(\frac{9}{2\cdot4\cdot10^7}\,\frac{4000}{2}\,\theta^2-1\right)y_1^*-\frac{9}{8\cdot4\cdot10^7}\,4000\theta^2y_2^*+\frac{9}{2\cdot4\cdot10^7}\,\frac{P}{2}\operatorname{sen}\theta t=0;$$

$$-\frac{9}{8\cdot4\cdot10^7}\,\frac{4000}{2}\,\theta^2y_1^*+\left(\frac{27}{16\cdot4\cdot10^7}\,4000\theta^2-1\right)y_2^*-$$

$$-\frac{9}{8\cdot4\cdot10^7}\,P\operatorname{sen}\theta t=0,$$

ó

$$(0{,}9\theta^2-4000)\,y_1^*-0{,}45\theta^2y_2^*+2{,}25\cdot10^{-4}P\operatorname{sen}\theta t=0;$$
$$-0{,}45\theta^2y_1^*+(0{,}675\theta^2-4000)\,2y_2^*-1{,}125\cdot10^{-4}P\operatorname{sen}\theta t=0.$$

Las fuerzas de inercia son:

$$J_1^{**}=\frac{m_1}{2}\theta^2y_1^*;\quad J_2^{**}=m_2\theta^2y_2^*. \tag{h}$$

El diagrama de momentos flectores para sen $\theta t=1$ se determina según la expresión

$$(M)=(M_{P_1})\left[\frac{P}{2}+J_1^{**}\right]+(M_{P_2})\,J_2^{**}. \tag{i}$$

Comparando (d) y (g) en las variantes expuestas de la solución, obtenemos:

$$2y_1^*=y_1;\quad 2y_2^*=y_2.$$

En tal caso las expresiones (g), (h), (i) de la segunda variante coincidirán respectivamente con las expresiones (d), (e), (f) de la primera variante.

Ejemplo 58. Determinar con aproximación las frecuencias naturales y construir un diagrama aproximado de los momentos de flexión en el pórtico con una masa grande concentrada en el dintel, provocadas por la fuerza P que actúa sobre la masa y gira con una velocidad angular θ, prescindiendo de las masas de las barras del pórtico (fig. 198, *a*), para $\theta=2/3\ \omega_1$, donde ω_1 es la frecuencia fundamental.

El sistema tiene dos grados de libertad por cuanto la masa es desplazable en dirección vertical y horizontal.

1. DETERMINACIÓN DE LAS FRECUENCIAS DE OSCILACIONES NATURALES

Tomando en consideración la simetria del sistema, los desplazamientos vertical (simétrico) y horizontal (antisimétrico) de la masa pueden examinarse por separado, considerando cada vez el pórtico como un sistema con un grado de libertad, lo cual permitirá determinar las frecuencias según la fórmula (2.17):

a) Oscilaciones verticales. Según las fórmulas (a) y (b) del § 76 tenemos:

$$\delta_{11}^{v} = \frac{6^3}{48 \cdot 2EJ} \frac{8 \cdot 2\frac{4}{6} + 3}{8 \cdot 2\frac{4}{6} + 12} = \frac{369}{272EJ};$$

$$\omega_v^2 = \frac{1}{m\delta_{11}^{v}} = \frac{272EJ}{m369}.$$

b) Oscilaciones horizontales. Partiendo de las fórmulas (c) y (d) hallamos:

$$\delta_{11}^{h} = \frac{4^3}{12 \cdot 2EJ}\left(2 \cdot 2 + \frac{6}{4}\right) = \frac{44}{3EJ};$$

$$\omega_h^2 = \frac{1}{m\delta_{11}^{h}} = \frac{3EJ}{m44}.$$

La frecuencia básica $\omega_1 = \omega_h$.

El mismo resultado lo obtendremos valiéndose de la fórmula (4.5), ya que en nuestro caso $\delta_{12} = 0$; $\delta_{11} = \delta_{11}^{v}$ y $\delta_{22} = \delta_{11}^{h}$.

2. CONSTRUCCIÓN DEL DIAGRAMA DE MOMENTOS FLECTORES

Según la condición inicial $\theta^2 = \frac{2}{3}\frac{3EJ}{m44} = \frac{EJ}{m22}$.

Descompongamos la fuerza P en componentes:

$$P_v = P \operatorname{sen} \theta t; \quad P_h = P \cos \theta t.$$

Admitamos que y_1 e y_2 son los desplazamientos vertical y horizontal, respectivamente, de la masa m.

Para construir el diagrama M_p, es necesario al principio construir los diagramas de momentos flectores causados por las fuerzas estáticas $P_v = 1$ y $P_h = 1$, lo cual puede hacerse basándose en los datos de la fig. 156.

El empuje producido por la fuerza vertical $P_v = 1$ es:

$$H = \frac{3 \cdot 6}{8 \cdot 4\left(2 \cdot 2\frac{4}{6} + 3\right)} = \frac{27}{272}.$$

Los diagramas de los momentos $(\overline{M}_{pv})$ y $(\overline{M}_{ph})$ están construidos en la fig. 198, *b* y *c*.

Los coeficientes dinámicos de acuerdo con la fórmula (2.98) son:

a) para la fuerza vertical

$$\mu_v = 1 : \left[1 - \left(\frac{EJ}{m22} : \frac{272EJ}{m369}\right)\right] = \frac{5984}{5615} = 1{,}07;$$

b) para la fuerza horizontal

$$\mu_h = 1 : \left[1 - \left(\frac{EJ}{m22} : \frac{3EJ}{m44}\right)\right] = 3.$$

Los diagramas referentes a la fuerza vertical P sen θt y a la fuerza horizontal $P \cos \theta t$ se muestran en la fig. 198, *d* y *e*.

El mismo resultado lo obtendremos a base de las ecuaciones (4.37):

$$\delta_{11}^* J_1^* + \delta_{12} J_2^* + \Delta_{1p} \operatorname{sen} \theta t + \Delta_{1p} \cos \theta t = 0;$$
$$\delta_{21} J_1^* + \delta_{22}^* J_2^* + \Delta_{2p} \operatorname{sen} \theta t + \Delta_{2p} \cos \theta t = 0.$$

Teniendo en cuenta que en nuestro caso:

$$\delta_{12} = 0; \quad \Delta_{1p} \operatorname{sen} \theta t = \delta_{11} P \operatorname{sen} \theta t;$$
$$\Delta_{2p} \operatorname{sen} \theta t = \delta_{21} P \operatorname{sen} \theta t = 0; \quad \Delta_{1p} \cos \theta t = \delta_{12} P \cos \theta t = 0;$$
$$\Delta_{2p} \cos \theta t = \delta_{22} P \cos \theta t.$$

estas ecuaciones las obtendremos en la siguiente forma:

$$\left(\frac{369}{272EJ} - \frac{1}{m \dfrac{EJ}{m22}} \right) J_1^* + \frac{369}{272EJ} P \operatorname{sen} \theta t = 0;$$

$$\left(\frac{44}{3EJ} - \frac{1}{m \dfrac{EJ}{m22}} \right) J_2^* + \frac{44}{3EJ} P \cos \theta t = 0.$$

De aquí se deduce que

$$J_1^* = \frac{369P \operatorname{sen} \theta t}{5615}; \quad J_2^* = 2P \cos \theta t.$$

Las fuerzas dinámicas totales son:

a) la fuerza vertical,

$$P_v = P \operatorname{sen} \theta t + J_1^* = \frac{5984}{5615} P \operatorname{sen} \theta t = \mu_v P \operatorname{sen} \theta t;$$

b) la fuerza horizontal,

$$P_2 = P \cos \theta t + J_2^* = 3 \ P \cos \theta t = \mu_h P \cos \theta t.$$

El método de desplazamientos también puede ser aplicado directamente para el cálculo dinámico de los pórticos con elementos «imponderables» y masas

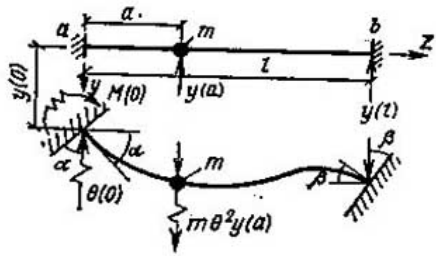


Fig. 199

concentradas a la acción de la carga de vibración, si investigamos preliminarmente los elementos estándares de un sistema fundamental corriente sólo con masas concentradas.

Mostraremos cómo hacer esto, si en cada una de las barras se dispone una sola masa concentrada (fig. 199). Cada uno de los elementos del sistema fundamental es un sistema con un solo grado de libertad.

1. ELEMENTO EMPOTRADO EN DOS EXTREMOS

Los desplazamientos de amplitud de los extremos del elemento durante las oscilaciones con una frecuencia θ los consideramos prefijados (fig. 199). Aplicamos las ecuaciones de la línea elástica por el método de parámetros iniciales.

El primer tramo: $0 \leqslant z \leqslant a$

$$y_1(z) = y(0) + \alpha z - \frac{M(0)}{EJ}\frac{z^2}{2!} - \frac{Q(0)}{EJ}\frac{z^3}{3!}; \qquad M_1(z) = M(0) + Q(0)z;$$

$$y_1'(z) = \alpha - \frac{M(0)}{EJ}z - \frac{Q(0)}{EJ}\frac{z^2}{2!}; \qquad Q_1(z) = Q(0).$$

La flexión de la viga para $z = a$, es

$$y(a) = y(0) + \alpha a - \frac{M(0)}{EJ}\frac{a^2}{2!} - \frac{Q(0)}{EJ}\frac{a^3}{3!}.$$

La fuerza de inercia en el lugar de colocación de la masa, es

$$J = m\theta^2 y(a) = m\theta^2\left[y(0) + \alpha a - \frac{M(0)}{EJ}\frac{a^2}{2} - \frac{Q(0)}{EJ}\frac{a^3}{6}\right]. \tag{9.46}$$

El segundo tramo: $a \leqslant z \leqslant l$

$$y_2(z) = y_1(z) + \Delta y = y(0) + \alpha z - \frac{M(0)}{EJ}\frac{z^2}{2} - \frac{Q(0)}{EJ}\frac{z^3}{6} +$$
$$+ m\theta^2\left[y(0) + \alpha a - \frac{M(0)}{EJ}\frac{a^2}{2} - \frac{Q(0)}{EJ}\frac{a^3}{6}\right]\frac{(z-a)^3}{EJ\cdot 6};$$

$$y_2'(z) = y_1'(z) + \Delta y' = \alpha - \frac{M(0)}{EJ}z - \frac{Q(0)}{EJ}\frac{z^2}{2} +$$
$$+ m\theta^2\left[y(0) + \alpha a - \frac{M(0)}{EJ}\frac{a^2}{2} - \frac{Q(0)}{EJ}\frac{a^3}{6}\right]\frac{(z-a)^2}{EJ\cdot 2};$$

$$M_2(z) = M_1(z) + \Delta M = M(0) + Q(0)z -$$
$$- m\theta^2\left[y(0) + \alpha a - \frac{M(0)}{EJ}\frac{a^2}{2} - \frac{Q(0)}{EJ}\frac{a^3}{6}\right](z-a);$$

$$Q_2(z) = Q_1(z) + \Delta Q = Q(0) - m\theta^2\left[y(0) + \alpha a - \frac{M(0)}{EJ}\frac{a^2}{2} - \frac{Q(0)}{EJ}\frac{a^3}{6}\right]. \tag{9.47}$$

Compongamos las condiciones de frontera para el extremo derecho del elemento:

$$y(l) = y(0) + \alpha l - \frac{M(0)}{EJ}\frac{l^2}{2} - \frac{Q(0)}{EJ}\cdot\frac{l^3}{6} +$$
$$+ m\theta^2\left[y(0) + \alpha a - \frac{M(0)}{EJ}\frac{a^2}{2} - \frac{Q(0)}{EJ}\frac{a^3}{6}\right]\frac{(l-a)^3}{EJ\cdot 6};$$

$$\beta = \alpha - \frac{M(0)\,l}{EJ} - \frac{Q(0)}{EJ}\frac{l^2}{2} +$$
$$+ m\theta^2\left[y(0) + \alpha a - \frac{M(0)}{EJ}\frac{a^2}{2} - \frac{Q(0)}{EJ}\frac{a^3}{6}\right]\frac{(l-a)^2}{EJ\cdot 2}.$$

Reescribámoslas en la siguiente forma:

$$\frac{M(0)}{EJ}\left[\frac{l^2}{2}+m\theta^2\frac{a^2}{2}\frac{(l-a)^3}{6EJ}\right]+\frac{Q(0)}{EJ}\left[\frac{l^3}{6}+m\theta^2\frac{a^3}{6}\frac{(l-a)^3}{6EJ}\right]=$$

$$=y(0)\left[1+\frac{m\theta^2(l-a)^3}{6EJ}\right]+\alpha\left[l+m\theta^2 a\frac{(l-a)^2}{6EJ}\right]-y(l);$$

$$\frac{M(0)}{EJ}\left[l+m\theta^2\frac{a^2}{2}\frac{(l-a)^2}{2EJ}\right]+\frac{Q(0)}{EJ}\left[\frac{l^2}{2}+m\theta^2\frac{a^3}{6}\frac{(l-a)^2}{2EJ}\right]=$$

$$=y(0)\,m\theta^2\frac{(l-a)^2}{2EJ}+\alpha\left[1+m\theta^2 a\frac{(l-a)^2}{2EJ}\right]-\beta. \qquad (9.48)$$

En estas ecuaciones introduciremos la frecuencia de oscilaciones propias para la barra empotrada en dos extremos:

$$\delta_{11}=\frac{a^3b^3}{3l^3EJ};\quad \omega^2=\frac{1}{m\delta_{11}}=3l^3EJ:ma^3b^3. \qquad (9.49)$$

De aquí se deduce que $m = 3EJl^3 : \omega^2a^3b^3$, donde $b=l-a$. Ahora las ecuaciones (9.48) serán:

$$\frac{M(0)}{EJ}\left(\frac{l^2}{2}+\frac{\theta^2}{\omega^2}\frac{l^3}{4a}\right)+\frac{Q(0)}{EJ}\left(\frac{l^3}{6}+\frac{\theta^2}{\omega^2}\frac{l^3}{12}\right)=$$

$$=y(0)\left(1+\frac{\theta^2}{\omega^2}\frac{l^3}{2a^3}\right)+\alpha\left(l+\frac{\theta^2}{\omega^2}\frac{l^3}{2a}\right)-y(l);$$

$$\frac{M(0)}{EJ}\left(l+\frac{\theta^2}{\omega^2}\frac{3l^3}{4ab}\right)+\frac{Q(0)}{EJ}\left(\frac{l^2}{2}+\frac{\theta^2}{\omega^2}\frac{l^3}{4b}\right)=$$

$$=y(0)\frac{\theta^2}{\omega^2}\frac{3l^3}{2a^3b}+\alpha\left(1+\frac{\theta^2}{\omega^2}\frac{3}{2}\frac{l^3}{a^2b}\right)-\beta;$$

Resolviéndolas, obtendremos:

$$M(0)=\alpha\frac{4EJ}{l}F_1+\beta\frac{2EJ}{l}F_2+y(0)\frac{6EJ}{l^2}F_3-y(l)\frac{6EJ}{l^2}F_4, \qquad (9.50)$$

donde

$$F_1=\left[1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\left(1+\frac{3}{4}\frac{b}{a}\right)\right]:\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right); \qquad (9.51)$$

$$F_2=\left(1+\frac{\theta^2}{\omega^2}\frac{1}{2}\right):\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right); \qquad (9.52)$$

$$F_3=\left[1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\left(1+\frac{3ab+b^2}{2a^2}\right)\right]:\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right); \qquad (9.53)$$

$$F_4=\left(1+\frac{\theta^2}{\omega^2}\frac{l}{2b}\right):\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right); \qquad (9.54)$$

$$Q(0)=-\alpha\frac{6EJ}{l^2}F_5-\beta\frac{6EJ}{l^2}F_6-y(0)\frac{12EJ}{l^3}F_7+y(l)\frac{12EJ}{l^3}F_8, \qquad (9.55)$$

donde

$$F_5=\left[1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\left(1+\frac{3ab+b^2}{2a^2}\right)\right]:\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)=F_3; \tag{9.56}$$

$$F_6=\left(1+\frac{\theta^2}{\omega^2}\,\frac{l}{2a}\right):\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right); \tag{9.57}$$

$$F_7=\left\{1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\left[1+\frac{b(3a+b)^2}{4a^3}\right]\right\}:\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right); \tag{9.58}$$

$$F_8=\left(1+\frac{\theta^2}{\omega^2}\,\frac{3}{4}\,\frac{l^2}{ab}\right):\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right); \tag{9.59}$$

$$\omega^2=3l^3EJ:ma^3b^3. \tag{9.60}$$

Según las fórmulas (9.50)—(9.59) se han obtenido los valores de parámetros iniciales debidos a los diferentes tipos de desplazamientos unitarios de los extremos de la barra, lo que está anotado en la tabla 8.

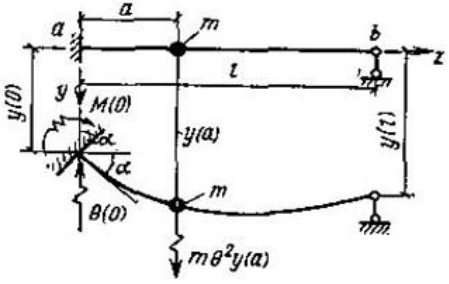


Fig. 200

Después de determinar los parámetros iniciales, los valores de cálculo restantes se obtienen de acuerdo con las expresiones (9.45)—(9.47).

2. ELEMENTO EMPOTRADO POR SU EXTREMO IZQUIERDO Y APOYADO ARTICULADAMENTE POR SU EXTREMO DERECHO (FIG. 200)

El primer tramo:

$$0\leqslant z\leqslant a$$

$$\left.\begin{aligned} y_1(z)&=y(0)+\alpha z-\frac{M(0)}{EJ}\,\frac{z^2}{2}-\frac{Q(0)}{EJ}\,\frac{z^3}{6};\\ y_1'(z)&=\alpha-\frac{M(0)}{EJ}\,z-\frac{Q(0)}{EJ}\,\frac{z^2}{2};\\ M_1(z)&=M(0)+Q(0)+Q(0)\,z;\\ Q_1(z)&=Q(0). \end{aligned}\right\} \tag{9.61}$$

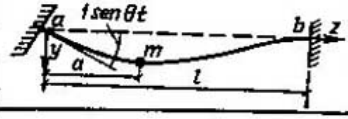
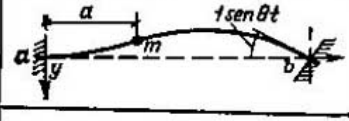
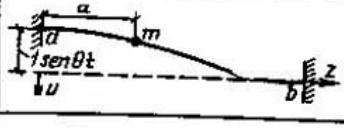
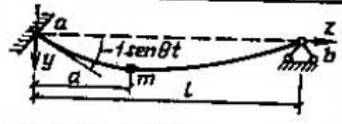
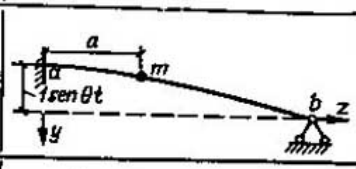
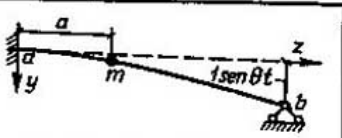
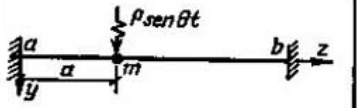
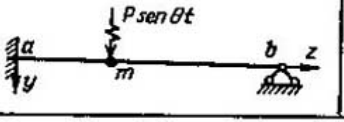
La flexión de la viga para $z=a$ es:

$$y(a)=y(0)+\alpha a-\frac{M(0)}{EJ}\,\frac{a^2}{2}-\frac{Q(0)}{EJ}\,\frac{a^3}{6}.$$

La fuerza de inercia es (véase 9.46):

$$J=m\theta^2y(a)=m\theta^2\left[y(0)+\alpha a-\frac{M(0)}{EJ}\,\frac{a^2}{2}-\frac{Q(0)}{EJ}\,\frac{a^3}{6}\right].$$

Tabla 8

N°		Valores de amplitud	
		$M_{ab} = M(0)$	$Q_{ab} = Q(0)$
1		$\frac{4EJ}{l} F_1$ F_1 según (9.51)	$-\frac{6EJ}{l^2} F_5$ F_5 según (9.56)
2		$\frac{2EJ}{l} F_2$ F_2 según (9.52)	$-\frac{6EJ}{l^2} F_6$ F_6 según (9.57)
3		$-\frac{6EJ}{l^2} F_3$ F_3 según (9.53)	$\frac{12EJ}{l^3} F_7$ F_7 según (9.58)
4		$-\frac{6EJ}{l^2} F_4$ F_4 según (9.54)	$\frac{12EJ}{l^3} F_8$ F_8 según (9.59)
5		$\frac{3EJ}{l} F_9$ F_9 según (9.66)	$-\frac{3EJ}{l^2} F_{12}$ F_{12} según (9.70)
6		$-\frac{3EJ}{l^2} F_{10}$ F_{10} según (9.67)	$\frac{3EJ}{l^3} F_{13}$ F_{13} según (9.71)
7		$-\frac{3EJ}{l^2} F_{11}$ F_{11} según (9.68)	$\frac{3EJ}{l^3} F_{14}$ F_{14} según (9.72)
8		F_{15} según (9.77)	F_{16} según (9.80)
9		F_{17} según (9.84)	F_{18} según (9.85)

El segundo tramo: $a \leqslant z \leqslant l$

$$\left.\begin{aligned}
y_2(z) &= y_1(z) + \Delta y = y(0) + \alpha z - \frac{M(0)}{EJ}\frac{z^2}{2} - \frac{Q(0)}{EJ}\frac{z^3}{6} + \\
&+ m\theta^2\left[y(0) + \alpha a - \frac{M(0)}{EJ}\frac{a^2}{2} - \frac{Q(0)}{EJ}\frac{a^3}{6}\right]\frac{(z-a)^3}{6EJ}; \\
y_2'(z) &= y_1'(z) + \Delta y' = \alpha - \frac{M(0)}{EJ}z - \frac{Q(0)}{EJ}\frac{z^2}{2} + \\
&+ m\theta^2\left[y(0) + \alpha a - \frac{M(0)}{EJ}\frac{a^2}{2} - \frac{Q(0)}{EJ}\frac{a^3}{6}\right]\frac{(z-a)^2}{2EJ}; \\
M_2(z) &= M_1(z) + \Delta M = M(0) + Q(0)\,z - \\
&- m\theta^2\left[y(0) + \alpha a - \frac{M(0)}{EJ}\frac{a^2}{2} - \frac{Q(0)}{EJ}\frac{a^3}{6}\right](z-a); \\
Q_2(z) &= Q(0) - m\theta^2\left[y(0) + \alpha a - \frac{M(0)}{EJ}\frac{a^2}{2} - \frac{Q(0)}{EJ}\frac{a^3}{6}\right].
\end{aligned}\right\} \quad (9.62)$$

Componemos las condiciones de frontera para el extremo derecho de la barra:

$$y(l) = y(0) + \alpha l - \frac{M(0)}{EJ}\frac{l^2}{2} - \frac{Q(0)}{EJ}\frac{l^3}{6} + \\ + m\theta^2\left[y(0) + \alpha a - \frac{M(0)}{EJ}\frac{a^2}{2} - \frac{Q(0)}{EJ}\frac{a^3}{6}\right]\frac{(l-a)^3}{6EJ};$$

$$M(l) = M(0) + Q(0)\,l - m\theta^2\left[y(0) + \alpha a - \frac{M(0)}{EJ}\frac{a^2}{2} - \frac{Q(0)}{EJ}\frac{a^3}{6}\right](l-a) = 0.$$

Representémoslas en otra forma:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{M(0)}{EJ}\left(\frac{l^2}{2} + \frac{m\theta^2 a^2 b^2}{12EJ}\right) + \frac{Q(0)}{EJ}\left(\frac{l^3}{6} + m\theta^2\frac{a^3}{6}\frac{b^2}{6EJ}\right) = \\
&\quad = y(0) + \alpha l - y(l) + m\theta^2 y(0)\frac{b^3}{6EJ} + m\theta^2\alpha\frac{ab^3}{6EJ}; \\
&M(0)\left(1 + \frac{m\theta^2 a^2 b}{2EJ}\right) + Q(0)\left(l + \frac{m\theta^2 a^3 b}{EJ\cdot 6}\right) = m\theta^2 y(0)\,b + m\theta^2\alpha ab;
\end{aligned}\right\} \quad (9.63)$$

La frecuencia de oscilaciones propias del elemento que examinamos aquí es

$$\omega^2 = \frac{1}{m\delta_{11}} = \frac{12l^3EJ}{ma^3b(4l^2 - 5al + a^2)} = \frac{12l^3EJ}{mb^2a^3(3a + 4b)}. \quad (9.64)$$

De aquí se deduce que

$$m = \frac{12l^3EJ}{\omega^2 b^2 a^3 (3a + 4b)}.$$

Sustituyendo la expresión obtenida de la masa en (9.63) y resolviendo la ecuación, obtendremos:

$$M(0) = \alpha\frac{3EJ}{l^2}F_9 + y(0)\frac{3EJ}{l^2}F_{10} - y(l)\frac{3EJ}{l^2}F_{11}, \quad (9.65)$$

donde

$$F_9 = \left[1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\,\frac{4l^2}{a\,(3a+4b)}\right] : \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right). \tag{9.66}$$

$$F_{10} = \left[1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\cdot\frac{2l^2\,(3a+2b)}{a^2\,(3a+4b)}\right] : \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right); \tag{9.67}$$

$$F_{11} = \left[1 + \frac{\theta^2}{\omega^2}\cdot\frac{2l^2}{b\,(3a+4b)}\right] : \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right); \tag{9.68}$$

$$Q\,(0) = -\alpha\,\frac{3EJ}{l^2}\,F_{12} - y\,(0)\,\frac{3EJ}{l^3}\,F_{13} + y\,(l)\,\frac{3EJ}{l^3}\,F_{14}. \tag{9.69}$$

donde

$$F_{12} = \left[1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\,\frac{2l^2}{a^2}\,\frac{(3a+2b)}{(3a+4b)}\right] : \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right) = F_{10}; \tag{9.70}$$

$$F_{13} = \left[1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\,\frac{4l^3}{a^3}\,\frac{(b+3a)}{(3a+4b)}\right] : \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right); \tag{9.71}$$

$$F_{14} = \left[1 + \frac{\theta^2}{\omega^2}\,\frac{6l^3}{ab\,(3a+4b)}\right] : \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right); \tag{9.72}$$

$$\omega^2 = 12l^3EJ : mb^2a^3\,(3a+4b). \tag{9.73}$$

Según las expresiones (9.65)—(9.72) se han obtenido los parámetros iniciales para los diferentes desplazamientos unitarios de los extremos de la barra,

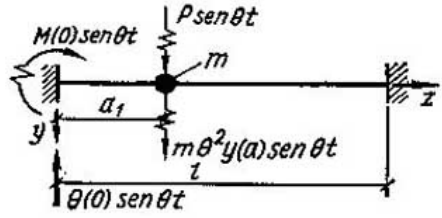


Fig. 201

los cuales están escritos en la tabla 8. Una vez determinados los parámetros iniciales, las demás magnitudes de cálculo se establecen de acuerdo con las expresiones (9.61)—(9.62).

Examinemos ahora la acción de la carga de vibración P sen θt ejercida sobre la masa m.

1. ELEMENTO EMPOTRADO EN DOS EXTREMOS (FIG. 201)

Escribamos las conocidas ecuaciones de líneas de influencia:

$$\text{l.in. } M\,(0) = -\left(a - \frac{2a^2}{l} + \frac{a^3}{l^2}\right) = -\frac{ab^2}{l^2}, \tag{9.74}$$

$$\text{l.in. } Q\,(0) = 1 - 3\,\frac{a^2}{l^2} + 2\,\frac{a^3}{l^3} = \frac{b^2\,(b+3a)}{l^3}. \tag{9.75}$$

Para el sistema con un grado de libertad podemos escribir (véase la pág. 56):

$$P + J^* = P : \left[1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right]. \tag{9.76}$$

Haciendo uso de (9.74), obtendremos:

$$M(0) = F_{15} = -\frac{P}{1-(\theta^2/\omega^2)}\,\frac{ab^2}{l^2}. \tag{9.77}$$

Respectivamente tenemos que

$$M(l) = -\frac{P}{1-(\theta^2/\omega^2)}\,\frac{a^2b}{l^2}. \tag{9.78}$$

El momento flector bajo la fuerza es:

$$M(a) = \frac{2Pa^2b^2}{l^3\left(1-\dfrac{\theta^2}{\omega^2}\right)}. \tag{9.79}$$

Aplicando (9.75), por analogía, tenemos:

$$Q(0) = F_{16} = \frac{P}{1-(\theta^2/\omega^2)}\,\frac{b^2(3a-b)}{l^3}. \tag{9.80}$$

$$Q(l) = -\frac{P}{1-(\theta^2/\omega^2)}\,\frac{a^2(a+3b)}{l^3}. \tag{9.81}$$

2. ELEMENTO EMPOTRADO POR SU EXTREMO IZQUIERDO Y APOYADO ARTICULADAMENTE POR SU EXTREMO DERECHO (FIG. 202)

Las ecuaciones de las líneas de influencia son:

$$\text{l.in. } M(0) = -\left(a - \frac{3}{2}\,\frac{a^2}{l} + \frac{a^3}{2l^2}\right) = -\frac{ab}{l^2}\left(l - \frac{a}{2}\right); \tag{9.82}$$

$$\text{l.in. } Q(0) = 1 - \frac{3}{2}\,\frac{a^2}{l^2} + \frac{1}{2}\,\frac{a^3}{l^3}. \tag{9.83}$$

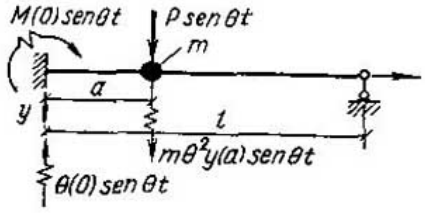


Fig. 202

Basándose en las ecuaciones (9.76), (9.82) y (9.83) obtenemos:

$$M(0) = F_{17} = -\frac{P}{1-(\theta^2/\omega^2)}\,\frac{ab}{l^2}\left(l - \frac{a}{2}\right) =$$

$$= -\frac{P}{1-(\theta^2/\omega^2)}\,\frac{ab}{2l}\left(1 + \frac{b}{l}\right); \tag{9.84}$$

$$M(a) = \frac{Pa^2b}{2l^2\left(1-\dfrac{\theta^2}{\omega^2}\right)}\left(3 - \frac{a}{l}\right);$$

$$Q(0) = F_{18} = \frac{P}{1-(\theta^2/\omega^2)}\left(1 - \frac{3a^2}{2l^2} + \frac{1}{2}\,\frac{a^3}{l^3}\right); \tag{9.85}$$

$$Q(l) = -\frac{Pa^2}{2l^2\left(1-\dfrac{\theta^2}{\omega^2}\right)}\left(3 - \frac{a}{l}\right).$$

Ejemplo 59. Determinar las frecuencias propias de las oscilaciones simétricas y construir el diagrama de los momentos flectores producidos por la fuerza P sen θ en el pórtico examinado en el ejemplo 57, según el método de desplazamientos (fig. 203, *a*). El sistema fundamental se da en la fig. 203, *b*.

Tomamos por incógnita el giro simultáneo del nudo izquierdo del pórtico en dirección horaria y del nudo derecho del mismo en dirección antihoraria, en un ángulo igual a Z_1. La ecuación canónica es:

$$r_{11}Z_1 + R_{1P} = 0.$$

1. SOLUCIÓN EN FORMA GENERAL

La frecuencia de oscilaciones libres de una barra empotrada en dos extremos, según (9.49) es:

$$\omega^2 = 192EJ : ml^3. \qquad \text{(a)}$$

a) Momentos flectores en forma de diagrama unitario ($\overline{M}_1$) (fig. 204, *a*). *Elemento* 1—*a* (el eje *z* está dirigido desde el nudo *1* hacia abajo).

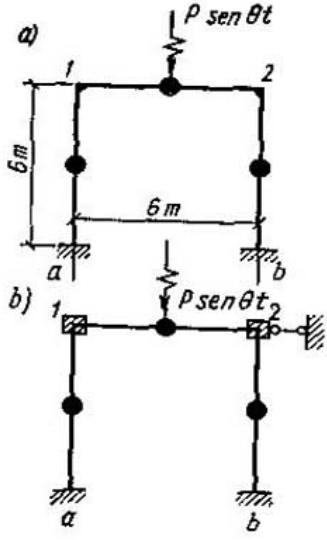


Fig. 203

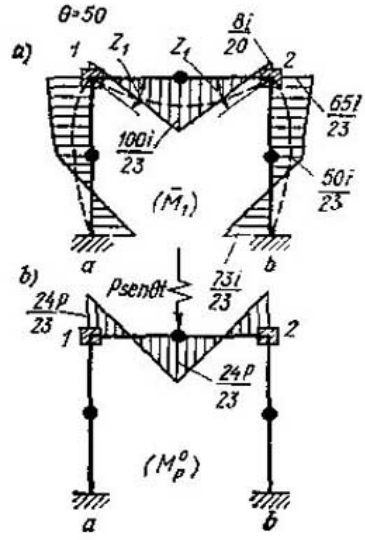


Fig. 204

En concordancia con las reglas habituales referentes a los signos, para $a = b$ obtendremos (véase la tabla 8):

$$\overline{M}_1(0) = \frac{4EJ}{l}\left(1 - \frac{7}{4}\frac{\theta^2}{\omega^2}\right) : \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right); \qquad (9.86)$$

$$\overline{Q}_1(0) = -\frac{6EJ}{l^2}\left(1 - 3\frac{\theta^2}{\omega^2}\right) : \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right); \qquad (9.87)$$

$$\overline{M}_1\left(\frac{l}{2}\right) = \overline{M}_1(0) + \overline{Q}_1(0)\frac{l}{2} = \frac{EJ}{l}\left(1 + 2\frac{\theta^2}{\omega^2}\right) : \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right); \qquad (9.88)$$

$$\overline{M}_1(l) = -\frac{2EJ}{l}\left(1 + \frac{\theta^2}{2\omega^2}\right) : \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right). \qquad (9.89)$$

Elemento 1-2 (el eje z está dirigido desde el nudo *1* hacia la derecha).

$$\overline{M}_1(0)=\frac{4EJ}{l}\left(1-\frac{7}{4}\frac{\theta^2}{\omega^2}\right):\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)-\frac{2EJ}{l}\left(1+\frac{\theta^2}{2\omega^2}\right):\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)=$$

$$=\frac{2EJ}{l}\left(1-4\frac{\theta^2}{\omega^2}\right):\left(-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right); \qquad (9.90)$$

$$\overline{Q}_1(0)=\left[-\frac{6EJ}{l^2}\left(1-3\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)+\frac{6EJ}{l^2}\left(1+\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)\right]:\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)=$$

$$=\frac{EJ}{l^2}\,24\frac{\theta^2}{\omega^2}; \qquad (9.91)$$

$$\overline{M}_1\left(\frac{l}{2}\right)=\overline{M}_1(0)+\overline{Q}_1(0)\frac{l}{2}=\frac{EJ}{l}\left(2+4\frac{\theta^2}{\omega^2}\right):\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right);$$

$$\overline{M}_1(l)=\overline{M}_1(0). \qquad (9.92)$$

b) Momentos flectores fundamentales causados por una carga (fig. 204, *b*). Los momentos flectores los habrá sólo en el elemento *1—2*.

Según las fórmulas (9.77) y (9.78) tenemos que

$$M_p^0(0)=M_p^0(l)=-Pl:8\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right). \qquad (9.93)$$

Según la fórmula (9.79) tenemos que

$$M_p^0\left(\frac{l}{2}\right)=Pl:8\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right). \qquad (9.94)$$

Basándose en los datos de las ecuaciones (9.86) y (9.90) obtenemos que

$$\frac{r_{11}}{2}=\left[\frac{4EJ}{l}\left(1-\frac{7}{4}\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)+\frac{2EJ}{l}\left(1-4\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)\right]:\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)=$$

$$=\frac{EJ}{l}\left(6-15\frac{\theta^2}{\omega^2}\right):\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right). \qquad (b)$$

De acuerdo con la expresión (9.93) tenemos que

$$\frac{R_{1P}}{2}=M_p^0(0)=-Pl:8\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right).$$

De la ecuación canónica tenemos que

$$Z_1=-R_{1P}:r_{11}=Pl^2:8EJ\left(6-15\frac{\theta^2}{\omega^2}\right).$$

Las frecuencias de oscilaciones propias las determinaremos haciendo uso de la ecuación $r_{11}Z_1=0$. Cuando $Z_1\neq 0$, $r_{11}=0$.

De acuerdo con (b), para $\theta=\omega_1$ tenemos:

$$\frac{EJ}{l}\left(6-15\frac{\omega_1^2}{\omega^2}\right):\left(1-\frac{\omega_1^2}{\omega^2}\right)=0.$$

De aquí se deduce que

$$\omega_1^2=\frac{6}{15}\omega^2=\frac{6}{15}\frac{192EJ}{0{,}4\cdot 6^3}=\frac{8EJ}{9}$$ (es lo mismo que en el ejemplo 57).

En este ejemplo las oscilaciones son posibles cuando la incógnita Z_1 tiene el valor trivial, o sea, es igual a cero, es decir, cuando las oscilaciones del sistema fundamental son idénticas a las del sistema prefijado.

Para $Z_1 = 0$ cada uno de los elementos del pórtico representará por sí una barra empotrada en ambos extremos, cuya frecuencia de oscilaciones se determina por la fórmula (a).

Por esta razón $\omega_2^2 = \omega^2 = 20EJ : 9$ (esto es lo mismo que en el ejemplo 57).

2. SOLUCIÓN NUMÉRICA (PARA $\theta = 50\ s^{-1}$)

$$\omega^2 = 192 \cdot 4 \cdot 10^7 : 4000 \cdot 6^3 = 8 \cdot 10^4 : 9;$$
$$\theta^2 : \omega^2 = 50^2 : (8 \cdot 10^4 : 9) = 9 : 32.$$

Elemento 1—a. Según las fórmulas (9.86), (9.88), (9.89) tenemos que:

$$\overline{M}_1(0) = 4i\left(1 - \frac{7}{4}\frac{9}{32}\right) : \left(1 - \frac{9}{32}\right) = \frac{65i}{23};$$

$$\overline{M}_1\left(\frac{l}{2}\right) = i\left(1 + 2\frac{9}{32}\right) : \left(1 - \frac{9}{32}\right) = \frac{50i}{23};$$

$$\overline{M}_1(l) = -2i\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{32}\right) : \left(1 - \frac{9}{32}\right) = 73i/23.$$

Elemento 1—2. Según las fórmulas (9.93) y (9.92) tenemos:

$$M_1(0) = 2i\left(1 - 4\frac{9}{32}\right) : \left(1 - \frac{9}{32}\right) = -8i : 23 = \overline{M}_1(l);$$

$$M_1\left(\frac{l}{2}\right) = i\left(2 + 4\frac{9}{32}\right) : \left(1 - \frac{9}{32}\right) = 100i : 23.$$

El diagrama de los momentos ($\overline{M}_1$) está construido en la fig. 204, *a*. De acuerdo con la fórmula (9.93) tenemos que

$$M_P^0(0) = -M_P^0\left(\frac{l}{2}\right) = M_P^0(l) = -P\,6 : 8\left(1 - \frac{9}{32}\right) = -24P : 23.$$

El diagrama de los momentos M_P^0 se da en la fig. 204, *b*. Basándose en los diagramas construidos obtenemos:

$$\frac{r_{11}}{2} = \frac{65i}{23} - \frac{8i}{23} = 57i : 23; \quad \frac{R_{1P}}{2} = -24P : 23; \quad Z_1 = 24P : 57i.$$

El diagrama de los momentos M_P lo construiremos según la igualdad matricial, considerando por convención como positivos los momentos en los

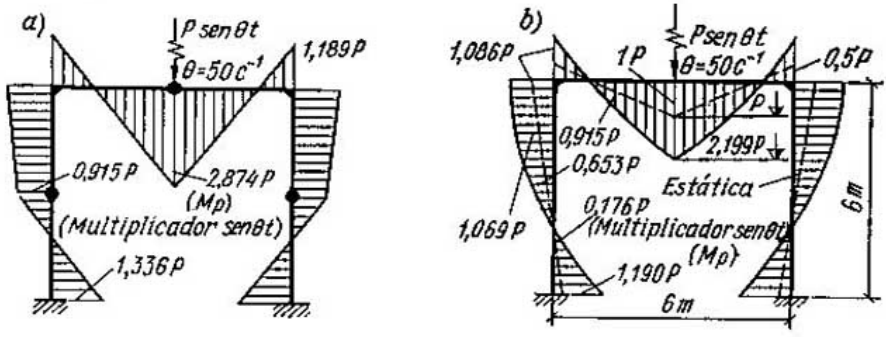


Fig. 205

diagramas $(\overline{M}_1)$ y (M_p^0), trazados por la parte interior del pórtico:

$$M_p = \overline{M}_1 Z_1 + M_p^0;$$

$$M_p = \frac{i}{23} \| 73 \ -50 \ -65 \ -8 \ 100 \ -8 \ -65 \ -50 \ 73 \| 24 \frac{P}{57i} +$$

$$+ \frac{P}{23} \| 0 \ 0 \ 0 \ -24 \ 24 \ -24 \ 0 \ 0 \ 0 \|.$$

O bien, $M_P = 0{,}0183066272 \times \| 73 \ -50 \ -65 \ -8 \ 100 \ -8 \ -65 \ -50 \ 73 \| +$ $+0{,}04347824 \times \| 0 \ 0 \ 0 \ -24 \ 24 \ -24 \ 0 \ 0 \ 0 \| = \| 1{,}33638 \ -0{,}91533 \ -$ $-1{,}1899308 \ -1{,}1899308 \ 2{,}8741404 \ -1{,}1899308 \ -1{,}1899308 \ -0{,}91533 \ 1{,}33638 \| P.$

El diagrama (M_P) está ilustrado en la fig. 205, *a*. En la fig. 205, *b* vemos el diagrama de momentos construido exactamente. Allí mismo se muestra mediante línea de trazos el diagrama referente a la fuerza estática.

§ 82. CÁLCULO DE UN PÓRTICO, CON ELEMENTOS QUE TIENEN MASAS DISTRIBUIDAS Y CONCENTRADAS A LA ACCIÓN DE LA CARGA VIBRATORIA, POR EL MÉTODO DE DESPLAZAMIENTOS [1]

Suponemos que los elementos del pórtico tienen las masas uniformemente distribuidas, mientras que algunos de ellos o todos tienen además una masa concentrada m_1 (fig. 206, *a*). Sobre algunas masas concentradas o sobre todas ellas actúan fuerzas de vibración de una frecuencia igual a θ. Examinamos las oscilaciones persistentes.

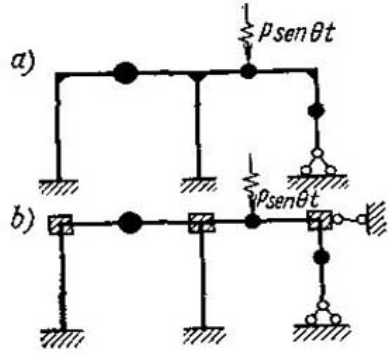


Fig. 206

El sistema fundamental se da en la fig. 206, *b*. Las ecuaciones canónicas son corrientes y se escriben según (9.29). Antes de calcular los coeficientes y miembros independientes, debemos examinar los elementos estándares del sistema fundamental con una masa distribuida y con otra concentrada a la acción de los desplazamientos forzados de los extremos y examinar la carga de vibración de los mismos.

BARRA EMPOTRADA POR DOS EXTREMOS

Sea que una barra tiene, durante las oscilaciones, los desplazamientos de amplitud de los extremos, mostrados en la fig. 199. En presencia de las oscilaciones persistentes los desplazamientos de los extremos del elemento tendrán lugar con la frecuencia de la carga prefijada θ. En el lugar de la masa concentrada actuará la

[1] El párrafo está escrito por la candidata a Doctor en ciencias técnicas, docente I. V. Kiseliova [21].

fuerza de inercia

$$J_{m_1} = m_1\theta^2 y\ (a). \tag{9.95}$$

Consideraremos como preestablecidos los desplazamientos de los extremos de la barra $y\ (0)$, α, $y\ (l)$, y β y como incógnitas, $M\ (0)$ y $Q\ (0)$.

Expresemos las incógnitas $M\ (0)$ y $Q\ (0)$ por medio de los conocidos desplazamientos de los extremos del elemento, para lo cual examinemos la línea elástica de este último.

El 1r tramo, $0 \leqslant z \leqslant a$. Según las expresiones (5.66) y (5.67) tenemos:

$$y_1(z) = y(0)\,A_{sz} + \frac{\alpha}{s}\,B_{sz} - \frac{M(0)}{s^2EJ}\,C_{sz} - \frac{Q(0)}{s^3EJ}\,D_{sz};$$

$$y_1'(z) = sy(0)\,D_{sz} + \alpha A_{sz} - \frac{M(0)}{sEJ}\,B_{sz} - \frac{Q(0)}{s^2EJ}\,C_{sz}.$$

Determinemos la flecha para $z = a$:

$$y(a) = y(0)\,A_{sa} + \frac{\alpha}{s}\,B_{sa} - \frac{M(0)}{s^2EJ}\,C_{sa} - \frac{Q(0)}{s^3EJ}\,D_{sa}.$$

El 2o tramo, $a \leqslant z \leqslant l$. De acuerdo con las expresiones (5.70), (5.71) y (9.95):

$$y_2(z) = y_1(z) + m_1\theta^2 y(a)\,D_{s(z-a)} : s^3EJ;$$

$$y_2'(z) = y_1'(z) + m_1\theta^2 y(a)\,C_{s(z-a)} : s^2EJ.$$

Las condiciones de frontera en el extremo dereho de la barra, para $z = l$, son:

$$y(l) = y(0)\,A_{sl} + \frac{\alpha}{s}\,B_{sl} - \frac{M(0)}{s^2EJ}\,C_{sl} - \frac{Q(0)}{s^3EJ}\,D_{sl} +$$

$$+ \frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}\left[y(0)\,A_{sa} + \frac{\alpha}{s}\,B_{sa} - \frac{M(0)}{s^2EJ}\,C_{sa} - \frac{Q(0)}{s^3EJ}\,D_{sa}\right] D_{s(l-a)};$$

$$y'(l) = \beta = sy(0)\,D_{sl} + \alpha A_{sl} - \frac{M(0)}{sEJ}\,B_{sl} - \frac{Q(0)}{s^2EJ}\,C_{sl} +$$

$$+ \frac{m_1\theta^2}{s^2EJ}\left[y(0)\,A_{sa} + \frac{\alpha}{s}\,B_{sa} - \frac{M(0)}{s^2EJ}\,C_{sa} - \frac{Q(0)}{s^3EJ}\,D_{sa}\right] C_{s(l-a)}.$$

Reduzcamos estas expresiones a la siguiente forma:

$$\frac{M(0)}{s^2EJ}\left[C_{sl} + \frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}\,C_{sa}D_{s(l-a)}\right] + \frac{Q(0)}{s^3EJ}\left[D_{sl} + \frac{m_1\theta^2}{s^2EJ}\,D_{sa}D_{s(l-a)}\right] =$$

$$= y(0)\left[A_{sl} + \frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}\,A_{sa}D_{s(l-a)}\right] + \frac{\alpha}{s}\left[B_{sl} + \frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}\,B_{sa}D_{s(l-a)}\right] - y(l); \tag{9.96}$$

$$\frac{M(0)\,s}{s^2EJ}\left[B_{sl} + \frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}\,C_{sa}C_{s(l-a)}\right] + \frac{Q(0)\,s}{s^3EJ}\left[C_{sl} + \frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}\,D_{sa}C_{s(l-a)}\right] =$$

$$= sy(0)\left[D_{sl} + \frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}\,A_{sa}C_{s(l-a)}\right] + \alpha\left[A_{sl} + \frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}\,B_{sa}C_{s(l-a)}\right] - \beta. \tag{9.97}$$

De las ecuaciones (9.96) y (9.97) tenemos que

$$M(0) = D_M : D;\ Q(0) = D_Q : D, \tag{9.98}$$

donde

$$Ds^4 (EJ)^2 = \Delta = C_{sl}^2 - B_{sl} D_{sl} + \frac{m_1 \theta^2}{s^3 EJ} [C_{sa} C_{sl} D_{s(l-a)} + \\ + C_{sl} C_{s(l-a)} D_{sa} - C_{sa} C_{s(l-a)} D_{sl} - B_{sl} D_{sa} D_{s(l-a)}]; \tag{9.99}$$

$$D_M s^3 EJ = sy(0) \left\{ A_{sl} C_{sl} - D_{sl}^2 + \frac{m_1 \theta^2}{s^3 EJ} [A_{sa} C_{sl} D_{s(l-a)} + \right. \\ + A_{sl} C_{s(l-a)} D_{sa} - D_{sl} D_{sa} D_{s(l-a)} - A_{sa} C_{s(l-a)} D_{sl}] \Big\} + \\ + \alpha \left\{ B_{sl} C_{sl} - A_{sl} D_{sl} + \frac{m_1 \theta^2}{s^3 EJ} [B_{sl} D_{sa} C_{s(l-a)} + C_{sl} B_{sa} D_{s(l-a)} - \right. \\ \left. - A_{sl} D_{sa} D_{s(l-a)} - D_{sl} B_{sa} C_{s(l-a)}] \right\} - \\ - y(l)\, s \left[C_{sl} + \frac{m_1 \theta^2}{s^3 EJ} D_{sa} C_{s(l-a)} \right] + \beta \left[D_{sl} + \frac{m_1 \theta^2}{s^3 EJ} D_{sa} D_{s(l-a)} \right]; \tag{9.100}$$

$$D_Q s^2 FJ = sy(0) \left\{ C_{sl} D_{sl} - A_{sl} B_{sl} + \frac{m_1 \theta^2}{s^3 EJ} [D_{sl} C_{sa} D_{s(l-a)} + \right. \\ + C_{sl} A_{sa} C_{s(l-a)} - A_{sl} C_{sa} C_{s(l-a)} - B_{sl} A_{sa} D_{s(l-a)}] \Big\} + \\ + \alpha \left\{ A_{sl} C_{sl} - B_{sl}^2 + \frac{m_1 \theta^2}{s^3 EJ} [A_{sl} C_{sa} D_{s(l-a)} + C_{sl} B_{sa} C_{s(l-a)} - \right. \\ \left. - B_{sl} C_{sa} C_{s(l-a)} - B_{sa} B_{sl} D_{s(l-a)}] \right\} - \beta \left[C_{sl} + \frac{m_1 \theta^2}{s^3 EJ} C_{sa} D_{s(l-a)} \right] + \\ + sy(l) \left[B_{sl} + \frac{m_1 \theta^2}{s^3 EJ} C_{sa} C_{s(l-a)} \right]. \tag{9.101}$$

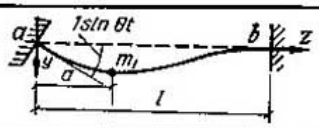
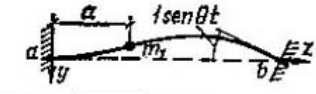
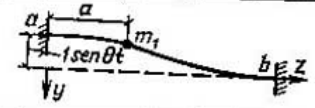
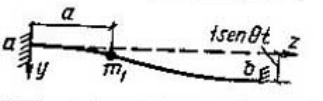
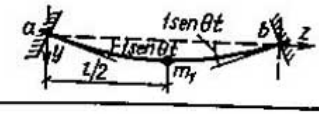
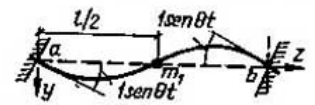
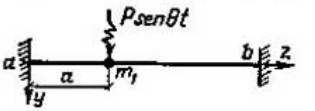
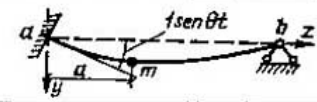
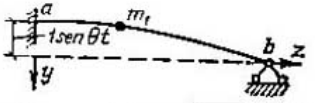
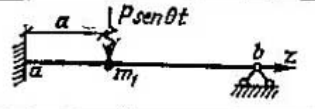
Aprovechando las expresiones (9.98)—(9.101), se pueden obtener los parámetros iniciales de $M(0)$ y $Q(0)$ para diferentes desplazamientos unitarios de los extremos del elemento, los cuales están anotados en la tabla 9. En esta tabla tenemos:

$$\Delta = C_{sl}^2 - B_{sl} D_{sl} + \frac{m_1 \theta^2}{s^3 EJ} [C_{sa} C_{sl} D_{s(l-a)} + \\ + C_{s(l-a)} C_{sl} D_{sa} - C_{sa} C_{s(l-a)} D_{sl} - B_{sl} D_{sa} D_{s(l-a)}]; \tag{9.102}$$

$$\frac{4EJ}{l} \Phi_1^* = \Phi_1 = \frac{sEJ}{\Delta} \left\{ B_{sl} C_{sl} - A_{sl} D_{sl} + \frac{m_1 \theta^2}{s^3 EJ} [B_{sa} C_{sl} D_{s(l-a)} + \right. \\ \left. + B_{sl} C_{s(l-a)} D_{sa} - A_{sl} D_{sa} D_{s(l-a)} - B_{sa} C_{s(l-a)} D_{sl}] \right\}; \tag{9.103}$$

$$-\frac{6EJ}{l^2} \Phi_2^* = \Phi_2 = \frac{s^2 EJ}{\Delta} \left\{ A_{sl} C_{sl} - B_{sl}^2 + \frac{m_1 \theta^2}{s^3 EJ} [B_{sa} C_{s(l-a)} C_{sl} + \right. \\ \left. + A_{sl} C_{sa} D_{s(l-a)} - B_{sa} B_{sl} D_{s(l-a)} - B_{sl} C_{sa} C_{s(l-a)}] \right\}; \tag{9.104}$$

Tabla 9 $i = EJ : l$

N°		Valores de amplitud	
		$M_{ab} = M(0)$	$Q_{ab} = Q(0)$
1		$4i\Phi_1^* = \Phi_1$ Φ_1 según (9.103)	$-\frac{6i}{l}\Phi_2^* = \Phi_2$ Φ_2 según (9.104)
2		$2i\Phi_3^* = \Phi_3$ Φ_3 según (9.105)	$-\frac{6i}{l}\Phi_4^* = \Phi_4$ Φ_4 según (9.106)
3		$-\frac{6i}{l}\Phi_5^* = \Phi_5$ Φ_5 según (9.107)	$\frac{12i}{l^2}\Phi_6^* = \Phi_6$ Φ_6 según (9.108)
4		$-\frac{6i}{l}\Phi_7^* = \Phi_7$ Φ_7 según (9.109)	$\frac{12i}{l^2}\Phi_8^* = \Phi_8$ Φ_8 según (9.110)
5		$2i\Phi_9^* = \Phi_9$ Φ_9 según (9.112)	Φ_{10} Φ_{10} según (9.113)
6		$6i\Phi_{11} = \Phi_{11}$ Φ_{11} según (9.115)	$-\frac{12i}{l}\Phi_{12}^* = \Phi_{12}$ Φ_{12} según (9.116)
7		Φ_{15} según (9.120)	Φ_{16} según (9.121)
8		$3i\Phi_{17}^* = \Phi_{17}$ Φ_{17} según (9.130)	$-\frac{3i}{l}\Phi_{18}^* = \Phi_{18}$ Φ_{18} según (9.131)
9		$-\frac{3i}{l}\Phi_{20}^* = \Phi_{20}$ Φ_{20} según (9.132)	$\frac{3i}{l^2}\Phi_{21}^* = \Phi_{21}$ Φ_{21} según (9.133)
10		$-\frac{3i}{l}\Phi_{23}^* = \Phi_{23}$ Φ_{23} según (9.134)	$\frac{3i}{l^2}\Phi_{24}^* = \Phi_{24}$ Φ_{24} según (9.135)
11		Φ_{26} según (9.136)	Φ_{27} según (9.137)

$$\frac{2EJ}{l}\Phi_3^* = \Phi_3 = \frac{sEJ}{\Delta}\left[D_{sl} + \frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}D_{sa}D_{s(l-a)}\right]; \qquad (9.105)$$

$$-\frac{6EJ}{l^2}\Phi_4^* = \Phi_4 = -\frac{s^2EJ}{\Delta}\left[C_{sl} + \frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}C_{sa}D_{s(l-a)}\right]; \qquad (9.106)$$

$$-\frac{6EJ}{l^2}\Phi_5^* = \Phi_5 = -\frac{s^2EJ}{\Delta}\left[C_{sl} + \frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}C_{s(l-a)}D_{sa}\right]; \qquad (9.107)$$

$$\frac{12EJ}{l^3}\Phi_6^* = \Phi_6 = \frac{s^3EJ}{\Delta}\left[B_{sl} + \frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}C_{sa}C_{s(l-a)}\right]; \qquad (9.108)$$

$$-\frac{6EJ}{l^2}\Phi_7^* = \Phi_7 = \frac{s^2EJ}{\Delta}\left\{D_{sl}^2 - A_{sl}C_{sl} + \frac{m_1\theta^2}{s^2EJ}[A_{sa}C_{s(l-a)}D_{sl} + \right.$$

$$\left. + D_{sa}D_{sl}D_{s(l-a)} - A_{sa}C_{sl}D_{s(l-a)} - A_{sl}C_{s(l-a)}D_{sa}]\right\}; \qquad (9.109)$$

$$\frac{12EJ}{l^3}\Phi_8^* = \Phi_8 = \frac{s^3EJ}{\Delta}\left\{A_{sl}B_{sl} - C_{sl}D_{sl} + \frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}[A_{sa}B_{sl}D_{s(l-a)} + \right.$$

$$\left. + A_{sl}C_{sa}C_{s(l-a)} - A_{sa}C_{sl}C_{s(l-a)} - C_{sa}D_{sl}D_{s(l-a)}]\right\}. \qquad (9.110)$$

Durante el giro simétrico simultáneo de los extremos del elemento, cuando $a = l/2$, tenemos que

$$M(0) = \Phi_1(\lambda) - \Phi_3(\lambda); \qquad Q(0) = \Phi_2(\lambda) - \Phi_4(\lambda). \qquad (9.111)$$

Los mismos valores se obtienen en forma más sencilla al resolver directamente el problema del giro simétrico de los nudos, valiéndose de la simetría [12]:

$$M(0) = \frac{2EJ}{l}\Phi_9^* = \Phi_9 = \frac{i\lambda}{D_1}\left[A_{\lambda/2}^2 - C_{\lambda/2}^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{m_1\theta^2}{2s^3EJ}(A_{\lambda/2}D_{\lambda/2} - B_{\lambda/2}C_{\lambda/2})\right]; \qquad (9.112)$$

$$Q(0) = \Phi_{10} = \frac{i\lambda^2}{lD_1}\left[B_{\lambda/2}C_{\lambda/2} - A_{\lambda/2}D_{\lambda/2} + \frac{m_1\theta^2}{2s^3EJ}(B_{\lambda/2}^2 - A_{\lambda/2}C_{\lambda/2})\right]; \qquad (9.113)$$

donde

$$D_1 = A_{\lambda/2}B_{\lambda/2} - C_{\lambda/2}D_{\lambda/2} + \frac{m_1\theta^2}{2s^3EJ}(B_{\lambda/2}D_{\lambda/2} - C_{\lambda/2}^2). \qquad (9.114)$$

Durante el giro antisimétrico simultáneo de los nudos, cuando $a = l/2$, la masa m_1 permanece en el mismo lugar, y por lo tanto tenemos que:

$$M(0) = \frac{6EJ}{l}\Phi_{11}^* = \Phi_{11} = \lambda i\,[(B_{\lambda/2}^2 - D_{\lambda/2}^2) : (B_{\lambda/2}C_{\lambda/2} - A_{\lambda/2}D_{\lambda/2})] =$$

$$4i\mu_1(\lambda) + 2i\mu_2(\lambda); \qquad (9.115)$$

$$Q(0) = \frac{12EF}{l^2}\Phi_{12}^* = \Phi_{12} = \frac{\lambda^2 t}{l}[(C_{\lambda/2}D_{\lambda/2} - A_{\lambda/2}B_{\lambda/2}) :$$

$$: (B_{\lambda/2}C_{\lambda/2} - A_{\lambda/2}D_{\lambda/2})] = -\frac{6t}{l}e_1(\lambda) - \frac{6t}{l}e_2(\lambda). \qquad (9.116)$$

Senalemos que

$$\frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}=\frac{m_1 s}{m}=\frac{m_1\lambda}{ml}. \tag{9.117}$$

Examinemos ahora la acción de la fuerza vibratoria sobre la masa m_1 (fig. 201).

El 1r tramo: $0\leqslant z\leqslant a$. De acuerdo con las expresiones (5.66) y (5.67) tenemos:

$$y_1(z)=-\frac{M(0)}{s^2EJ}C_{sz}-\frac{Q(0)}{s^3EJ}D_{sz};$$

$$y_1'(z)=-\frac{M(0)}{sEJ}B_{sz}-\frac{Q(0)}{s^2EJ}C_{sz}.$$

Para $z=a$ tenemos que

$$y(a)=-\frac{M(0)}{s^2EJ}C_{sa}-\frac{Q(0)}{s^3EJ}D_{sa}.$$

El 2º tramo: $a\leqslant z\leqslant l$. De acuerdo con las expresiones (5.70) y (5.71) y teniendo en cuenta (9.95) tenemos:

$$y_2(z)=-\frac{M(0)}{s^2EJ}C_{sz}-\frac{Q(0)}{s^3EJ}D_{sz}+\left[\left(-\frac{M(0)}{s^2EJ}C_{sa}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{Q(0)}{s^3EJ}D_{sa}\right)m_1\theta^2+P\right]\frac{D_{s(z-a)}}{s^3EJ};$$

$$y_2'(z)=-\frac{M(0)}{s^2EJ}sB_{sz}-\frac{Q(0)}{s^3EJ}sC_{sz}+\left[\left(-\frac{M(0)}{s^2EJ}C_{sa}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{Q(0)}{s^3EJ}D_{sa}\right)m_1\theta^2+P\right]\frac{sC_{s(z-a)}}{s^3EJ}.$$

Compongamos las condiciones de frontera para el extremo derecho de la barra:

$$y(l)=-\frac{M(0)}{s^2EJ}C_{sl}-\frac{Q(0)}{s^3EJ}D_{sl}+\left[\left(-\frac{M(0)}{s^2EJ}C_{sa}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{Q(0)}{s^3EJ}D_{sa}\right)\frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}+\frac{P}{s^3EJ}\right]D_{s(l-a)}=0;$$

$$y'(l)=-\frac{M(0)}{s^3EJ}sB_{sl}-\frac{Q(0)s}{s^3EJ}C_{sl}+\left[\left(-\frac{M(0)}{s^2EJ}C_{sa}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{Q(0)}{s^3EJ}D_{sa}\right)\frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}+\frac{P}{s^3EJ}\right]sC_{s(l-a)}=0.$$

Representámoslas en la siguiente forma:

$$\frac{M(0)}{s^2EJ}\left[C_{sl}+\frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}C_{sa}D_{s(l-a)}\right]+\frac{Q(0)}{s^3EJ}\left[D_{sl}+\right.$$
$$\left.+\frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}D_{sa}D_{s(l-a)}\right]=\frac{P}{s^3EJ}D_{s(l-a)}; \tag{9.118}$$

$$\frac{M(0)}{s^2EJ}s\left[B_{sl}+\frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}C_{sa}C_{s(l-a)}\right]+\frac{Q(0)}{s^3EJ}s\left[C_{sl}+\right.$$
$$\left.+\frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}D_{sa}C_{s(l-a)}\right]=\frac{sPC_{s(l-a)}}{s^3EJ}. \tag{9.119}$$

De aquí hallamos:

$$M(0) = \Phi_{16} = \frac{P}{s\Delta}[C_{sl}D_{s(l-a)} - D_{sl}C_{s(l-a)}]; \qquad (9.120)$$

$$Q(0) = \Phi_{16} = \frac{P}{\Delta}[C_{sl}C_{s(l-a)} - B_{sl}D_{s(l-a)}], \qquad (9.121)$$

donde Δ se calcula según (9.102). Los datos obtenidos están insertados en la tabla 9. Para $a = l/2$ las fórmulas (9.120), (9.121) pueden representarse además en la siguiente forma:

$$M(0) = -PC_{\lambda/2} : 2sD_1; \qquad (9.122)$$

$$Q(0) = PB_{\lambda/2} : 2D_1. \qquad (9.123)$$

BARRA EMPOTRADA POR UN EXTREMO Y APOYADA ARTICULADAMENTE POR EL OTRO (FIG. 200)

a) Desplazamientos forzados de los extremos de la barra (fig. 200).

El primer tramo: $0 \leqslant z \leqslant a$. De acuerdo con las expresiones (5.66) y (5.68) tenemos:

$$y_1(z) = y(0)A_{sz} + \frac{\alpha}{s}B_{sz} - \frac{M(0)}{s^2EJ}C_{sz} - \frac{Q(0)}{s^3EJ}D_{sz};$$

$$M_1(z) = -s^2EJy(0)C_{sz} - EJs\alpha D_{sz} + M(0)A_{sz} + \frac{Q(0)}{s}B_{sz};$$

Para $z = a$ tenemos que

$$y(a) = y(0)A_{sa} + \frac{\alpha}{s}B_{sa} - \frac{M(0)}{s^2EJ}C_{sa} - \frac{Q(0)}{s^3EJ}D_{sa}.$$

El 2º tramo: $a \leqslant z \leqslant l$. Haciendo uso de las expresiones (5.70) y (5.72) y teniendo en cuenta (9.95), tenemos:

$$y_2(z) = y_1(z) + \frac{m_1\theta^2 y(a)}{s^3EJ}D_{s(z-a)};$$

$$M_2(z) = M_1(z) - m_1\theta^2 y(a)\frac{B_{s(z-a)}}{s}.$$

Las condiciones de frontera del extremo derecho son:

$$y(l) = y(0)A_{sl} + \frac{\alpha}{s}B_{sl} - \frac{M(0)}{s^2EJ}C_{sl} - \frac{Q(0)}{s^3EJ}D_{sl} +$$

$$+ \frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}\left[y(0)A_{sa} + \frac{\alpha}{s}B_{sa} - \frac{M(0)}{s^2EJ}C_{sa} - \frac{Q(0)}{s^3EJ}D_{sa}\right]D_{s(l-a)};$$

$$M(l) = -s^2EJy(0)C_{sl} - EJs\alpha D_{sl} + M(0)A_{sl} + Q(0)\frac{B_{sl}}{s} -$$

$$-\frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}\left[y(0)A_{sa} + \frac{\alpha}{s}B_{sa} - \frac{M(0)}{s^2EJ}C_{sa} - \frac{Q(0)}{s^3EJ}D_{sa}\right]s^2EJB_{s(l-a)} = 0.$$

Escribámoslas en la siguiente forma:

$$\frac{M(0)}{s^2EJ}\left[C_{sl}+\frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}C_{sa}D_{s(l-a)}\right]+\frac{Q(0)}{s^3EJ}\left[D_{sl}+\frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}D_{sa}D_{s(l-a)}\right]=$$
$$=y(0)\left[A_{sl}+\frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}A_{sa}D_{s(l-a)}\right]+$$
$$+\frac{\alpha}{s}\left[B_{sl}+\frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}B_{sa}D_{s(l-a)}\right]-y(l); \qquad (9.124)$$

$$M(0)\left[A_{sl}+\frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}C_{sa}B_{s(l-a)}\right]+\frac{Q(0)}{s}\left[B_{sl}+\frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}D_{sa}B_{s(l-a)}\right]=$$
$$=y(0)\left[s^2EJC_{sl}+\frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}A_{sa}B_{s(l-a)}s^2EJ\right]+$$
$$+\frac{\alpha}{s}\left[s^2EJD_{sl}+\frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}B_{sa}B_{s(l-a)}s^2EJ\right]. \qquad (9.125)$$

De aquí obtenemos:

$$M(0)=D_M:D_2; \qquad Q(0)=D_Q:D_2, \qquad (9.126)$$

donde

$$\Delta_1=s^3EJD_2=\left\{B_{sl}C_{sl}-A_{sl}D_{sl}+\frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}\left[B_{sl}C_{sa}D_{s(l-a)}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+C_{sl}D_{sa}B_{s(l-a)}-A_{sl}D_{sa}D_{s(l-a)}-B_{s(l-a)}C_{sa}D_{sl}\right]\right\}; \qquad (9.127)$$

$$D_Ms=y(0)\left\{A_{sl}B_{sl}-C_{sl}D_{sl}+\frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}\left[A_{sl}B_{s(l-a)}D_{sa}+\right.\right.$$
$$\left.+B_{sl}A_{sa}D_{s(l-a)}-C_{sl}D_{sa}D_{s(l-a)}-A_{sa}B_{s(l-a)}D_{sl}\right]\Big\}+$$
$$+\frac{\alpha}{s}\left\{B_{sl}^2-D_{sl}^2+\frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}B_{sl}D_{sa}B_{s(l-a)}+B_{sl}B_{sa}D_{s(l-a)}-\right.$$
$$-D_{sl}D_{sa}D_{s(l-a)}-B_{sa}B_{s(l-a)}D_{sl}\Big]\Big\}-$$
$$-y(l)\left[B_{sl}+\frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}B_{s(l-a)}D_{sa}\right]; \qquad (9.128)$$

$$D_Q=y(0)\left\{C_{sl}^2-A_{sl}^2+\frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}\left[C_{sl}A_{sa}B_{s(l-a)}+C_{sl}C_{sa}D_{s(l-a)}-\right.\right.$$
$$\left.-A_{sl}A_{sa}D_{s(l-a)}-A_{sl}B_{s(l-a)}C_{sa}\right]\Big\}+\frac{\alpha}{s}\left\{C_{sl}D_{sl}-A_{sl}B_{sl}+\right.$$
$$+\frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}\left[C_{sl}B_{sa}B_{s(l-a)}+C_{sa}D_{s(l-a)}D_{sl}-A_{sl}B_{sa}D_{s(l-a)}-\right.$$
$$\left.\left.-B_{s(l-a)}C_{sl}C_{sa}\right]\right\}+y(l)\left[A_{sl}+\frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}B_{s(l-a)}C_{sa}\right]. \qquad (9.129)$$

Basándose en las expresiones (9.126)—(9.129) podemos obtener los parámetros iniciales debidos a diferentes desplazamientos unitarios de los extremos (véase la tabla 9). En esta tabla las funciones

tienen las expresiones siguientes:

$$\frac{3EJ}{l}\Phi_{17}^{*}=\Phi_{17}=\frac{sEJ}{\Delta_1}\left\{B_{sl}^2-D_{sl}^2+\frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}\left[B_{sa}B_{sl}D_{s(l-a)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-B_{s(l-a)}B_{sl}D_{sa}-B_{sa}B_{s(l-a)}D_{sl}-D_{sl}D_{sa}D_{s(l-a)}\right]\right\}; \quad (9.130)$$

$$-\frac{3EJ}{l^2}\Phi_{18}^{*}=\Phi_{18}=\frac{s^2EJ}{\Delta_1}\left\{C_{sl}D_{sl}-A_{sl}B_{sl}+\frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}\left[C_{sa}D_{sl}D_{s(l-a)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+B_{sa}B_{s(l-a)}C_{sl}-A_{sl}B_{sa}D_{s(l-a)}-B_{sl}B_{s(l-a)}C_{sa}\right]\right\}; \quad (9.131)$$

$$-\frac{3EJ}{l^2}\Phi_{20}^{*}=\Phi_{20}=-\frac{s^2EJ}{\Delta_1}\left[B_{sl}+\frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}B_{s(l-a)}D_{sa}\right]; \quad (9.132)$$

$$\frac{3EJ}{l^3}\Phi_{21}^{*}=\Phi_{21}=\frac{s^3EJ}{\Delta_1}\left[A_{sl}+\frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}B_{s(l-a)}C_{sa}\right]; \quad (9.133)$$

$$-\frac{3EJ}{l^2}\Phi_{23}^{*}=\Phi_{23}=\frac{s^2EJ}{\Delta_1}\left\{C_{sl}D_{sl}-A_{sl}B_{sl}+\frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}\left[A_{sa}B_{s(l-a)}D_{sl}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+C_{sl}D_{sa}D_{s(l-a)}-A_{sa}B_{sl}D_{s(l-a)}-A_{sl}B_{s(l-a)}D_{sa}\right]\right\}; \quad (9.134)$$

$$\frac{3EJ}{l^3}=\Phi_{24}^{*}=\Phi_{24}=\frac{s^3EJ}{\Delta_1}\left\{A_{sl}^2-C_{sl}^2+\frac{m_1\theta^2}{s^3EJ}\left[A_{sl}B_{s(l-a)}C_{sa}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+A_{sa}A_{sl}D_{s(l-a)}-A_{sa}B_{s(l-a)}C_{sl}-C_{sa}C_{sl}D_{s(l-a)}\right]\right\}. \quad (9.135)$$

b) Acción de la fuerza de vibración sobre la masa m_1 (fig. 202).

El 1r tramo: $0 \leqslant z \leqslant a$. De acuerdo con las expresiones (5.66) y (5.68) tenemos:

$$y_1(z)=-\frac{M(0)}{s^2EJ}C_{sz}-\frac{Q(0)}{s^3EJ}D_{sz};$$

$$M_1(z)=M(0)\,A_{sz}+\frac{Q(0)}{s}B_{sz};$$

$$y(a)=-\frac{M(0)}{s^2EJ}C_{sa}-\frac{Q(0)}{s^3EJ}D_{sa}.$$

El 2º tramo: $a \leqslant z \leqslant l$. Valiéndose de las expresiones (5.70) y (5.72) y tomando en consideración (9.95) tenemos:

$$y_2(z)=-\frac{M(0)}{s^2EJ}C_{sz}-\frac{Q(0)}{s^3EJ}D_{sz}+$$

$$+\left[P+m_1\theta^2-\frac{M(0)}{s^2EJ}C_{sa}-\frac{Q(0)}{s^3EJ}D_{sa}\right]D_{s(z-a)}:s^3EJ;$$

$$M_2(z)=M(0)\,A_{sz}+\frac{Q(0)}{s}B_{sz}-$$

$$-\left[P+m_1\theta^2\left(-\frac{M(0)}{s^2EJ}C_{sa}-\frac{Q(0)}{s^3EJ}D_{sa}\right)\right]\frac{B_{s(z-a)}}{s}.$$

Las condiciones de frontera del extremo derecho son:

$$y(l) = -\frac{M(0)}{s^2EJ} C_{sl} - \frac{Q(0)}{s^3EJ} D_{sl} +$$

$$+\left[P + m_1\theta^2 \left(-\frac{M(0)}{s^2EJ} C_{sa} - \frac{Q(0)}{s^3EJ} D_{sa}\right)\right] D_{s(l-a)} : s^3DJ = 0;$$

$$M(l) = M(0) A_{sl} + \frac{Q(0)}{s} B_{sl} -$$

$$-\left[P + m_1\theta^2 \left(-\frac{M(0)}{s^2EJ} C_{sa} - \frac{Q(0)}{s^3EJ} D_{sa}\right)\right] \frac{B_{s(l-a)}}{s} = 0.$$

Solucionando estas ecuaciones, obtendremos:

$$M(0) = \frac{P}{s\Delta_1} [B_{sl} D_{s(l-a)} - B_{s(l-a)} D_{sl}] = \Phi_{26}; \qquad (9.136)$$

$$Q(0) = \frac{P}{\Delta_1} [B_{s(l-a)} C_{sl} - A_{sl} D_{s(l-a)}] = \Phi_{27}. \qquad (9.137)$$

Estos datos también están inscritos en la tabla 9.

Ejemplo 60. Construir el diagrama de momentos flectores causados por la carga de vibración en el pórtico examinado en el ejemplo 54 (véase la fig. 165), si en el lugar de acción de la fuerza se adiciona la masa concentrada $m_1 = s_{ab}^4 EJ : \theta^2$.

$$s_{ab} = 0{,}6 \text{ m}^{-1}; \quad s_{ac} = 0{,}3 \text{ m}^{-1}; \quad s_{ad} = 0{,}5 \text{ m}^{-1}; \quad \frac{m\theta^2}{s_{ab}^3 EJ} = 0{,}6.$$

La ecuación canónica es: $r_{11} Z_1 + R_{1p} = 0$.
El coeficiente r_{11} considera los datos del ejemplo 54 y de la tabla 9.

$$r_{11} = \Phi_1 + 4EJ \left[\frac{1}{l_{ac}} \mu_1(\lambda_{ac}) + \frac{1}{l_{ad}} \mu_1(\lambda_{ad})\right];$$

$$\lambda_{ab} = 3{,}6, \quad \lambda_{ac} = 1{,}2, \quad \lambda_{ad} = 2{,}0;$$

$$A_{\lambda_{ab}} = 8{,}70801; \quad A_{\frac{\lambda_{ab}}{2}} = 1{,}44013;$$

$$B_{\lambda_{ab}} = 8{,}92147; \quad B_{\frac{\lambda_{ab}}{2}} = 1{,}95801;$$

$$C_{\lambda_{ab}} = 9{,}60477; \quad C_{\frac{\lambda_{ab}}{2}} = 1{,}66823;$$

$$D_{\lambda_{ab}} = 9{,}36399, \quad D_{\frac{\lambda_{ab}}{2}} = 0{,}98416.$$

Calculemos r_{11}. Según las fórmulas (9.102) y (9.103) tenemos:

$$\Delta = \{9{,}60477^2 - 8{,}92147 \cdot 9{,}36399 + 0{,}6\,[1{,}66823 \cdot 9{,}60477 \cdot 0{,}98416 +$$
$$+ 1{,}66723 \cdot 9{,}60477 \cdot 0{,}98416 - 1{,}66823^2 \cdot 9{,}36399 - 8{,}92147 \cdot 0{,}98416^2]\} = 6{,}81348;$$

$$\Phi_1 = \frac{0{,}6EJ}{6{,}81348} \{8{,}92147 \cdot 9{,}60477 - 8{,}70801 \cdot 9{,}36399 +$$
$$+ 0{,}6\,[1{,}95801 \cdot 9{,}60477 \cdot 0{,}98416 + 8{,}92147 \cdot 1{,}66823 \cdot 0{,}98416 -$$
$$- 8{,}70801 \cdot 0{,}98416^2 - 1{,}95801 \cdot 1{,}66823 \cdot 9{,}36399]\} =$$
$$= \frac{0{,}6 \cdot 0{,}62778EJ}{6{,}81348} = 0{,}05528EJ;$$

$$r_{11} = 0{,}05528EJ + 4EJ\,(0{,}99471/4 + 0{,}96079/4) = 2{,}01078EJ.$$

Según la fórmula (9.120) tenemos que

$$M\,(0) = \frac{P}{0{,}6}\,\frac{9{,}60477 \cdot 0{,}98416 - 9{,}36399 \cdot 1{,}66823}{6{,}81348} = -1{,}50893P;$$

$$R_{1P} = M\,(0) = -1{,}50893P.$$

El ángulo de giro del nudo es: $Z_1 = -R_{1p}/r_{11} = 1{,}50893\ P/2{,}01078\ EJ = 0{,}75042\ P/EJ$.

Construimos el diagrama de los momentos (fig. 207): para los elementos ac y ad el diagrama de momentos será idéntico al del ejemplo 54 (fig. 166),

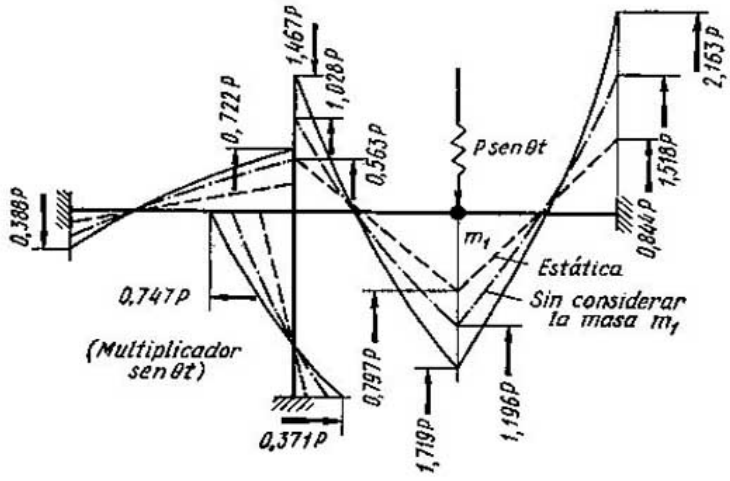


Fig. 207

pero sus valores crecerán tantas veces cuantas veces Z_1 obtenido aquí es mayor que Z_1 hallado en el ejemplo 54, es decir, en $0{,}75042P/EJ : 0{,}525P/EJ = 1{,}4293$ veces.

Los parámetros iniciales para el elemento ab son: $y\,(0) = 0$;

$$y'\,(0) = Z_1 = 0{,}75042 \times P/EJ;$$

$$M\,(0) = \Phi_1 Z_1 + R_{1P} = 0{,}05528 \cdot 0{,}75042P - 1{,}50893P = -1{,}46745P;$$

$$Q(0) = \Phi_2 Z_1 + \Phi_{16}.$$

Según la fórmula (9.104), para $\Delta = 6{,}81348$, obtendremos:

$$\Phi_2 = \frac{0{,}6^2 EJ}{6{,}81348}\,\{8{,}70801 \cdot 9{,}60477 - 8{,}92147^2 +$$

$$+ 0{,}6\,[1{,}95801 \cdot 9{,}60477 \cdot 1{,}66823 + 8{,}70801 \cdot 1{,}66823 \cdot 0{,}98416 -$$

$$- 1{,}95801 \cdot 8{,}92147 \cdot 0{,}98416 - 8{,}92147 \cdot 1{,}66823^2]\} = 0{,}32948EJ.$$

Según la fórmula (9.121) tenemos que

$$\Phi_{16} = \frac{(9{,}60477 \cdot 1{,}66823 - 8{,}92147 \cdot 0{,}98416)\,P}{6{,}81348} = 1{,}063P;$$

$$Q\,(0) = 0{,}32948 \cdot 0{,}75042P + 1{,}063P = 1{,}31025P.$$

El 1r tramo: $0 \leqslant z \leqslant l/2$. Según las expresiones (5.66)—(5.68) obtenemos:

$$y_1(z) = \frac{0{,}75042P}{0{,}6EJ} B_{sz} + \frac{1{,}46745P}{0{,}6^2EJ} C_{sz} - \frac{1{,}31025P}{0{,}6^3EJ} D_{sz};$$

$$y_1'(z) = \frac{0{,}75042P}{EJ} A_{sz} + \frac{1{,}46745P}{0{,}6EJ} B_{sz} - \frac{1{,}31025P}{0{,}6^3EJ} C_{sz};$$

$$M_1(z) = -0{,}6 \cdot 0{,}75042PD_{sz} - 1{,}46745PA_{sz} + \frac{1{,}31025P}{0{,}6} B_{sz} =$$

$$= -0{,}450252PD_{sz} - 1{,}46745PA_{sz} + 2{,}18375PB_{sz};$$

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \left(\frac{0{,}75042P \cdot 1{,}95801}{0{,}6} + \frac{1{,}46745 \cdot 1{,}66823}{0{,}36} - \right.$$

$$\left. - \frac{1{,}31025 \cdot 0{,}98416}{0{,}216}\right) \frac{P}{EJ} = 3{,}27903P/EJ.$$

El 2º tramo: $l/2 \leqslant z \leqslant l$. Basándose en las expresiones (5.70)—(5.72) y tomando en consideración (9.95), tenemos que

$$y_2(z) = y_1(z) + \left[\frac{m\theta^2}{\overset{3}{a}ab\,EJ}\, y\left(\frac{l}{2}\right) + \frac{P}{\overset{3}{s}abEJ}\right] D_{s\left(z-\frac{l}{2}\right)} =$$

$$= y_1(z) + \left(0{,}6 \cdot 3{,}27903 \frac{P}{EJ} + \frac{P}{0{,}6^3EJ}\right) D_{s\left(z-\frac{l}{2}\right)};$$

$$y_2(z) = y_1(z) + 6{,}59708 \frac{P}{EJ} D_{s\left(z-\frac{l}{2}\right)};$$

$$y_2'(z) = y_1'(z) + 6{,}59708 \cdot 0{,}6 \frac{P}{EJ} C_{s\left(z-\frac{l}{2}\right)};$$

$$M_2(z) = M_1(z) - 6{,}59708 \cdot 0{,}6^2PB_{s\left(z-\frac{l}{2}\right)} = M_1(z) - 2{,}3749488PB_{s\left(z-\frac{l}{2}\right)}.$$

Verifiquemos las condiciones de frontera del extremo derecho:

$$y(l) = \left(\frac{0{,}75042 \cdot 8{,}92147}{0{,}6} - \frac{1{,}46745 \cdot 9{,}60477}{0{,}36} - \frac{1{,}31025 \cdot 9{,}36399}{0{,}216} + \right.$$

$$\left. + 6{,}59708 \cdot 0{,}98416\right) \frac{P}{EJ} = 0{,}00039 \frac{P}{EJ} \approx 0;$$

$$y'(l) = \left(0{,}75042 \cdot 8{,}70801 + \frac{1{,}46745 \cdot 8{,}92147}{0{,}6} - \frac{1{,}31025 \cdot 9{,}60477}{0{,}36} + \right.$$

$$\left. + 6{,}59708 \cdot 06 \cdot 1{,}66823\right) \frac{E}{EJ} = 0{,}00027 \frac{P}{EJ} \approx 0.$$

Las ordenadas del diagrama de momentos son:

1) $z = 0$; $M(0) = -1{,}46745P$ (se ha calculado de antemano);

2) $z = l/4$; $M(l/4) = (-0{,}450252 \cdot 0{,}12159 - 1{,}46745 \cdot 1{,}02735 + 2{,}18375 \cdot 0{,}90492)\, P = 0{,}41376P$;

3) $z = l/2$; $M(l/2) = (-0{,}450252 \cdot 0{,}98146 - 1{,}46745 \cdot 1{,}44013 + 2{,}18375 \cdot 1{,}95801)\, P = 1{,}71936P$;

4) $z = 3l/4$; $M(3l/4) = (-0{,}450252 \cdot 3{,}48944 - 1{,}46745 \cdot 3{,}08470 + 2{,}18375 \cdot 3{,}91682)\, P - 2{,}3749488\ P \cdot 0{,}90492 = 0{,}30789P$;

5) $z = l$; $M(l) = (-0{,}450252 \cdot 9{,}36399 - 1{,}46745 \cdot 8{,}70801 +$
$+ 2{,}18375 \cdot 8{,}92147)\, P - 2{,}3749488\, P \cdot 1{,}95801 = -2{,}16263P$.

El diagrama de los momentos está construido en la fig. 207. Equilibrio del nudo:

$$1{,}4293\,(0{,}505 + 0{,}522)\, P - 1{,}46745\, P = (1{,}46799 - 1{,}46745)\, P =$$
$$= 0{,}00054\, P \approx 0.$$

Ejemplo 61. Determinar las primeras frecuencias de oscilaciones propias y construir los diagramas de momentos flectores causados en el pórtico por la fuerza giratoria P (fig. 208, *a*), siendo los datos: $EJ = 4 \cdot 10^7$ N·m²; el peso

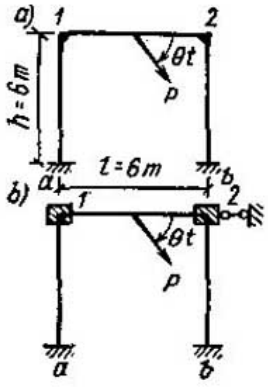


Fig. 208

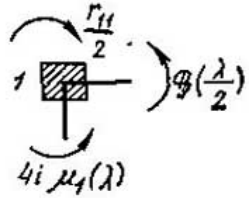


Fig. 209

de cada uno de los elementos con la carga $G = 78\,480$ N; el peso de motor $G_1 = 15\,696$ N; $g = 9{,}81$ m/s²; la masa $M = 8000$ kg; la masa lineal $m = 8000 : 6$ kg/m; la frecuencia de la carga $\theta = 10$; 14,23 y 14,83 s^{-1}.

El cálculo lo realizamos por el método de desplazamientos. El sistema fundamental se da en la fig. 208, *b*.

1. OSCILACIONES PROPIAS

En el sistema simétrico las oscilaciones propias son simétricas y antisimétricas. Estudiamos éstas por separado.

A) OSCILACIONES SIMÉTRICAS

Se adopta como incógnita Z_1 el giro simétrico simultáneo de los nudos *1* y *2*. La ecuación canónica es $r_{11}Z_1 = 0$. Cuando Z_1 es diferente a cero, tiene que ser $r_{11} = 0$.

Del equilibrio del primer nudo cortado en estado unitario debido al giro de dos nudos (fig. 209), según los datos de la tabla 6 y las fórmulas (9.112)—(9.117) tenemos:

$$\frac{r_{11}}{2} = 4i\mu_1(\lambda) + i\lambda \frac{A^2_{\lambda/2} - C^2_{\lambda/2} + \frac{\lambda}{10}(A_{\lambda/2}D_{\lambda/2} - B_{\lambda/2}C_{\lambda/2})}{A_{\lambda/2}B_{\lambda/2} - C_{\lambda/2}D_{\lambda/2} + \frac{\lambda}{10}(B_{\lambda/2}D_{\lambda/2} - C^2_{\lambda/2})} = 0.$$

Por medio de la elección determinamos la primera raíz de la ecuación $\lambda_1 \approx 3{,}338$.

La primera frecuencia de oscilaciones simétricas, de acuerdo con (5.55) es:

$$\omega_1 = \frac{3{,}338^2}{6^2}\sqrt{\frac{4\cdot 10^7}{8000:6}} \simeq 53{,}61\ \text{s}^{-1}.$$

Esta es menor que la frecuencia $\omega_1 = 60{,}6\ \text{s}^{-1}$ para el mismo pórtico sin masa concentrada (véase el ejemplo 56).

B) OSCILACIONES ANTISIMÉTRICAS

Por incógnita de Z_1 tomamos el giro antisimétrico simultáneo de los nudos *1* y *2* y por incógnita de Z_2, su desplazamiento lineal por la horizontal. Las ecuaciones canónicas son

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 = 0; \quad r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 = 0.$$

Para Z_1 y Z_2 diferentes a cero es necesario que

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} r_{12} \\ r_{21} r_{22} \end{vmatrix} = r_{11}r_{22} - r_{12}^2 = 0.$$

En virtud del equilibrio del primer nudo cortado en estado unitario debido

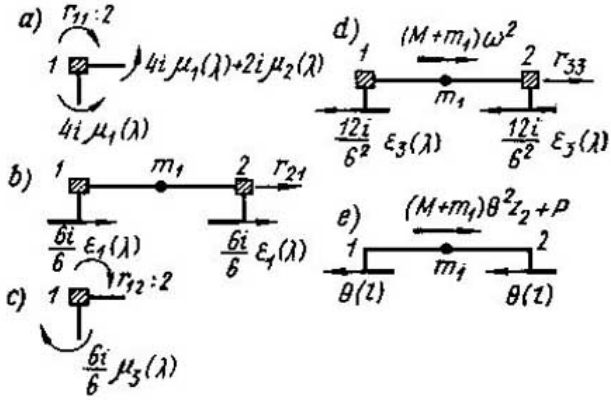


Fig. 210

al giro simultáneo de los nudos *1* y *2* (fig. 210, *a*), obtenemos:

$$r_{11}/2 = 4i\mu_1(\lambda) + [4i\mu_1(\lambda) + 2i\mu_2(\lambda)].$$

Del equilibrio del dintel cortado en el mismo estado (fig. 210, *b*), tenemos que

$$r_{21}/2 = i\varepsilon_1(\lambda) = i\mu_3(\lambda).$$

Del equilibrio del primer nudo cortado en estado unitario debido al desplazamiento horizontal de los nudos *1* y *2* (fig. 210, *c*), hallamos que

$$r_{12}/2 = i\mu_3(\lambda).$$

Del equilibrio del dintel cortado allí mismo (fig. 210, *d*), tenemos que

$$r_{22}/2 = \frac{i}{3}\varepsilon_3(\lambda) - (m_1 + M)\frac{\omega^2}{2};$$

aquí

$$(m_1+M)\,\omega^2=\frac{6}{5}\,M\,\frac{s^4EJ}{m}=\frac{6}{5}\,M\,\frac{\lambda^4}{l^4}\,\frac{EJ}{M/l}=\frac{6}{5}\,\frac{\lambda^4 l}{l^3}=\frac{i\lambda^4}{30}\,.$$

Por consiguiente,

$$\frac{r_{22}}{2}=\frac{i}{3}\,\varepsilon_3(\lambda)-\frac{i\lambda^4}{60}\,.$$

Ahora, después de simplificar por i^2, el determinante D será:

$$[16\mu_1(\lambda)+4\mu_2(\lambda)]\left[\frac{2}{3}\,\varepsilon_3(\lambda)-\frac{\lambda^4}{30}\right]-4\varepsilon_1^2(\lambda)=0.$$

La elección nos da $\lambda \approx 1{,}74$, cuando $\mu_1(\lambda)=0{,}97834$, $\mu_2(\lambda)=1{,}03263$, $\varepsilon_3(\lambda)=0{,}72026$ y $\varepsilon_1(\lambda)=0{,}92076$.

La primera frecuencia de las oscilaciones antisimétricas es:

$$\omega_1=\frac{1{,}74^2}{6^2}\sqrt{\frac{4\cdot 10^7}{8000:6}}=14{,}57\ \text{s}^{-1}.$$

Esta es menor que la primera frecuencia de oscilaciones simétricas y es menor que la primera frecuencia $\omega_1=15{,}42\ \text{s}^{-1}$ de oscilaciones antisimétricas del pórtico sin masa concentrada (véase el ejemplo 56).

2. OSCILACIONES FORZADAS

Examinamos las oscilaciones persistentes. Realizaremos la solución detallada sólo para la frecuencia $\theta=14{,}23\ \text{s}^{-1}$, próxima a la primera frecuencia de oscilaciones antisimétricas $\omega_1=14{,}57\ \text{s}^{-1}$.

a) Causadas por la componente vertical de la fuerza P sen θt

La fuerza vertical provoca sólo el giro simétrico de los nudos *1* y *2* y no suscita sus desplazamientos horizontales. Por eso tomamos por incógnita de Z_1 el giro simétrico simultáneo de estos nudos.

La ecuación canónica es:

$$r_{11}Z_1+R_{1p}=0.$$

Calculamos preliminarmente ciertos datos:

$$s=\sqrt[4]{\frac{78\,480}{9{,}81\cdot 6}}\,14{,}23^2:4\cdot 10^7=\frac{1{,}72}{6}=0{,}28666667\ \text{m}^{-1}.$$

Según las fórmulas (9.112)—(9.114) y (9.117) para $\lambda=1{,}72$ tenemos

$$D_1=1\ 02280\cdot 0{,}86392-0{,}37036\cdot 0{,}10608+$$
$$+0{,}172\,(0{,}86392\cdot 0{,}10608-0{,}37036^2)=0{,}83649983;$$

$$\overline{M}_{1-2}(0)=i1{,}72\,[1{,}02280^2-0{,}37036^2+0{,}172\,(1{,}02280\cdot 1{,}10608-$$
$$-0{,}86392\cdot 0{,}37036)]:0{,}83649983=1{,}7941911\,i;$$

$$\overline{Q}_{1-2}(0)=(i\cdot 1{,}72^2:6)\,[0{,}86392\cdot 0{,}37036-1{,}02280\cdot 0{,}10608+$$
$$+0{,}172\,(0{,}86392^2-1{,}02280\cdot 0{,}37036)]:0{,}83649983=0{,}161908626i$$

(el cálculo se realiza con gran precisión para obtener, al verificar, resultados satisfactorios).

De acuerdo con la tabla 6 tenemos que

$$\overline{M}_{1-a}(0)=4i\mu_1(1{,}72)=4i0{,}97884=3{,}91536\,i.$$

Según las fórmulas (9.122) y (9.123) hallamos:

$$M_{(1-2)p}\,(0) = -P0{,}37036 : 2 \cdot 0{,}28666667 \cdot 0{,}83649983 = -0{,}772237747P,$$

$$Q_{(1-)2}\quad (0) = P0{,}86392 : 2 \cdot 0{,}83649983 = 0{,}51638924\ P.$$

Del equilibrio del primer nudo cortado en estado unitario debido al giro simultáneo de los nudos *1* y *2* (fig. 209) obtenemos:

$$\frac{r_{11}}{2} = \overline{M}_{1-a}\,(0) + \overline{M}_{1-2}\,(0) = 3{,}91536i + 1{,}7941911i = 5{,}7095511i.$$

También del equilibrio del primer nudo en estado de carga hallamos que

$$\frac{R_{1p}}{2} = M_{(1-2)\,p}\,(0) = -0{,}772237747P.$$

Hallamos el ángulo de giro de los nudos:

$$Z_1 = -\frac{R_{1p}}{2} : \frac{r_{11}}{2} = 0{,}772237747P : 5{,}7095511i = 0{,}13525367\,\frac{P}{i}.$$

Elemento 1—2. Los parámetros iniciales son:

$$y\,(0) = 0;\ y'\,(0) = Z_1 = 0{,}13525367\,\frac{P}{i};$$

$$M\,(0) = \overline{M}_{1-2}\,(0)\ Z_1 + M_{(1-2)\ p}\,(0) = 1{,}7941911i \cdot 0{,}13525367\,\frac{P}{i} -$$

$$-0{,}772237747\ P = -0{,}529566816\ P;$$

$$Q\,(0) = \overline{Q}_{1-2}\,(0)\ Z_1 + Q_{(1-2)p}\,(0) = 0{,}161908626i \cdot 0{,}13525367\,\frac{P}{i} +$$

$$+0{,}516389824P = 0{,}53828856P.$$

1) La ecuación de la línea elástica del primer tramo según (5.66) es:

$$y_1\,(z) = \Big[\,(0{,}13525367 : 0{,}28666667)\,B_{sz} + (0{,}529566816 \cdot 6 : 1{,}72^3)\,C_{sz} -$$

$$-(0{,}53828856 \cdot 36 : 1{,}72^3)\,D_{sz}\Big]\,\frac{P}{i}.$$

Después de simplificar, tenemos:

$$y_1\,(z) = (0{,}471815123B_{sz} + 1{,}0740268C_{sz} - 3{,}8083101D_{sz})\,\frac{P}{i}.$$

Para obtener la ecuación de la línea elástica del segundo tramo, debemos primeramente calcular la fuerza de inercia. Con este fin determinamos

$$y_1\,(l/2) = (0{,}471815123 \cdot 0{,}86392 + 1{,}0740268 \cdot 0{,}37036 -$$

$$-3{,}8083101 \cdot 0{,}10608)\,\frac{P}{i} = 0{,}401401552\,\frac{P}{i};$$

$$J^* = m_1\theta^2 y_1\,(l/2) = \frac{m_1}{m}\,s^4 GJ y_1\,(l/2) = \frac{m_1}{m} \cdot \frac{\lambda^4 l}{l^3}\,y_1\,(l/2);$$

$$J^* = \frac{160}{800/6} \cdot \frac{1{,}72^4 l}{6^3}\,y_1\,(l/2) = (1{,}72^4 : 180)\,l y_1\,(l/2);$$

$$J^* = (1{,}72^4 : 180)\,i \cdot 0{,}401401552\,\frac{P}{i} = 0{,}019517326P;$$

$$P + J^* = 1{,}019517326P;$$

$$\Delta y(l/2) = -\frac{P+J^*}{s^3EJ} D_{s\left(z-\frac{l}{2}\right)} = -\frac{(P+J^*)\,l^3}{\lambda^3 i} D_{s\left(z-\frac{l}{2}\right)} =$$

$$= -\frac{1{,}019517326P\cdot 6^2}{1{,}72^3 i} D_{s\left(z-\frac{l}{2}\right)} = -7{,}21293087\frac{P}{i} D_{s\left(z-\frac{l}{2}\right)}.$$

La ecuación de la línea elástica del segundo tramo es:

$$y_2(z) = \left[0{,}471815123B_{sz} + 1{,}0740268C_{cz} - 3{,}8083101D_{sz} - \right.$$

$$\left. - 7{,}21293087D_{s\left(z-\frac{l}{2}\right)}\right]\frac{P}{l}.$$

La verificación de esta ecuación ha mostrado que

$$y(l) = (3{,}2634157 - 3{,}2634171)\frac{P}{i} \approx 0.$$

2) La ecuación de los ángulos de inclinación de la tangente la obtendremos diferenciando la ecuación de la línea elástica

$$y'(z) = 0{,}28666667\,[0{,}471815123A_{sz} + 1{,}0740268B_{sz} - 3{,}8083101C_{sz}] \times$$

$$\times \frac{P}{l} + 2{,}06706855\frac{P}{l} C_{s\left(z-\frac{l}{2}\right)}.$$

Las verificaciones de esta ecuación nos dieron:

$$y'\left(\frac{l}{2}\right) = 0{,}28666667\,(1{,}41044574 - 1{,}41044573)\frac{P}{i} \approx 0;$$

$$y'(l) = -0{,}13525760\frac{P}{i},$$

lo cual es próximo al valor de $Z_1 = -0{,}1352536\frac{P}{i}$.

3) La ecuación de los momentos flectores se halla según las fórmulas (5.68)—(5.72):

$$M(z) = -i\cdot 1{,}72\cdot 0{,}13525367\frac{P}{i} D_{sz} - 0{,}529566816PA_{sz} +$$

$$+ 1{,}87775079PB_{sz} - 3{,}55645579PB_{s\left(z-\frac{l}{2}\right)}$$

(el último sumando se refiere sólo al segundo tramo).

Los cálculos realizados nos dieron:

$$M(0) = -0{,}529566816P;\ M(3l/4) = 0{,}2742172P;$$

$$M(l/4) = 0{,}2742234P;\quad M(l) = -0{,}5295629\ P;\quad M(l/2) = 1{,}055907P.$$

Las comparaciones de los momentos flectores en secciones situadas simétricamente, sirven de verificación para la ecuación de los momentos flectores.

Elemento a—1. Suponemos que el origen de coordenadas está en el punto *a*. Los parámetros iniciales son: $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$;

$$M(0) = 2i\mu_2(1{,}72)\,Z_1 = 2i\cdot 1{,}03187\cdot 0{,}13525367\frac{P}{i} = 0{,}2791284089P;$$

$$Q(0) = -\frac{6i}{6}\varepsilon_2(1{,}72)\,Z_1 = -1{,}04609i\cdot 0{,}13525367\frac{P}{i} = -0{,}14148751165P.$$

1) La ecuación de la línea elástica es:

$$y(z) = -\left(0{,}279128409\,\frac{P}{i}\,6 : 1{,}72^3\right) C_{sz} + \left(0{,}1414875117\,\frac{P}{i}\,6 : 1{,}72^3\right) D_{sz}.$$

Después de ejecutadas las simplificaciones hallamos:

$$y(z) = -0{,}566106831\,\frac{P}{i}\,C_{sz} + 1{,}00099675\,\frac{P}{i}\,D_{sz}.$$

La verificación nos dio: $y(l) = (-0{,}857776 + 0{,}857774)\frac{P}{i} \approx 0$.

2) La ecuación de los ángulos de inclinación de la tangente es:

$$y'(z) = 0{,}28666667\left(-0{,}566106831\,\frac{P}{i}\,B_{sz} + 1{,}00099675\,\frac{P}{i}\,C_{sz}\right)$$

La verificación ha mostrado que $y'(l) = 0{,}1352507\ (P/i)$, lo cual es aproximadamente igual a $Z_1 = 0{,}1352537\ (P/i)$.

3) La ecuación de los momentos flectores es:

$$M(z) = 0{,}2791284089\ PA_{sz} - (0{,}14148751165\ P : 0{,}28666667)\ B_{sz},$$

ó

$$M(z) = 0{,}2791284089\ PA_{sz} - 0{,}493561088\ PB_{sz}.$$

Los cálculos según esta ecuación nos dan:

$$M(0) = 0{,}2791284\ P;\quad M(3l/4) = -0{,}3400056\ P;$$

$$M(l/4) = 0{,}06725446\ P;\quad M(l) = -0{,}529571\ P \approx M_{1-2}(0) =$$

$$= -0{,}529567\ P;\quad M(l/2) = -0{,}14090476\ P.$$

El diagrama de los momentos flectores está construido en la fig. 211.

b) causadas por la componente horizontal de la fuerza P cos θt

Por incógnitas tomamos: por Z_1, el giro antisimétrico simultáneo de los nudos *1* y *2*; por Z_2, su desplazamiento horizontal.

Las ecuaciones canónicas son:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0;\quad r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0.$$

Del equilibrio del primer nudo en estado unitario debido al giro antisimétrico simultáneo de los nudos *1* y *2* (fig. 210, *a*) y con empleo de las tablas [6] para $\lambda = 1{,}72$, obtenemos:

$$r_{11} = 16i\mu_1(1{,}72) + 4i\mu_2(1{,}72) = i(16 \cdot 0{,}97884 + 4 \cdot 1{,}03187) = 19{,}78892\ i.$$

Del equilibrio del dintel en el mismo estado (fig. 210, b) hallamos

$$r_{21} = -2i\varepsilon_1(1{,}72) = -2i\mu_3(1{,}72) = -2i \cdot 0{,}92260 = -1{,}84520\ i.$$

Del equilibrio del primer nudo cortado en el desplazamiento lineal unitario de los nudos (fig. 210, *c*) tenemos que

$$r_{12} = -2i\mu_3(1{,}72) = -1{,}84520\ i.$$

Del equilibrio del dintel cortado allí mismo (fig. 210, *d*) tenemos:

$$r_{22} = 2\,\frac{12i}{\theta^2}\,e_3(1{,}72) - (m_1 + M)\,\theta^2.$$

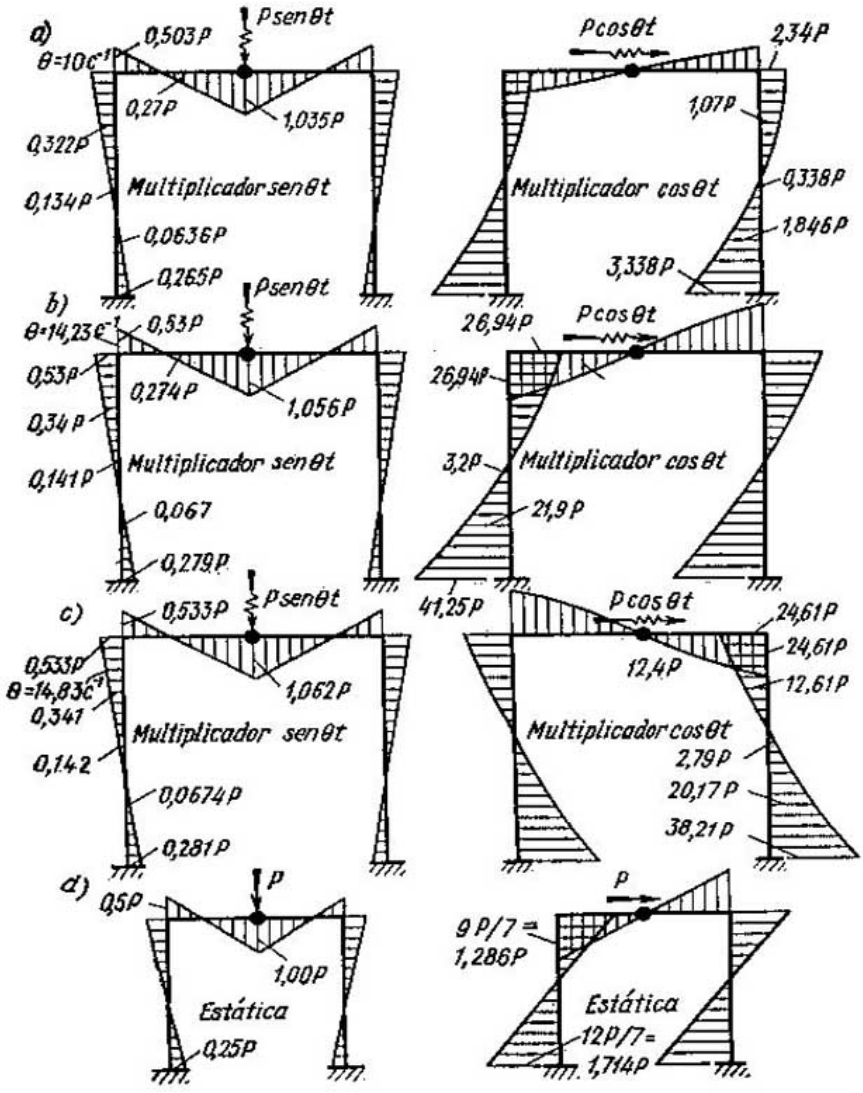


Fig. 211

Realizamos una transformación análoga a la de la pág. 322:

$$(m_1 + M)\,\theta^2 = \frac{6}{5} M\theta^2 = \frac{6}{5} M \frac{\lambda^4}{l^4} \cdot \frac{EJ}{m} = \frac{6}{5} \cdot \frac{\lambda^4}{l^2}\, t = \frac{\lambda^4 i}{30}.$$

Ahora tenemos que

$$r_{22} = \frac{2i}{3} 0{,}72673 - t\,\frac{1{,}72^4}{30} = 0{,}192749 i.$$

Los miembros independientes son: $R_{1p} = 0$; $R_{2p} = -P$.

Las ecuaciones canónicas en números son:

$$19{,}78892\ iZ_1 - 1{,}84520\ iZ_2 = 0; \quad -1{,}84520iZ_1 + 0{,}192749iZ_2 - P = 0.$$

Al resolver estas ecuaciones, obtenemos:

$$Z_1 = 4{,}505636\frac{P}{i}; \quad Z_2 = 48{,}320873\ \frac{P}{i}.$$

Elemento 1—2. Los parámetros iniciales son:

$$y(0) = 0; \quad y'(0) = Z_1 = 4{,}505636\frac{P}{i};$$

$$M(0) = [4i\mu_1(1{,}72) + 2i\mu_2(1{,}72)]\ Z_1 = (4i \cdot 0{,}97884 +$$

$$+ 2i \cdot 1{,}03187)\ 4{,}505636\frac{P}{i} = 26{,}9396482P;$$

$$Q(0) = i[-\varepsilon_1(1{,}72) - \varepsilon_2(1{,}72)]\ Z_1 =$$

$$= i(-0{,}92260 - 1{,}04609)\ 4{,}505636\frac{P}{i} = -8{,}8702005P.$$

1) La ecuación de la línea elástica, según (5.66), sustituyendo $s = \lambda/l = 1{,}72/6$; $EJ/l = t$, es

$$y(z) = \frac{4{,}505636 \cdot 6}{1{,}72}\frac{P}{i}B_{sz} - \frac{26{,}939648 \cdot 6}{1{,}72^2}\frac{P}{i}C_{sz} + \frac{8{,}8702005 \cdot 36}{1{,}72^3}\frac{P}{i}D_{sz}.$$

Después de las simplificaciones, tenemos:

$$y(z) = 15{,}7173346\frac{P}{i}B_{sz} - 54{,}6369281\frac{P}{i}C_{sz} + 62{,}7553281\frac{P}{i}D_{sz}.$$

Las verificaciones de esta ecuación han mostrado que

$$y(l/2) = 20{,}2356 - 20{,}2353 \approx 0; \quad y(l) = 82{,}7875 - 82{,}7870 \approx 0.$$

2) La ecuación de los ángulos de giro se expresa a través de la derivada de la ecuación de $y(z)$:

$$y'(z) = (4{,}50563592A_{sz} - 15{,}6625861B_{sz} + 17{,}9898607C_{sz})\frac{P}{i}.$$

La verificación es la siguiente: $y'(l) = Z_1 = 4{,}505636\ (P_i/l)$.
Al realizar la sustitución y los cálculos, tenemos que $y'(l) = 4{,}505706\ (P/l)$.
3) La ecuación de los momentos flectores se obtiene según (5.68):

$$M(z) = -\frac{1{,}72}{6}EJ \cdot 4{,}505636\frac{P}{i}D_{sz} + 26{,}939648PA_{sz} - \frac{8{,}870200P \cdot 6}{1{,}72}B_{sz},$$

ó

$$M(z) = -7{,}7496939PD_{sz} + 26{,}939648PA_{sz} - 30{,}942558PB_{sz}.$$

Los cálculos ejecutados según esta ecuación han demostrado:

$$M(0) = 26{,}939648P; \quad M(l/4) = 13{,}566475P; \quad M(l/2) =$$

$$= -27{,}553997\ P + 27{,}553845\ P \approx 0; \quad M(3l/4) = 13{,}5664753\ P \approx M(l/4);$$

$$M(l) = -26{,}940037\ P \approx M(0).$$

4) La ecuación de las fuerzas transversales se expresa mediante la derivada de $M(z)$:

$$Q(z) = -2{,}22157892PC_{sz} + 7{,}72269909PD_{sz} - 8{,}87019996PA_{sz}.$$

La verificación es la que sigue: $Q(l) = -8{,}87019471P \approx Q(0)$.

Elemento a—1. Los parámetros iniciales, estando el origen de coordenadas en el punto a, son:

$$y(0)=0;\quad y'(0)=0;\quad M(0)=2l\mu_2(1{,}72)\,Z_1-\frac{6l}{6}\,\mu_4(1{,}72)\,Z_2=$$

$$=2l\cdot 1{,}03187\cdot 4{,}505636\,\frac{P}{l}-1{,}04609\cdot 48{,}320873\,\frac{P}{l}=-41{,}249521P;$$

$$Q(0)=-\frac{6l}{6}\,\varepsilon_2(1{,}72)\,Z_1+\frac{12l}{6^2}\,\varepsilon_4(1{,}72)\,Z_2=-l\cdot 1{,}04609\cdot 4{,}505636\,\frac{P}{l}+$$

$$+\frac{l}{3}\,1{,}09592\cdot 48{,}320873\cdot\frac{P}{l}=12{,}938636P.$$

1) La ecuación de la línea elástica según (5.66) es:

$$y(z)=\frac{41{,}249521P\cdot 6^2}{1{,}72^2EJ}\,C_{sz}-\frac{12{,}938636P\cdot 6^3}{1{,}72^3EJ}\,D_{sz}.$$

Después de simplificar, tenemos que

$$y(z)=83{,}6591151\,\frac{P}{l}\,C_{sz}-91{,}5388944\,\frac{P}{l}\,D_{sz}.$$

La verificación es:

$$y(l)=48{,}320455\,\frac{P}{l}\approx Z_2=48{,}32087\,\frac{P}{l}.$$

2) La ecuación de los ángulos de giro es:

$$y'(z)=23{,}9822793\,\frac{P}{l}\,B_{sz}-26{,}2411493\,\frac{P}{l}\,C_{sz}.$$

La verificación es:

$$y'(l)=4{,}505617\,\frac{P}{l}\,Z_1\approx 4{,}505636\,\frac{P}{l}.$$

3) La ecuación de los momentos flectores según (5.68) es:

$$M(z)=-41{,}249521PA_{sz}+45{,}134776PB_{sz}.$$

La verificación es:

$$M_{a-1}(l)=26{,}939863P\approx M_{1-2}(0)=26{,}939648P.$$

Según esta ecuación tenemos:

$$M(0)=-41{,}249521P;\quad M(l/4)=-21{,}8951381P;\quad M(l/2)=-3{,}1971744P;$$

$$M(3l/4)=13{,}5509895P;\quad M(l)=26{,}939863P.$$

El momento flector de la parte superior del pilar puede ser calculado, además, según la fórmula

$$M_{1-a}(0)=4l\mu(1{,}72)\,Z_1-\frac{6l}{l}\,\mu_3(1{,}72)\,Z_2=4l\cdot 0{,}97884\cdot 4{,}505637\,\frac{P}{l}-$$

$$-0{,}92260\cdot 48{,}320873\,\frac{P}{l}=-26{,}9396504P.$$

4) La ecuación de las fuerzas transversales según (5.69) es:

$$Q(z)=-11{,}8248627PD_{sz}+12{,}938636PA_{sz}.$$

La verificación se realiza partiendo de la condición de equilibrio del dintel cortado (fig. 210, *e*):

$$-2Q\,(l) + (m_1 + M)\,\theta^2 Z_2 + P = 0.$$

Tomando en consideración que $(m_1 + M)\,\theta^2 = il\lambda^4/30$, tenemos:

$$-2 \cdot 7{,}5485905P + \frac{l \cdot 1{,}72^4}{30} Z_2 + P = -15{,}097181P + 15{,}0970196P \approx 0.$$

La fuerza transversal de la parte superior del pilar puede ser obtenida además según la fórmula:

$$Q_{1-a}(0) = -\frac{6l}{l}\varepsilon_1(1{,}72)\,Z_1 + \frac{12i}{l^2}\varepsilon_3(1{,}72)\,Z_2 = -i \cdot 0{,}92260 \times$$

$$\times 4{,}505636\,\frac{P}{l} + 0{,}2422433 \cdot 48{,}320873\,\frac{P}{i} = 7{,}548508P.$$

Todas las verificaciones se satisfacen bien.

El diagrama de los momentos flectores está construido en la fig. 211. En la misma figura se exponen los diagramas de momentos flectores para las frecuencias $\theta = 10\ s^{-1}$ y $\theta = 14{,}83\ s^{-1}$. Allí mismo se aduce el diagrama debido a las fuerzas estáticas.

Prestemos atención a que con la frecuencia $\theta = 14{,}23\ s^{-1}$, próxima a la primera frecuencia de oscilaciones antisimétricas $\omega_1 = 14{,}57\ s^{-1}$, los valores de los momentos causados por la carga horizontal han crecido mucho, mientras que con la frecuencia $\theta = 14{,}83\ s^{-1}$ no sólo han crecido, sino que también han cambiado de signo. Todo esto testimonia un estado próximo a la resonancia. Al mismo tiempo, los momentos flectores producidos por la carga vertical, para las mismas frecuencias, han cambiado de modo insignificante y no han sido influidos por la proximidad de las frecuencias de las cargas verticales actuantes a las frecuencias de las oscilaciones antisimétricas.

Como han mostrado las verificaciones de todos los cálculos en el ejemplo, la exactitud de cálculo que admitimos (sobre todo para la carga vertical) resultó excesiva. Tanto más que el cálculo, sin embargo, sigue siendo inexacto ya que fue realizado con relación al estado no deformado y sin considerar la influencia de las fuerzas longitudinales sobre los momentos flectores.

§ 83. NOCION SOBRE EL CÁLCULO DEL PÓRTICO A LA ACCION DE CUALQUIER CARGA VARIABLE EN EL TIEMPO.

Sea que sobre el pórtico actúa una fuerza $P\,(t)$ variable en el tiempo. Esta carga puede ser desarrollada en una serie trigonométrica. Si la carga es periódica, su período T_θ está prefijado; si es casual, el tiempo de acción de la carga se puede adoptar convencionalmente como período T_θ.

Si el desarrollo se opera, por ejemplo, sólo respecto a los senos, en tal caso

$$P(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen} \theta_k t,$$

donde

$$\theta_k = \frac{k\pi}{T_\theta}; \quad b_k = \frac{2}{T_\theta} \int_0^{T_\theta} P_1(t) \operatorname{sen} \theta_k t\, dt.$$

De modo análogo se realiza el desarrollo de la carga respecto a los cosenos. Después de desarrollada la carga, el pórtico se calcula para cada uno de los tipos de carga $b_k \operatorname{sen} \theta_k t$ o $a_k \cos \theta_k t$ por separado, como fue mostrado anteriormente, y después, los resultados se suman de acuerdo con el principio de superposición. Claro está que el resultado del cálculo es válido sólo durante la acción de la carga.

CAPÍTULO 10 * CÁLCULO DINÁMICO DE VIGAS CONTINUAS, ARCOS Y ARMADURAS

§ 84. CÁLCULO DE LAS VIGAS CONTINUAS A LA ACCIÓN DE LA CARGA DE VIBRACIÓN POR EL MÉTODO DE LOS PARÁMETROS INICIALES.

Para el cálculo la viga continua se convierte en una viga simple, estáticamente determinada o en una viga estáticamente indeterminada eliminando todos los apoyos intermedios y sustituyendo la acción de estos últimos sobre la viga por fuerzas desconocidas; por lo tanto a los dos parámetros iniciales desconocidos de la viga simple se adicionan las reacciones desconocidas de los apoyos eliminados. Como condiciones suplementarias para su determinación sirven las condiciones superpuestas sobre los desplazamientos en dirección de los apoyos eliminados, los cuales para los apoyos rígidos son iguales a cero, y para los elásticos, se expresan por medio de las reacciones desconocidas.

El método de los parámetros iniciales es cómodo para el cálculo de las vigas con voladizos y las vigas que tienen apoyos elásticos.

Ejemplo 62. Escribir las ecuaciones para la determinación de los parámetros iniciales y de la reacción del apoyo intermedio de una viga continua (fig. 212).

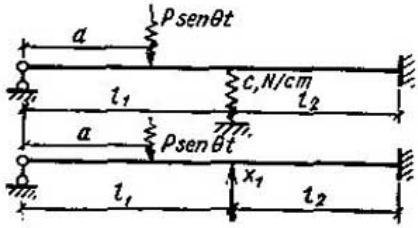


Fig. 212

Los parámetros iniciales son: $y(0) = 0$; $y'(0) = ?$; $M(0) = 0$; $Q(0) = ?$ La reacción del apoyo intermedio es $X_1 = ?$ Las condiciones de frontera en el extremo derecho de la viga son: $y(l_1 + l_2) = 0$; $y'(l_1 + l_2) = 0$. La condición suplementaria para el apoyo elástico intermedio es $y(l_1) = X_1/c$ (para el apoyo rígido, $y(l_1) = 0$).

De acuerdo con las expresiones (5.66), (5.67) y (5.70), (5.71) tenemos que

$$y(z)=\frac{y'(0)}{s}B_{sz}-\frac{Q(0)}{s^3EJ}D_{sz}\Big|_0^a+\frac{P}{s^3EJ}D_{s(z-a)}\Big|_0^{l_1}-\frac{X_1}{s^3EJ}D_{s(z-l_1)}\Big|_0^{l_1+l_2};$$

$$y'(z)=y'(0)A_{sz}-\frac{Q(0)}{s^2EJ}C_{sz}\Big|_0^a+\frac{P}{s^2EJ}C_{s(z-a)}\Big|_0^{l_1}-\frac{X_1}{s^2EJ}C_{s(z-l_1)}\Big|_0^{l_1+l_2}.$$

Según las condiciones de fijación de la viga en el extremo derecho tenemos que

$$y(l_1+l_2)=\frac{y'(0)}{s}B_{s(l_1+l_2)}-\frac{Q(0)}{s^3EJ}D_{s(l_1+l_2)}+$$
$$+\frac{P}{s^3EJ}D_{s(l_1+l_2-a)}-\frac{X_1}{s^3EJ}D_{sl_2}=0;$$
$$y'(l_1+l_2)=y'(0)A_{s(l_1+l_2)}-\frac{Q(0)}{s^2EJ}C_{s(l_1+l_2)}+$$
$$+\frac{P}{s^2EJ}C_{s(l_1+l_2-a)}-\frac{X_1}{s^2EJ}C_{sl_2}=0.$$

La condición suplementaria del apoyo intermedio es:

$$y(l_1)=\frac{y'(0)}{s}B_{sl_1}-\frac{Q(0)}{s^3EJ}D_{sl_1}+\frac{P}{s^3EJ}D_{s(l_1-a)}=\frac{X_1}{c}.$$

Según estas tres ecuaciones se determinan los parámetros iniciales $y(0)$, $y'(0)$ y la reacción del apoyo intermedio X_1.

Con el fin de determinar las frecuencias de oscilaciones propias de la viga, debemos eliminar de las ecuaciones obtenidas los miembros independientes e igualar a cero el determinante de las ecuaciones homogéneas obtenidas, lo cual nos proporcionará la ecuación de las frecuencias. En esta ecuación la frecuencia de la carga actuante θ llega a ser una frecuencia desconocida ω_i de las oscilaciones propias.

§ 85. CÁLCULO DE LAS VIGAS CONTINUAS A LA ACCIÓN DE LA CARGA VIBRATORIA Y DETERMINACIÓN DE LAS FRECUENCIAS DE OSCILACIONES LIBRES POR EL MÉTODO DE FUERZAS.

Examinemos las vigas cuya sección permanece constante en los límites de cada una de las luces, pero varía en los apoyos al pasar de una luz a la otra.

El sistema fundamental se obtiene poniendo un número necesario de charnelas sobre los apoyos. En calidad de incógnitas se toman los momentos de apoyo (fig. 213). En vista de que las incógnitas que están más a la izquierda que M_{i-1} y más a la derecha que M_{i+1} no provocarán la flexión de las luces l_i y l_{i+1}, ellas no darán desplazamientos en dirección del momento M_i. Por esta causa la ecuación canónica general de los desplazamientos dinámicos en dirección del momento M_i será:

$$\delta_{i(i-1)}M_{i-1}+\delta_{ii}M_i+\delta_{i(i+1)}M_{i+1}+\Delta_{ip}=0. \qquad (10.1)$$

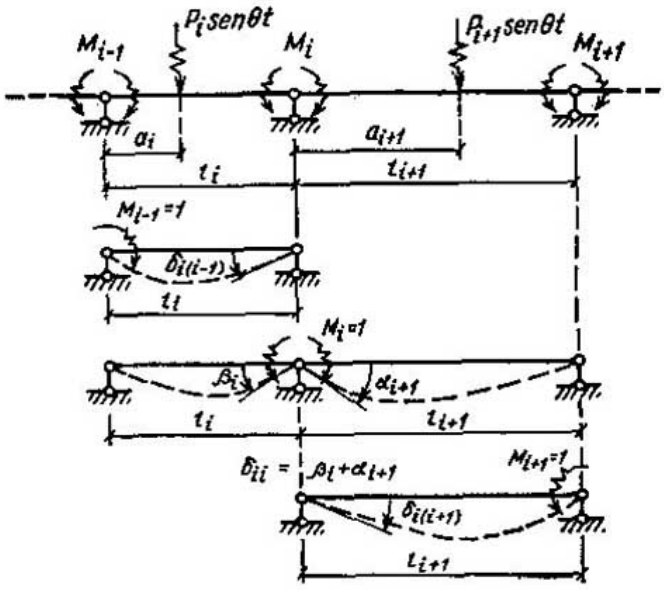


Fig. 213

La viga de dos apoyos, que representa el elemento estándar del sistema fundamental, fue examinada anteriormente, al actuar ciertas cargas y momentos en los extremos—véanse (6.59), (6.60), (6.65), (6.66), (6.68) y (6.69). Los resultados están reunidos en la tabla 10, basándose en los cuales podemos escribir:

$$\delta_{i(i-1)} = \frac{l_i}{6EJ_i} f_2(\lambda_i); \tag{10.2}$$

$$\delta_{ii} = \frac{l_i}{3EJ_i} f_1(\lambda_i) + \frac{l_{i+1}}{3EJ_{i+1}} f_1(\lambda_{i+1}); \tag{10.3}$$

$$\delta_{i(i+1)} = \frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}} f_2(\lambda_{i+1}), \tag{10.4}$$

donde

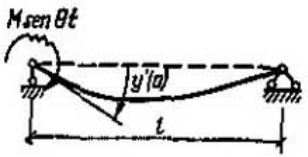
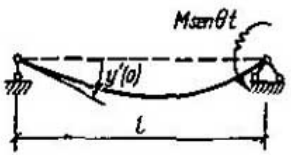
$$\lambda_i = s_i l_i; \qquad \lambda_{i+1} = s_{i+1} l_{i+1}. \tag{10.5}$$

Sustituyendo (10.2)—(10.4) en la ecuación (10.1), obtendremos la ecuación de tres momentos:

$$\frac{l_i}{6EJ_i} f_2(\lambda_i) M_{i-1} + 2\left[\frac{l_i}{6EJ_i} f_1(\lambda_i) + \frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}} f_1(\lambda_{i+1})\right] M_i + \\ + \frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}} f_2(\lambda_{i+1}) M_{i+1} + \Delta_{ip} = 0. \tag{10.6}$$

La determinación del miembro de carga Δ_{ip} está relacionada con el examen de la carga de vibración prefijada en cada caso concreto. Δ_{ip} se determina geométricamente como la suma de los ángulos de giro de dos vigas contiguas sobre un apoyo i. Las direcciones posi-

Tabla 10

N°	Esquema	Valores de amplitud $y'(0)$	$Q(0)$
1		$M\dfrac{l}{3EJ}f_1(\lambda)$ $f_1(\lambda)=\dfrac{3(B_\lambda C_\lambda - A_\lambda D_\lambda)}{\lambda(B_\lambda^2 - D_\lambda^2)}=$ $=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\operatorname{ch}\lambda\operatorname{sen}\lambda-\operatorname{sh}\lambda\cos\lambda}{\lambda\operatorname{sh}\lambda\operatorname{sen}\lambda}$ véase (6.65)	$Ms\dfrac{C_\lambda D_\lambda - A_\lambda B_\lambda}{B_\lambda^2 - D_\lambda^2}=$ $=-Ms\dfrac{\operatorname{ch}\lambda\operatorname{sen}\lambda+\operatorname{sh}\lambda\cos\lambda}{2\operatorname{sh}\lambda\operatorname{sen}\lambda}$ véase (6.66)
2		$M\dfrac{l}{6EJ}f_2(\lambda)$ $f_2(\lambda)=\dfrac{6D_\lambda}{\lambda(B_\lambda^2 - D_\lambda^2)}=\dfrac{6D_\lambda}{\lambda\operatorname{sh}\lambda\operatorname{sen}\lambda}$ véase (6.68)	$Ms\dfrac{B_\lambda}{B_\lambda^2 - D_\lambda^2}=Ms\dfrac{B_\lambda}{\operatorname{sh}\lambda\operatorname{sen}\lambda}$ véase (6.69)

tivas de giro están indicadas en la fig. 214:

$$\Delta_{ip} = \alpha_{(i+1)p} + \beta_{ip}. \tag{10.7}$$

O bien se determina algebraicamente de acuerdo con las flexiones positivas hacia abajo:

$$\Delta_{ip} = \alpha_{(i+1)p} - \beta_{ip}. \tag{10.8}$$

Cuando examinamos las luces l_i y l_{i+1} con cargas (véase la fig. 214), para facilitar los cálculos al determinar Δ_{ip}, debemos hacer girar la luz l_i a 180° en el plano horizontal (fig. 215, *a*). En este caso el ángulo β_{ip} se halla como el parámetro inicial y'_i (0). La luz l_{i+1} se examina en posición invariable (fig. 215, *b*). El miembro de carga Δ_{ip} será:

$$\Delta_{ip} = y'_i(0) + y'_{i+1}(0). \tag{10.9}$$

Después de determinados los momentos de apoyo, cada una de las luces de la viga se examina bajo la acción de la carga y de los momentos de apoyo obtenidos, para lo cual se aplican las expresiones (5.66)—(5.69) y (5.70)—(5.73). Las ecuaciones canónicas de oscilaciones libres las obtendremos según (10.6), suponiendo que los miembros independientes sean iguales a cero:

$$\frac{l_i}{6EJ_i} f_2(\lambda_i) M_{i-1} + 2\left[\frac{l_i}{6EJ_i} f_1(\lambda_i) + \frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}} f_1(\lambda_{i+1})\right] M_i + \\ + \frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}} f_2(\lambda_{i+1}) M_{i+1} = 0. \tag{10.10}$$

En estas ecuaciones la frecuencia de cargas actuantes θ la debemos considerar como una frecuencia desconocida de oscilaciones libres. Las ecuaciones (10.10) son homogéneas, por lo tanto en el caso general el determinante de estas ecuaciones debemos igualarlo a cero, lo cual nos da la ecuación de las frecuencias. Por cuanto diferentes luces pueden tener diferentes valores de λ, es necesario reducirlos todos a un solo valor, como lo hicimos al calcular los pórticos [véase (9.26)].

En casos particulares las oscilaciones libres pueden tener lugar, a condición de que todos los momentos de apoyo desconocidos sean

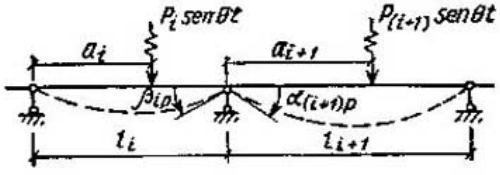


Fig. 214

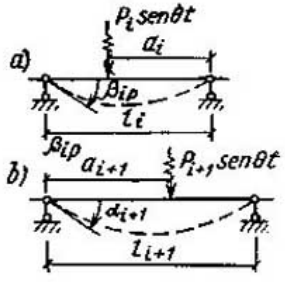


Fig. 215

iguales a cero, es decir, con la solución trivial de las ecuacions (10.10) (véase el ejemplo 65).

Si la viga continua está empotrada en uno o dos de sus extremos (fig. 216, *a*), en tal caso para reducir el número de incógnitas debemos formar el sistema fundamental poniendo charnelas sólo sobre los

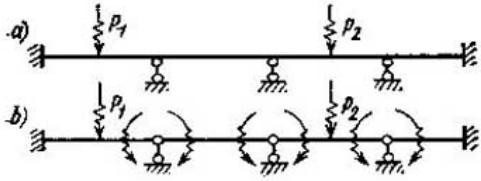


Fig. 216

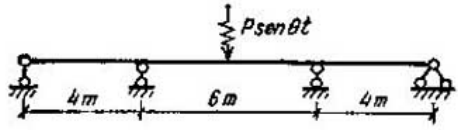


Fig. 217

apoyos intermedios (fig. 216, *b*). En este caso debemos aplicar las ecuaciones canónicas en forma de (10,1), escribiendo δ_{11} y $\delta_{(n-1)\,(n-1)}$ según (6.119) y (6.120):

$$\delta_{11} = \frac{l_1}{4EJ_1} f_3(\lambda_1) + \frac{2l_2}{6EJ_2} f_1(\lambda_2); \tag{10.11}$$

$$\delta_{(n-1)(n-1)} = \frac{2l_{n-1}}{6EJ_{n-1}} f_1(\lambda_{n-1}) + \frac{l_n}{4EJ_n} f_3(\lambda_n). \tag{10.12}$$

La forma matricial de las ecuaciones (10.6) y (10.10) es análoga a la que usábamos durante el cálculo de los pórticos [véanse (9.15) y (9.28)].

Ejemplo 63. Construir el diagrama de momentos flectores causados en una viga (fig. 217) por la carga de vibración, disponiendo de los siguientes datos: $J = 20\,000 \cdot 10^{-8}$ m^4; $E = 2 \cdot 10^{11}$ Pa; $g \approx 10$ m/s^2; $\theta = 100$ s^{-1}; $q = 2500$ N/m.

Según la fórmula (5.59) tenemos que

$$s = \sqrt[4]{\frac{2500 \cdot 100^2}{10 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 20\,000 \cdot 10^{-8}}} = 0{,}5 \text{ m}^{-1}.$$

La ecuación de tres momentos la escribimos según (10.6), teniendo en cuenta que $M_1 = M_2$:

$$2\left[\frac{l_1}{6EJ} f_1(\lambda_1) + \frac{l_2}{6EJ} f_1(\lambda_2)\right] M_1 + \frac{l_2}{6EJ} f_2(\lambda_2) M_1 + \Delta_{1p} = 0,$$

donde $\lambda_1 = sl_1 = 0{,}5 \cdot 4 = 2$; $\lambda_2 = sl_2 = 0{,}5 \cdot 6 = 3$.

Los valores de las funciones son:

$$f_1(2) = 1{,}12110; \quad f_2(2) = 1{,}23558; \quad f_1(3) = 4{,}01016;$$
$$f_2(3) = 6{,}9864.$$

Por consiguiente,

$$2\left[\frac{4}{6EJ} 1{,}12110 + \frac{6}{6EJ} 4{,}01016\right] M_1 + \frac{6}{6EJ} 6{,}9864 M_1 + \Delta_{1p} = 0,$$

o

$$\frac{16{,}50152 M_1}{EJ} + \Delta_{1p} = 0. \tag{a}$$

Al determinar Δ_{1p} utilizamos (6.59) y (6.60), entonces para $\lambda = 3$ tenemos que

$$y'(0) = \Delta_{1p} = \frac{P}{2 \cdot 0{,}5^2 EJ} \frac{1{,}14083}{1{,}21157^2 - 1{,}14083^2} = \frac{12{,}712}{EJ} P; \qquad \text{(b)}$$

$$Q(0) = \frac{P}{2} \frac{1{,}21157}{1{,}21157^2 - 1{,}14083^2} = 3{,}6405P. \qquad \text{(c)}$$

La ecuación (a) en forma numérica es:

$$16{,}50152M_1 + 13{,}712P = 0, \quad \text{de aquí } M_1 = -0{,}831P.$$

La 1ra *luz.* La carga está mostrada en la fig. 218. De acuerdo con la tabla 10 tenemos que

$$y'(0)\,EJ = 4 \cdot 0{,}20593\,(-0{,}831P) = -0{,}684P;$$

$$\frac{Q(0)}{s} = \frac{2{,}26828}{2{,}26828^2 - 1{,}35828^2}(-0{,}831P) = -0{,}571P.$$

La ecuación de momentos flectores para la primera luz según (5.68) es:

$$M(z) = 0{,}5 \cdot 0{,}684PD_{0,5z} - 0{,}571PB_{0,5z}.$$

para $z = 0$ $M = 0$

» $z = 2$ $M = 0{,}342P \cdot 0{,}16686 - 0{,}571P \cdot 1{,}00833 = -0{,}518P;$

» $z = 4$ $M = 0{,}342P \cdot 1{,}35828 - 0{,}571P \cdot 2{,}26808 = 0{,}831P.$

La 2*a luz.* La carga se muestra en la fig. 219, $\lambda = 0{,}5 \cdot 6 = 3$. Los parámetros iniciales los determinaremos por dos procedimientos:

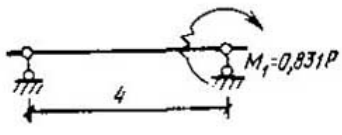


Fig. 218

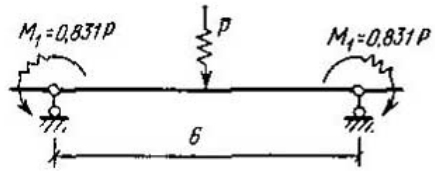


Fig. 219

1) basándose en los datos de la tabla 10 y teniendo en cuenta (b),

$$y'(0) = \frac{6}{3EJ} f_1(3)\,(-0{,}831P) + \frac{6}{6EJ} f_2(3)\,(-0{,}831P) +$$

$$+ \frac{13{,}712P}{EJ} = \frac{6}{3EJ} 4{,}01016\,(-0{,}831P) +$$

$$+ \frac{6}{6EJ} 6{,}9864\,(-0{,}831P) + \frac{13{,}712P}{EJ} = \frac{1{,}246P}{EJ};$$

$$Q(0) = 0{,}5 \frac{5{,}52882 \cdot 4{,}93837 - 4{,}53883 \cdot 5{,}07949}{5{,}07949^2 - 4{,}93837^2}(-0{,}831P) +$$

$$+ 0{,}5 \frac{5{,}07949}{5{,}07949^2 - 4{,}93837^2}(-0{,}831P) + 3{,}6405P = 0{,}9P;$$

2) calculando directamente la carga prefijada de la viga; basándose en las expresiones (5.67) y (5.69), en las condiciones de frontera según la simetría:

$$y'(l/2) = y'(0)\,A_{\lambda/2} + \frac{0{,}831P}{0{,}5EJ} B_{\lambda/2} - \frac{Q(0)}{0{,}5^2 EJ} C_{\lambda/2} = 0;$$

$$Q(l/2) = -EJ 0{,}5^2 y'(0)\,C_{\lambda/2} - 0{,}5 \cdot 0{,}831PD_{\lambda/2} + (Q)(0)\,A_{\lambda/2} = P/2.$$

Sustituyendo los valores de las funciones, tenemos:

$$EJy'\ (0)\ 1{,}21157 + 1{,}662P \cdot 1{,}56338 - 4Q\ (0)\ 1{,}14083 = 0;$$

$$-EJ \cdot 0{,}25y'\ (0)\ 1{,}14083 - 0{,}4155P \cdot 0{,}56589 + Q\ (0)\ 1{,}21157 = P/2.$$

Resolviendo estas ecuaciones, obtendremos: $EJy'\ (0) = 1{,}245\ P$; $Q\ (0) = 0{,}901\ P$.

La ecuación de los momentos flectores en el primer tramo, de la segunda luz según (5.68), es

$$M\ (z) = -0{,}623PD_{0,5z} - 0{,}831PA_{0,5z} + 1{,}80PB_{0,5z}.$$

Para $z = 0$ $\quad M = -0{,}831P;$

» $z = 1{,}5$ $\quad M = -0{,}623P \cdot 0{,}07127 - 0{,}831P \cdot 1{,}01351 + 1{,}80P \cdot 0{,}75232 = 0{,}469P;$

» $z = 3$ $\quad M = -0{,}623P \cdot 0{,}56589 - 0{,}831P \cdot 1{,}21157 + 1{,}80P \cdot 1{,}56338 = 1{,}452P.$

En el segundo tramo para $3 \leqslant z \leqslant 6$ según (5.68) y (5.72), tenemos que

$$M\ (z) = -0{,}623PD_{0,5z} - 0{,}831PA_{0,5z} + 1{,}80PB_{0,5z} - \frac{P}{0{,}5}\,B_{\left(0.5z - \frac{\lambda}{2}\right)}.$$

Para controlar, determinemos el momento en el extremo derecho de la luz:

$$M\ (l) = -0{,}623P \cdot 4{,}93837 - 0{,}831P \cdot 4{,}53883 + 1{,}8P \cdot 5{,}07949 - \frac{P}{0{,}5}\,1{,}56338 = -0{,}837P \text{ (en vez de } -0{,}831P).$$

El diagrama de los momentos está construido en la fig. 220, donde está trazado en línea punteada el diagrama debido a la fuerza estática P.

Ejemplo 64. Escribir la ecuación de las frecuencias de oscilaciones simétricas libres de la viga examinada en el ejemplo 63.

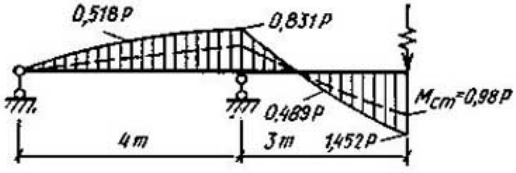


Fig. 220

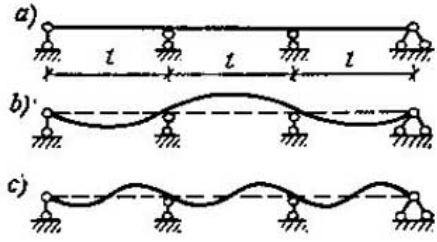


Fig. 221

La ecuación de las oscilaciones simétricas libres, de acuerdo con (10.10), es:

$$2\left[\frac{4}{6EJ} f_1(\lambda_1) + \frac{6}{6EJ} f_1(\lambda_2)\right] M_1 + \frac{6}{6EJ} f_2(\lambda_2)\, M_1 = 0,$$

o

$$4f_1(\lambda_1) + 6f_1(\lambda_2) + 3f_2(\lambda_2) = 0.$$

Tomando en consideración que $\lambda_2 = \lambda_1(6/4)$, representemos la ecuación de las frecuencias en la siguiente forma:

$$4f_1(\lambda_1) + 6f_1(1{,}5\lambda_1) + 3f_2(1{,}5\lambda_1) = 0.$$

Teniendo en cuenta las expresiones de las funciones f_1 y f_2, obtendremos en definitiva:

$$\frac{\operatorname{ch}\lambda_1 \operatorname{sen}\lambda_1 - \operatorname{sh}\lambda_1 \operatorname{sen}\lambda_1}{\lambda_1 \operatorname{sh}\lambda_1 \operatorname{sen}\lambda_1} +$$

$$+\frac{\operatorname{ch}(1{,}5\lambda_1)\operatorname{sen}(1{,}5\lambda_1) - \operatorname{sh}(1{,}5\lambda_1)\cos(1{,}5\lambda_1)}{\lambda_1 \operatorname{sh}(1{,}5\lambda_1)\operatorname{sen}(1{,}5\lambda_1)} + \frac{\operatorname{sh}(1{,}5\lambda_1) - \operatorname{sen}(1{,}5\lambda_1)}{\lambda_1 \operatorname{sh}(1{,}5\lambda_1)\operatorname{sen}(1{,}5\lambda_1)} = 0.$$

Esta ecuación se resuelve eligiendo los valores de λ_1.

Ejemplo 65. Determinar las frecuencias de oscilaciones libres de una viga continua de tres luces iguales (fig. 221, *a*). En virtud de (10.10) tenemos:

$$2\left[\frac{l}{6EJ} f_1(\lambda) + \frac{l}{6EJ} f_1(\lambda)\right] M_1 + \frac{l}{6EJ} f_2(\lambda) M_2 = 0;$$

$$\frac{l}{6EJ} f_2(\lambda) M_1 + 2\left[\frac{l}{6EJ} f_1(\lambda) + \frac{l}{6EJ} f_2(\lambda)\right] M_2 = 0,$$

o

$$\begin{aligned} 4f_1(\lambda) M_1 + f_2(\lambda) M_2 &= 0; \\ f_2(\lambda) M_1 + 4f_1(\lambda) M_2 &= 0. \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

Igualamos a cero el determinante de estas ecuaciones:

$$D = \begin{vmatrix} 4f_1(\lambda) & f_2(\lambda) \\ f_2(\lambda) & 4f_1(\lambda) \end{vmatrix} = [4f_1(\lambda)]^2 - [f_2(\lambda)]^2 = 0,$$

o

$$[4f_1(\lambda) + f_2(\lambda)]\,[4f_1(\lambda) - f_2(\lambda)] = 0.$$

1) $4f_1(\lambda) + f_2(\lambda) = 0$ (oscilaciones simétricas cuando $M_2 = M_1$). La primera raíz $\lambda = 4{,}27$, según (9.27) $\omega^2 = \dfrac{4{,}27^4}{l^4}\dfrac{EJ}{m}$.

2) $4f_1(\lambda) - f_2(\lambda) = 0$ (las oscilaciones son antisimétricas cuando $M_2 = -M_1$). La primera raíz es $\lambda = 7{,}43$, según (9.27) $\omega^2 = \dfrac{7{,}43^4}{l^4}\dfrac{EJ}{m}$.

3) La solución de las ecuaciones (a) es trivial cuando $M_1 = M_2 = 0$; estas formas de oscilaciones son posibles (fig. 221, *b*, *c*).

Según (6.4) $\omega^2 = \dfrac{k^4\pi^4}{l^4}\dfrac{EJ}{m}$ cuando $k = 1, 2, \ldots$

De este ejemplo se deduce que conviene hacer uso de la solución trivial cuando las oscilaciones correspondientes son posibles.

§ 86. CÁLCULO DE LAS VIGAS CONTINUAS A LA ACCIÓN DE LA CARGA VIBRATORIA Y DETERMINACIÓN DE LAS FRECUENCIAS DE OSCILACIONES LIBRES POR EL MÉTODO DE DESPLAZAMIENTOS.

Examinamos las vigas de sección variable escalonada, al igual que en el § 85. El sistema fundamental se da en la fig. 222. La ecuación canónica para este caso es una ecuación de tres ángulos de giro:

$$r_{i(i-1)}Z_{i-1} + r_{ii}Z_i + r_{i(i+1)}Z_{i+1} + R_{ip} = 0. \qquad (10.13)$$

De acuerdo con la tabla 6 tenemos:

$$r_{i(i-1)} = \frac{2EJ_i}{l_i}\mu_2(\lambda_i); \tag{10.14}$$

$$r_{ii} = \frac{4EJ_i}{l_i}\mu_1(\lambda_i) + \frac{4EJ_{i+1}}{l_{i+1}}\mu_1(\lambda_{i+1}); \tag{10.15}$$

$$r_{i(i+1)} = \frac{2EJ_{i+1}}{l_{i+1}}\mu_2(\lambda_{i+1}). \tag{10.16}$$

Con los apoyos articulados en los extremos las reacciones propias r_{11} y $r_{(n-1)(n-1)}$ se determinan según las fórmulas:

$$r_{11} = \frac{3EJ_1}{l_1}\mu_5(\lambda_1) + \frac{4EJ_2}{l_2}\mu_1(\lambda_2); \tag{10.17}$$

$$r_{(n-1)(n-1)} + \frac{4EJ_{n-1}}{l_{n-1}}\mu_1(\lambda_{n-1}) + \frac{3EJ_n}{l_n}\mu_5(\lambda_n). \tag{10.18}$$

Los miembros independientes (de carga) se determinan como momentos en los empotramientos. Las cifras correspondientes a ciertas cargas se dan en la tabla 7.

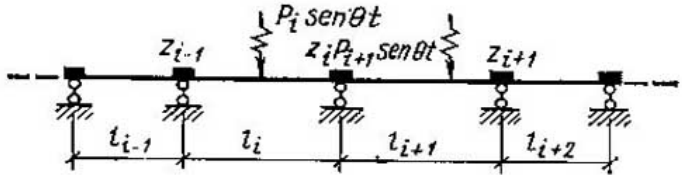


Fig. 222

Las oscilaciones libres de la viga se investigan según las ecuaciones (10.13), pero sin los miembros independientes:

$$r_{i(i-1)}Z_{i-1} + r_{ii}Z_i + r_{i(i+1)}Z_{i+1} = 0. \tag{10.19}$$

Con el fin de obtener las ecuaciones de las frecuencias debemos igualar a cero el determinante de las ecuaciones homogéneas (10.19) y considerar la frecuencia de la carga θ como frecuencia desconocida de oscilaciones libres. Todos los valores de λ referentes a distintas luces, al igual que para los pórticos, los reducimos para la ecuación de frecuencias a un solo valor [véase (9.26)].

De todo lo expuesto se deduce que el cálculo de las vigas continuas según el método de desplazamientos se realiza del mismo modo que el cálculo de los pórticos.

Tenemos que decir lo mismo acerca del empleo del cálculo aproximado de los pórticos, cuando las masas distribuidas de los elementos se sustituyen por las concentradas o se unen a las concentradas.

§ 87. APROVECHAMIENTO DE LA SIMETRIA DE LAS VIGAS EN EL MÉTODO DE FUERZAS Y EN EL MÉTODO DE DESPLAZAMIENTOS. En las vigas simétricas las oscilaciones libres se dividen en simétricas y antisimétricas. Su estudio debe realizarse por separado. Con tal fin podemos, por ejemplo, sustituir la viga por sus mitades con fijaciones especiales sobre el eje de simetría, diferentes para el estudio de las oscilaciones simétricas y antisimétricas. La elección de la fijación depende de por dónde pasa el eje de simetría. Si este último pasa por el centro de la luz del medio, las fijaciones se ejecutan según la fig. 223, *a*; si pasa por el apoyo, entonces según la fig. 223, *b*. Seguidamente el sistema fundamental se elige en concordancia con el método adoptado de cálculo.

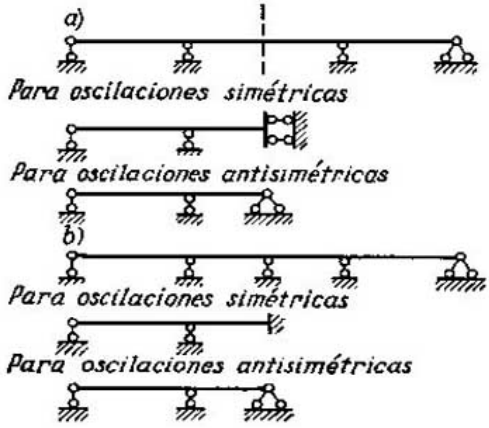


Fig. 223

Cabe también la posibilidad de otro procedimiento de empleo de la simetría. En la mitad derecha del esquema de la viga debemos indicar los momentos de apoyo o, respectivamente, los ángulos de giro expresados por medio de sus idénticos izquierdos (fig. 224). Las ecuaciones canónicas del método de fuerzas o del método de desplazamientos se componen en la cantidad necesaria, igual al número de las incógnitas, teniendo en cuenta los valores de los momentos o de los ángulos de giro situados a la derecha respecto al eje de simetría.

En la fig. 224, *a*, *b* se dan los esquemas para el caso cuando el eje de simetría pasa por la luz del medio, mientras que en la fig. 224, *b*, *d* para cuando éste pasa por el apoyo. En el primer caso ambos métodos comprenden un mismo número de incógnitas y en el segundo, sus cantidades son desiguales. Con motivo de esto en el segundo caso al estudiar las oscilaciones simétricas es recomendable emplear el método de desplazamientos, en tanto que al estudiar las oscilaciones antisimétricas se recomienda el método de fuerzas.

Si se calcula la viga a la acción de la carga de vibración entonces es necesario descomponerla en simétrica y antisimétrica. La carga simétrica creará oscilaciones forzadas simétricas, al tiempo que la carga antisimétrica, oscilaciones forzadas antisimétricas, las cuales, lo mismo que las libres, debemos estudiar por separado. Con ello, todas las indicaciones referentes a la determinación de las oscilaciones libres simétricas y antisimétricas, también son válidas para la determinación de las oscilaciones forzadas.

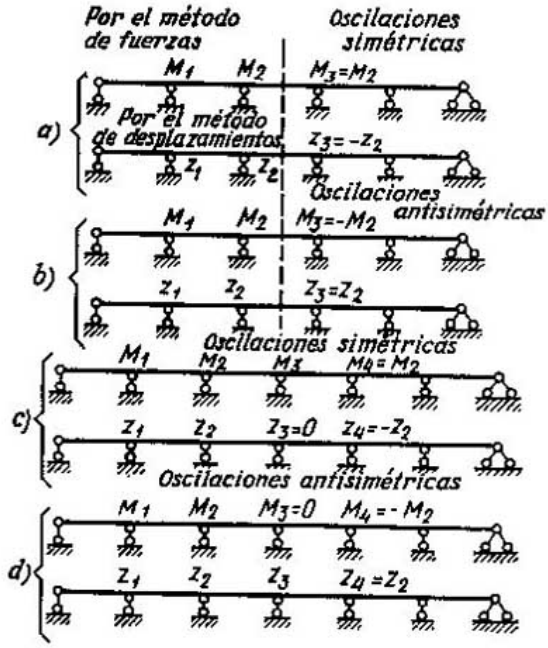


Fig. 224

Ejemplo 66. Determinar las frecuencias de las oscilaciones libres de una viga continua de sección constante con luces iguales (fig. 225, *a*).

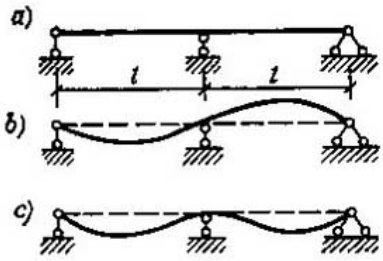


Fig. 225

La ecuación de las oscilaciones libres, por el método de desplazamientos, es

$$r_{11}Z_1 = \left[\frac{3EJ}{l}\mu_5(\lambda) + \frac{3EJ}{l}\mu_5(\lambda)\right]Z_1 = 0.$$

Aquí pueden darse dos casos.

El primer caso. $Z_1 \neq 0$, es decir, $\mu_5(\lambda) = 0$, ó

$$\frac{\lambda}{6}\,\frac{4\,\mathrm{sh}\,\lambda\,\mathrm{sen}\,\lambda}{\mathrm{ch}\,\lambda\,\mathrm{sen}\,\lambda - \mathrm{sh}\,\lambda\cos\lambda} = 0,$$

de aquí se deduce que $\mathrm{sen}\,\lambda = 0$; $\lambda = k\pi$. Según la fórmula (9.27) tenemos que

$$\omega = \frac{k^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}. \qquad \text{(a)}$$

La fórmula (a) determina las frecuencias de oscilaciones de la viga simple, lo cual corresponde a la forma antisimétrica de oscilaciones de la viga continua (fig. 225, *b*).

El segundo caso. $Z_1 = 0$ (es la solución trivial), es decir, cada una de las luces de la viga continua se convierte en una viga empotrada por un extremo y apoyada articuladamente en el otro, lo cual corresponde a las formas simé-

tricas de oscilaciones (fig. 225, *c*). Para la determinación de éstas apliquemos el método de fuerzas.

La ecuación de las oscilaciones libres se halla por el método de fuerzas [véase (10.10)]:

$$\frac{2}{3}\frac{l_1}{EJ} f_1(\lambda) M_1 = 0.$$

Si $M_1 \neq 0$, entonces, $f_1(\lambda) = 0$, por consiguiente,

$$6 (\text{ch}\,\lambda \,\text{sen}\,\lambda - \text{sh}\,\lambda \cos\lambda) : 4\lambda\,\text{sh}\,\lambda \,\text{sen}\,\lambda = 0. \qquad \text{(b)}$$

De aquí se deduce que

$$\text{tg}\,\lambda = \text{th}\,\lambda. \qquad \text{(c)}$$

La primera raíz de esta ecuación de frecuencias será $\lambda = 3{,}927$. La primera frecuencia se determina según la fórmula (9.27):

$$\omega_1 = \frac{3{,}927^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}. \qquad \text{(d)}$$

§ 88. NOCIÓN SOBRE EL CÁLCULO DINÁMICO DE LOS ARCOS.

El arco, que representa en sí una barra curva de sección comúnmente variable con charnela intermedia o sin ella, fijada en apoyos, es un sistema con grado infinito de libertad. Su cálculo exacto, incluso

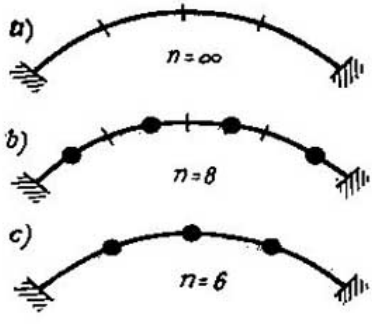


Fig. 226

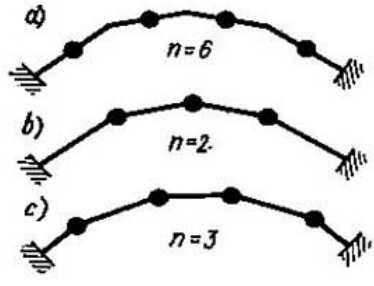


Fig. 227

sin la estructura sobre el arco, la cual se encuentra a menudo, es sumamente complicado. Por esta razón nos limitaremos sólo a exponer las ideas elementales de los métodos aproximados del cálculo.

Los métodos aproximados de cálculo se basan, ante todo, en la sustitución del arco por un sistema con varios grados de libertad. Con este fin dividimos el arco en varios tramos (fig. 226, *a*). La masa distribuida de modo continuo y las masas concentradas, si las hay en el tramo, se sustituyen por una masa concentrada colocada en el centro de gravedad de las masas sustituidas (fig. 226, *b*), o estas masas concentradas se distribuyen a su vez según la ley de la palanca en las fronteras de los tramos vecinos (fig. 226, *c*).

Cada una de las masas puntuales, excepto las masas que están sobre los apoyos, tiene en el arco dos grados de libertad, de aquí

que el número de grados de libertad del arco es igual al número duplicado de masas intermedias.

Comparando la disposición de las masas en la fig. 226, *b*, *c*, podemos establecer que el sistema *c* tiene dos grados de libertad menos que el sistema *b*.

Las simplificaciones ulteriores en los cálculos aproximados se consiguen por la sustitución del arco por una barra quebrada, es decir, por un pórtico (fig. 227, *a*). Esta sustitución puede realizarse de modo diferente: o los tramos rectos del pórtico se disponen entre las fronteras de los tramos (fig. 227, *a*, *b*) o bien entre las masas, al colocarlos por el primer procedimiento (fig. 226, *b*), como se muestra en la figura 227, *c*.

Semejante sustitución con la premisa suplementaria que ignora la deformación de tracción o compresión de las barras del pórtico, disminuye el número de grados de libertad del sistema, sobre todo al colocar las masas según la fig. 226, *c* y al sustituir la barra curva por una quebrada según la fig. 227, *b*.

La sustitución del arco por el pórtico con nudos en los lugares donde se colocan las masas por el primer procedimiento (fig. 227, *c*) da un grado más de libertad que una sustitución análoga en el segundo procedimiento de colocación de las masas (fig. 227, *b*). En las figs. 226 y 227 están indicados los grados de libertad de cada uno de los sistemas.

La posterior determinación de las frecuencias de oscilaciones libres de los arcos o el cálculo a la acción de las cargas P sen θt, y en general $P(t)$, se realiza en concordancia con los procedimientos de los métodos exactos y aproximados de cálculo de los sistemas con varios grados de libertad.

§ 89. NOCIÓN SOBRE EL CÁLCULO EXACTO DE LAS ARMADURAS. La armadura, considerando las masas distribuidas de sus

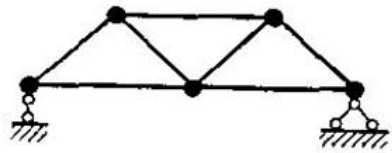


Fig. 228

barras, es un sistema con un grado infinito de libertad. Una determinación exacta de las frecuencias de oscilaciones libres de tal armadura, teniendo en cuenta la rigidez de los enlaces nodales, y el cálculo de la armadura a la acción de la carga dinámica representan un problema muy complicado.

El método de cálculo que examinamos aquí, aunque se denomina «exacto», se refiere a un esquema de cálculo aproximado, en el cual los vínculos nodales se consideran articulados, mientras que las

masas de las barras de la armadura y las cargas que actúan sobre la armadura, están distribuidas por los nudos (fig. 228).

Con semejante esquema de cálculo la armadura se convierte en un sistema con un número finito de grados de libertad, determinado en caso general según la fórmula

$$n = 2N - E_a, \tag{10.20}$$

donde N es la cantidad de nudos por los cuales están distribuidas las masas de la armadura; E_a, la cantidad de los enlaces de apoyo contiguos a los nudos con masas concentradas.

Con el planteamiento estricto del problema, en la fórmula (10.20) por N debemos sobreentender todos los nudos de la armadura. Generalmente en este caso el número de grados de libertad suele ser grande y el cálculo de la armadura llega a ser prácticamente complicado. En virtud de esto el esquema de cálculo se simplifica a cuenta de las premisas suplementarias: desprecio de las masas pequeñas, menosprecio de algunos desplazamientos, etc.

1. Oscilaciones libres de las armaduras. Las ecuaciones canónicas escritas por medio de las fuerzas de inercia, tienen la siguiente forma [véase (3.50)]:

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{11}^* J_{1i}^* + \delta_{12} J_{2i}^* + \ldots + \delta_{1n} J_{ni}^* = 0; \\ &\delta_{21} J_{1i}^* + \delta_{22}^* J_{2i}^* + \ldots + \delta_{2n} J_{ni}^* = 0; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\delta_{n1} J_{1i}^* + \delta_{n2} J_{2i}^* + \ldots + \delta_{nn}^* J_{ni}^* = 0, \end{aligned}\right\} \tag{10.21}$$

donde

$$\delta_{kk}^* = \delta_{kk} - \frac{1}{m_k \omega_i^2} = \delta_{kk} - \lambda_i : m_k; \qquad \lambda_i = 1 : \omega_i^2.$$

En vista de que algunas masas en los nudos de la armadura pueden tener dos desplazamientos independientes, esta masa creará dos fuerzas de inercia en dirección de los desplazamientos de la masa admitidos para el cálculo. Por esta razón debemos emplear la numeración de desplazamientos o de fuerzas de inercia y no de masas.

Las ecuaciones (10.21) son homogéneas. La ecuación secular la obtenemos según (3.52).

Al estudiar las oscilaciones simétricas y antisimétricas en las armaduras, es menester aplicar el método de desplazamientos pares.

Las ecuaciones canónicas de desplazamientos de masas podemos componerlas en otra forma desarrollada, para la cual la necesidad de determinar los desplazamientos de tipo δ_{km} desaparece. Ellas se componen basándose en ciertas admisiones suplementarias mediante las siguientes consideraciones.

Cortemos de la armadura cualquier nudo k (fig. 229) y examinemos su equilibrio. Cada uno de los nudos vecinos se designa con el índice i, el cual tomará las designaciones concretas de los nudos vecinos al escribir las ecuaciones canónicas. Dejemos que el desplazamiento

del nudo k por la horizontal sea x_k y por la vertical, y_k. Los esfuerzos causados por la carga estática en las barras del nudo cortado de la armadura, ora están equilibrados entre sí, si en el nudo no hay carga, ora se hallan en equilibrio con la carga del nudo, si ésta existe. Por eso, tanto las cargas estáticas prefijadas, como los refuerzos producidos por éstas en las barras de la armadura, no se someten al

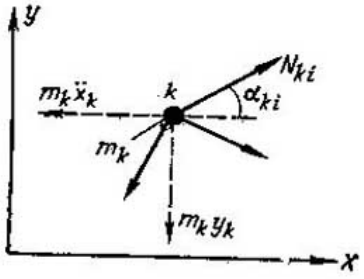


Fig. 229

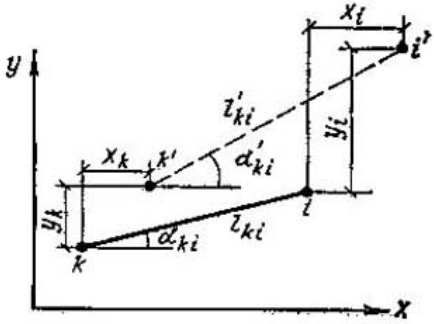


Fig. 230

examen. Examinaremos sólo los esfuerzos suplementarios N_{ki}, que surgen en las barras durante las oscilaciones de las armaduras, y las fuerzas de inercia $-m_k\ddot{x}_k$ y $-m_k\ddot{y}_k$.

Las ecuaciones del equilibrio dinámico son:

$$m_k\ddot{x}_k = \Sigma N_{ki}\cos\alpha_{ki}; \qquad m_k\ddot{y}_k = \Sigma N_{ki}\operatorname{sen}\alpha_{ki}. \tag{10.22}$$

Aquí las sumas están compuestas según la cantidad de barras del nudo k.

Para aclarar la relación entre los desplazamientos del nudo k y los desplazamientos de cualquier nudo vecino i, examinemos la barra ki que une estos nudos (fig. 230). Designemos por x_i e y_i los desplazamientos del nudo i, por los puntos k' e i' la nueva posición de los nudos y que sea la nueva longitud de la barra ki l'_{ki}. Proyectando el segmento l'_{ki} sobre los ejes de coordenadas, obtendremos:

$$\begin{aligned} l'_{ki}\cos\alpha'_{ki} &= l_{ki}\cos\alpha_{ki} + x_i - x_k; \\ l'_{ki}\operatorname{sen}\alpha'_{ki} &= l_{ki}\operatorname{sen}\alpha_{ki} + y_i - y_k. \end{aligned} \tag{10.23}$$

Elevando al cuadrado estas ecuaciones y sumando, tendremos:

$$(l'_{ki})^2 = (l_{ki}\cos\alpha_{ki} + x_i - x_k)^2 + (l_{ki}\operatorname{sen}\alpha_{ki} + y_i - y_k)^2.$$

Después de hacer las transformaciones, tenemos que

$$\begin{aligned} (l'_{ki})^2 = l_{ki}^2 + 2l_{ki}\,[(x_i - x_k)\cos\alpha_{ki} + (y - y_k)\operatorname{sen}\alpha_{ki}] + \\ + (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2. \end{aligned} \tag{10.24}$$

Supongamos que $l'_{kl} = l_{kl} + \Delta l_{kl}$, entonces, tenemos que

$$l_{kl}^2 + 2l_{kl}\Delta l_{kl} + \Delta l_{kl}^2 = l_{kl}^2 + 2l_{kl}[(x_l - x_k)\cos\alpha_{kl} + (y_l - y_k)\operatorname{sen}\alpha_{kl}] + (x_l - x_k)^2 + (y_l - y_k)^2.$$

Luego, despreciando como magnitudes pequeñas en comparación con las restantes Δl_{kl}^2 en el primer miembro de la igualdad $(x_l - x_k)^2$ e $(y_l - y_k)^2$ en el segundo miembro, tenemos que

$$\Delta l_{kl} = (x_l - x_k)\cos\alpha_{kl} + (y_l - y_k)\operatorname{sen}\alpha_{kl}. \qquad (10.25)$$

El esfuerzo que surge en esta barra lo hallamos según la ley de Hooke:

$$N_{kl} = \frac{EF_{kl}}{l_{kl}}\Delta l_{kl} = \frac{EF_{kl}}{l_{kl}}[(x_l - x_k)\cos\alpha_{kl} + (y_l - y_k)\operatorname{sen}\alpha_{kl}]. \qquad (10.26)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación del equilibrio dinámico (10.22), obtenemos:

$$m_k\ddot{x}_k = \sum \frac{EF_{kl}}{l_{kl}}[(x_l - x_k)\cos\alpha_{kl} + (y_l - y_k)\operatorname{sen}\alpha_{kl}]\cos\alpha_{kl};$$

$$m_k\ddot{y}_k = \sum \frac{EF_{kl}}{l_{kl}}[(x_l - x_k)\cos\alpha_{kl} + (y_l - y_k)\operatorname{sen}\alpha_{kl}]\operatorname{sen}\alpha_{kl}. \qquad (10.27)$$

Para transformar estas ecuaciones en algebraicas, supongamos que

$$x_k = a_k \operatorname{sen}(\omega_l t + \varphi_l);$$
$$y_k = b_k \operatorname{sen}(\omega_l t + \varphi_l).$$

Respectivamente tenemos que

$$\ddot{x}_k = -\omega_l^2 a_k \operatorname{sen}(\omega_l t + \varphi_l) = -\omega_l^2 x_k;$$
$$\ddot{y}_k = -\omega_l^2 b_k \operatorname{sen}(\omega_l t + \varphi_l) = -\omega_l^2 y_k.$$

Sustituyendo en (10.27), obtendremos:

$$-m_k\omega_l^2 x_k = \sum \frac{EF_{kl}}{l_{kl}}[(x_l - x_k)\cos\alpha_{kl} + (y_l - y_k)\operatorname{sen}\alpha_{kl}]\cos\alpha_{kl};$$

$$-m_k\omega_l^2 y_k = \sum \frac{EF_{kl}}{l_{kl}}[(x_l - x_k)\cos\alpha_{kl} + (y_l - y_k)\operatorname{sen}\alpha_{kl}]\operatorname{sen}\alpha_{kl}. \qquad (10.28)$$

Estas son las ecuaciones canónicas de las oscilaciones libres en forma desarrollada general.

Para cada una de las masas con dos grados de libertad se componen ambas ecuaciones (10.28), mientras que para la masa con un grado de libertad, una de éstas.

Las ecuaciones canónicas de (10.28) son homogéneas. Igualando a cero el determinante compuesto de los coeficientes de estas ecuaciones, obtendremos la ecuación de las frecuencias.

2. Oscilaciones forzadas de las armaduras causadas por la carga de vibración. Las ecuaciones canónicas de las oscilaciones forzadas causadas por la carga de vibración se expresan por medio de las fuerzas de inercia [3.123] en la siguiente forma:

$$\left.\begin{aligned}
&\delta^*_{11}J^*_1+\delta_{12}J^*_2+\ldots+\delta_{1n}J^*_n+\Delta_{1p}\operatorname{sen}\theta t=0;\\
&\delta_{21}J^*_1+\delta^*_{22}J^*_2+\ldots+\delta_{2n}J^*_n+\Delta_{2p}\operatorname{sen}\theta t=0;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\delta_{n1}J^*_1+\delta_{n2}J^*_2+\ldots+\delta^*_{nn}J^*_n+\Delta_{np}\operatorname{sen}\theta t=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (10.29)$$

Su solución se realiza según las expresiones (3.124)—(3.126) a la vez que los esfuerzos en las barras de las armaduras se determinan según (3.128).

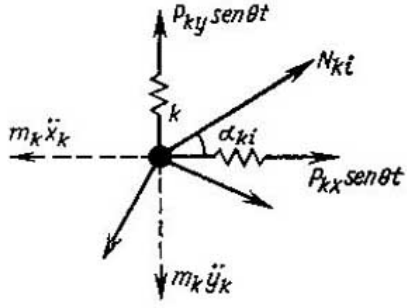


Fig. 231

Para obtener las ecuaciones canónicas en forma desarrollada [del tipo (10.28)], debemos aplicar al nudo cortado k las fuerzas de vibración actuantes P_{kx} sen θt y P_{ky} sen θt y las fuerzas de inercia de la masa (fig. 231):

$$J^*_{kx}=m_k\theta^2x_k;\quad J^*_{ky}=m_k\theta^2y_k.$$

Las ecuaciones del equilibrio dinámico serán:

$$\left.\begin{aligned}
m_k\ddot{x}_k&=-m_k\theta^2x_k=\sum N_{ki}\cos\alpha_{ki}+P_{kx}\operatorname{sen}\theta t;\\
m_k\ddot{y}_k&=-m_k\theta^2y_k=\sum N_{ki}\operatorname{sen}\alpha_{ki}+P_{ky}\operatorname{sen}\theta t.
\end{aligned}\right\} \qquad (10.30)$$

Tomando en consideración (10.26), tenemos:

$$\begin{aligned}
&\sum\frac{EF_{ki}}{l_{ki}}\left[(x_i-x_k)\cos\alpha_{ki}+(y_i-y_k)\operatorname{sen}\alpha_{ki}\right]\cos\alpha_{ki}+\\
&\qquad+m_k\theta^2\,x_k+P_{kx}\operatorname{sen}\theta t=0;\\
&\sum\frac{EF_{ki}}{l_{ki}}\left[(x_i-x_k)\cos\alpha_{ki}+(y_i-y_k)\operatorname{sen}\alpha_{ki}\right]\operatorname{sen}\alpha_{ki}+\\
&\qquad+m_k\theta^2y_k+P_{ky}\operatorname{sen}\theta t=0. \qquad (10.31)
\end{aligned}$$

Las ecuaciones (10.31) se escriben del mismo modo que (10.28).

§ 90. MÉTODOS APROXIMADOS DE DETERMINACIÓN DE LAS FRECUENCIAS DE OSCILACIONES LIBRES DE LAS ARMADURAS. Muchos de los métodos aproximados de determinación de las frecuencias de oscilaciones libres de las vigas (véase el capítulo 7) son también realmente aplicables para las armaduras. Los métodos adquieren cierta distinción de forma debido al carácter específico de la armadura como un sistema de barras particular.

1. **Método energético.** El método energético se basa en la expresión (7.46).

Examinemos alguna armadura con masas concentradas en sus nudos. Supongamos que los desplazamientos de cualquier masa nodal k, la cual tiene dos grados de libertad, son:

$$\left.\begin{aligned} x_k(t) &= x_k \operatorname{sen}(\omega_i t + \varphi_i); \\ y_k(t) &= y_k \operatorname{sen}(\omega_i t + \varphi_i). \end{aligned}\right\} \tag{10.32}$$

Respectivamente, las velocidades de movimiento de la masa k son:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= \omega_i x_k \cos(\omega_i t + \varphi_i); \\ \dot{y}_k(t) &= \omega_i y_k \cos(\omega_i t + \varphi_i). \end{aligned}\right\} \tag{10.33}$$

La energía cinética de la armadura, teniendo en cuenta (10.33), es:

$$K = \frac{1}{2}\sum m_k [\dot{x}_k^2(t) + \dot{y}_k^2(t)] = \frac{1}{2}\sum m_k (x_k^2 + y_k^2)\,\omega_i^2 \cos^2(\omega_i t + \varphi_i).$$

Por consiguiente, $\cos^2(\omega_i t + \varphi_i) = 1$

$$K_{\text{máx}} = \frac{\omega_i^2}{2}\sum m_k (x_k^2 + y_k^2). \tag{10.34}$$

La suma se calcula para todas las masas que tienen desplazamientos x_k e y_k o uno de ellos. Sustituyendo en (7.46), obtendremos:

$$\omega_i^2 = 2V_{\text{máx}} : \sum m_k (x_k^2 + y_k^2). \tag{10.35}$$

La energía potencial elástica expresada mediante el trabajo de las fuerzas internas, es igual a

$$V = \sum \frac{N_i^2(t)\, l_i}{2EF_i}.$$

Las fuerzas (esfuerzos) longitudinales en las barras de la armadura varían durante las oscilaciones según la ley

$$N_i(t) = N_i \operatorname{sen}(\omega_i t + \varphi_i).$$

Teniendo en cuenta esto, hallamos que

$$V = \sum \frac{N_i^2 \operatorname{sen}^2(\omega_i t + \varphi_i)\, l_i}{2EF_i}.$$

Por consiguiente, para $\operatorname{sen}^2(\omega_i t + \varphi_i) = 1$ tenemos que

$$V_{\text{máx}} = \sum \frac{N_i^2 l_i}{2EF_i}. \tag{10.36}$$

Aquí hallamos la suma para cada una de las barras de la armadura. Ahora nos resulta que

$$\omega_i^2 = \sum \frac{N_i^2 l_i}{EF_i} : \sum m_k (x_k^2 + y_k^2). \tag{10.37}$$

Si los desplazamientos x_k e y_k durante las oscilaciones con frecuencia ω_i fueran conocidos, entonces la fórmula (10.37) nos daría una respuesta exacta. Ya que los desplazamientos son desconocidos, debemos prefijarlos en cálculos aproximados. Cuanto más cercanos a los verdaderos son los valores de x_k e y_k que prefijamos, tanto más próximo al valor exacto es la frecuencia de oscilaciones calculada según (10.37). Al mismo tiempo debemos tener en cuenta que no se puede prefijar arbitrariamente los desplazamientos x_k e y_k para las masas, ya que los desplazamientos de la masa k tienen que ser relacionados con los de las masas vecinas a ésta. Por esta razón es recomendable prefijar para las armaduras los desplazamientos x_k e y_k debidos a cierta carga que produce desplazamientos estáticos, cuya forma es próxima a la de los desplazamientos de oscilaciones de forma principal con la frecuencia ω_i.

2. Método de aproximaciones sucesivas. Los valores de amplitud de las fuerzas de inercia de la masa k son:

$$\left.\begin{aligned} J_{kx}^* &= m_k \omega_i^2 x_k \quad \text{(por el eje } x\text{)}; \\ J_{ky}^* &= m_k \omega_i^2 y_k \quad \text{(por el eje } y\text{)}. \end{aligned}\right\} \tag{10.38}$$

Al actuar estas fuerzas sobre la armadura, obtendremos los valores exactos de los desplazamientos de amplitud x_k e y_k. Disminuyamos ω_i^2 veces las fuerzas de inercia (10.38):

$$\hat{J}_{kx}^* = m_k x_k; \quad \hat{J}_{ky}^* = m_k y_y. \tag{10.39}$$

Supongamos que los desplazamientos de la masa k causados por estas fuerzas son $x_{k1}^* y_{k1}^*$.

Ellos son ω_i^2 veces menores que los desplazamientos x_k e y_k. Por lo tanto tenemos que

$$\omega_i^2 = x_k : x_{k1}^* = y_k : y_{k1}^*. \tag{10.40}$$

Si ahora admitimos los desplazamientos x_{k1}^* e y_{k1}^* en calidad de desplazamientos iniciales, las fuerzas de inercia calculadas según (10.39) serán ω_i^2 veces menores que las verdaderas, al mismo tiempo que los nuevos desplazamientos x_{k2}^* e y_{k2}^* serán otras tantas veces menores que los iniciales x_{k1}^* e y_{k1}^*, es decir,

$$\omega_i^2 = \frac{x_{k1}^*}{x_{k2}^*} = \frac{y_{k1}^*}{y_{k2}^*}. \tag{10.41}$$

Generalizando podemos escribir así:

$$\omega_i^2 = \frac{x_{k(n-1)}^*}{x_{kn}^*} = \frac{y_{k(n-1)}^*}{y_{kn}^*} \tag{10.42}$$

para cualquier $n = 1, 2, \ldots, x_{k0}^* = x_k; y_{k0}^* = y_k$.

Todo lo dicho es justo, si los desplazamientos x_k e y_k son conocidos; sin embargo, éstos son desconocidos, por eso, al igual que en el método energético, debemos prefijarlos; siendo así, las expresiones (10.40)—(10.42) nos darán diferentes frecuencias de oscilaciones libres. Con ello la expresión (10.40) determinará la frecuencia en la primera aproximación; la (10.41), en la segunda y la expresión (10.42) en cualquiera n-ésima aproximación.

Comúnmente el proceso de aproximaciones es de convergencia rápida, y con frecuencia la segunda aproximación ya es prácticamente admisible.

El orden de cálculo es el siguiente:

1) se prefijan los desplazamientos x_k e y_k;

2) según (10.39) se determinan las fuerzas de inercia; partiendo de estas últimas, los desplazamientos x^*_{k1} e y^*_{k2}, y de acuerdo con la expresión (10.40) se determina la frecuencia ω_1^2 en la primera aproximación;

3) partiendo de los desplazamientos x^*_{k1} e y^*_{k1}, se hallan las nuevas fuerzas de inercia (10.39); por ellas se hallan los nuevos desplazamientos x^*_{k2} e y^*_{k2}; según (10.41) se halla la segunda aproximación de ω_1^2 etc., hasta que la frecuencia en la siguiente aproximación sea próxima a la anterior.

El método de aproximaciones sucesivas también puede aprovecharse para la precisión del resultado obtenido por otro método, en particular, por el método energético.

3. Método de traslado (superposición) de las masas. De acuerdo con (7.66) podemos escribir:

$$\frac{1}{\omega^2} = \sum m_k \left(\delta_{kk(x)} + \delta_{kk(y)}\right), \qquad (10.43)$$

donde $\delta_{kk(x)} = \sum \frac{\overline{N}^2_{ix} l_i}{EF_i}$ es el desplazamiento de la masa k producido en dirección del eje x por la fuerza $P_{kx} = 1$ aplicada a esta masa; $\delta_{kk(y)} = \sum \frac{\overline{N}^2_{iy} l_i}{EF_i}$ es el desplazamiento de la masa k producido en dirección del eje y por la fuerza $P_{ky} = 1$ aplicada a esta masa; $\overline{N}_{ix}$, el esfuerzo producido en cualquier barra i por la fuerza $P_{kx} = 1$ aplicada a la masa k en dirección del eje x, y $\overline{N}_{iy}$, por la fuerza $P_{ky} = 1$ en dirección del eje y.

La suma se realiza en (10.43) para las masas que tienen desplazamientos, mientras que, al calcular $\delta_{kk(x)}$ y $\delta_{kk(y)}$, hacemos la suma respecto a todas las barras de la armadura.

4. Método de solución aproximada de la ecuación de las frecuencias de sistemas con n grados de libertad. En este método se emplean las expresiones (7.72)—(7.75), teniendo en cuenta que una misma masa puntual m_i con dos grados de libertad tiene dos desplazamientos independientes: el uno por el eje x y el otro por el eje y.

Todos los métodos aproximados que hemos examinado requieren un gran trabajo de cálculo. Por eso con frecuencia se desprecian los desplazamientos horizontales de las masas y algunas masas pequeñas, para simplificar y otener un sistema con un número menor de grados de libertad.

§. 91. DETERMINACIÓN DE LAS FRECUENCIAS DE OSCILACIONES LIBRES DE LA ARMADURA MEDIANTE LA SUSTITUCIÓN POR UNA VIGA. Este método se distingue por la simplicidad en comparación con los otros y da resultados prácticamente admisibles para las armaduras de viga con cordones paralelos o casi paralelos.

De ordinario, para simplificar, la viga de sustitución se designa con una sección constante en todo su largo, a la vez que su rigidez EJ, equivalente a la rigidez de la armadura sustituida, se determina partiendo de la flecha de la armadura producida por la carga estática en medio de la luz.

Dejemos que la flecha de la armadura en medio de la luz, determinada según la fórmula de Morh—Maxwell, sea

$$\Delta = \sum \overline{N}_{ik} \frac{N_{iq}}{EF_i} l_i, \tag{10.44}$$

donde $\overline{N}_{ik}$ es el esfuerzo causado en la barra i por la fuerza $P_k = 1$ aplicada en el centro de la luz; N_{iq}, el esfuerzo producido en la misma barra por la carga estática; l_i, F_i, son la longitud y el área de sección de la i-ésima barra.

Suponiendo luego que la carga estática sobre la armadura está distribuida uniformemente a lo largo de la luz de la viga de sustitución podemos escribir:

$$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}. \tag{10.45}$$

Igualando Δ a f, tendremos:

$$\sum \overline{N}_{ik} \frac{N_{iq}}{EF_i} l_i = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}.$$

De aquí obtenemos la rigidez de la viga de sustitución:

$$EJ = \frac{5}{384} ql^4 : \sum \overline{N}_{ik} \frac{L_{iq}}{EF_i} l_i. \tag{10.46}$$

La primera frecuencia de oscilaciones libres de la viga se determina según (6.4), teniendo en cuenta (10.46):

$$\omega = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{g}{q} \frac{5ql^4}{384} : \sum \overline{N}_{ik} \frac{N_{iq}}{EF_i} l_i} =$$

$$= 1{,}13 \sqrt{g : \sum \overline{N}_{ik} \frac{N_{iq}}{EF_i} l_i} = 1{,}13 \sqrt{\frac{g}{\Delta}}. \tag{10.47}$$

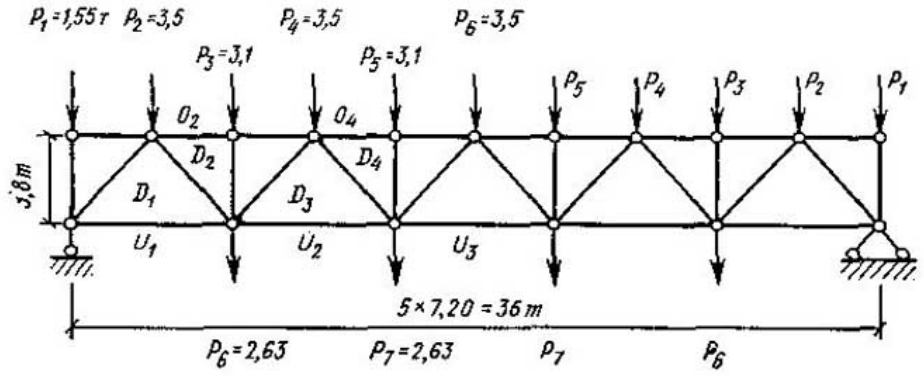


Fig. 232

Ejemplo 67. Determinar la primera frecuencia de oscilaciones de la armadura (fig. 232). En la tabla 11 se aducen los datos necesarios para la determi-

Tabla 11

Barra	$\frac{l_i}{F_i}$	Esfuerzos		$\overline{N}_{ik}N_{iq}\frac{l_i}{F_i}$
		causados por la carga actuante N_{iq}	causados por la fuerza unitaria $\overline{N}_{ik}$	
U_1	6,0	19,65	0,473	55,8
U_2	3,0	45,9	4,42	195,6
U_3	1,50	54,6	2,37	194,5
O_2	4,80	—35,0	—0,945	159
O_4	3,27	—52,5	—1,89	325
D_1	4,43	—31,4	—0,76	105,5
D_2	4,80	24,4	0,76	88,9
D_3	7,20	—17,45	—0,76	95,6
D_4	9,60	10,5	0,76	76,9
D_5	11,52	—3,5	—0,76	31,1
Suma	—	—	—	1327,9

nación de Δ. Para $E = 2{,}15 \cdot 10^6$ kg/cm² obtenemos:

$$\Delta = 1327{,}9 \cdot 10^3 \cdot 2 : 2{,}15 \cdot 10^6 = 1{,}232 \text{ cm}.$$

Hallamos la frecuencia de oscilaciones según (10.47):

$$\omega = 1{,}13 \sqrt{\frac{981}{1{,}232}} = 31{,}9 \text{ s}^{-1},$$

CAPÍTULO 11 * ELEMENTOS DE CÁLCULO DE LAS OBRAS A LA RESISTENCIA SÍSMICA

Durante los terremotos tienen lugar desplazamientos y oscilaciones desordenados de la superficie de la corteza terrestre, los cuales en caso general podemos descomponerlos en horizontales y verticales. Estos desplazamientos y oscilaciones se transmiten inmediatamente al cimiento de la obra y a través de este último, a la propia construcción, provocando en ella cargas suplementarias, que son las fuerzas de inercia, las cuales es necesario tomarlas en consideración al realizar el cálculo.

Las fuerzas de inercia de la obra dependen tanto de los desplazamientos y oscilaciones del cimiento, como de los desplazamientos de la obra y de la rigidez de la misma.

Según sea la rigidez de la construcción, se ha aceptado distinguir dos métodos de cálculo — estático y dinámico.

§ 92. MÉTODO ESTÁTICO DE CÁLCULO. La obra se considera absolutamente rígida, sus desplazamientos en cualquier momento de tiempo son iguales a los desplazamientos del cimiento, los cuales,

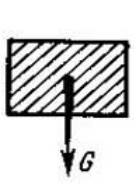


Fig. 233

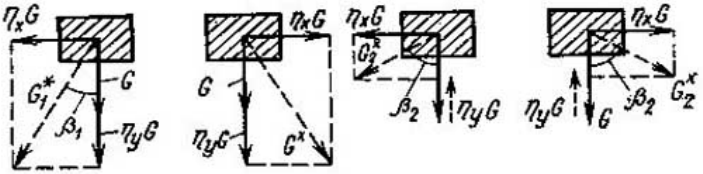


Fig. 234

a su vez, son idénticos a los de la corteza terrestre. En este caso las fuerzas de inercia de la obra se determinan por las aceleraciones de la corteza terrestre durante el terremoto y por las condiciones iniciales del movimiento.

Supongamos que las aceleraciones son: una vertical $\pm a_y$ y otra horizontal $\pm a_x$.

Examinemos cierta parte de la construcción con un peso igual a G (fig. 233). Durante el terremoto al peso de esta parte se adicionan las fuerzas de inercia:

$$\left.\begin{aligned} &\text{verticales } \pm \frac{a_y}{g} G = \pm \eta_y G; \\ &\text{horizontales } \pm \frac{a_x}{g} G = \pm \eta_x G, \end{aligned}\right\} \qquad (11.1)$$

$$\text{donde } \eta_y = \frac{a_y}{g} \text{ y } \eta_x = \frac{a_x}{g}.$$

Los coeficientes η_y y η_x se denominan coeficientes de sismicidad. Las posibles combinaciones de las fuerzas que actúan sobre la parte de la construcción durante los terremotos se muestran en la fig. 234.

Para el cálculo estático de la construcción, debemos aceptar la combinación más desfavorable de las fuerzas, con la cual se carga la obra. Para cualquier combinación de las fuerzas (fig. 234) podemos hallar una resultante, la cual designamos por G^*. La magnitud y posición de esta última se deterinan partiendo de los ángulos β_1 o β_2 (ángulos de sismicidad) y de las fuerzas G, $\eta_y G$ y $\eta_x G$.

Partiendo de las dos primeras combinaciones (fig. 234), tenemos:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\beta_1 &= \frac{\eta_x}{1+\eta_y}\ ; \\ G_1^* &= G(1+\eta_y) : \cos\beta_1. \end{aligned}\right\} \qquad (11.2)$$

Puesto que

$$\cos\beta_1 = 1 : \sqrt{1+\eta_x^2 : (1+\eta_y)^2},$$

entonces

$$G_1^* = G(1+\eta_y)\sqrt{1+\eta_x^2 : (1+\eta_y)^2}.$$

En definitiva resulta que

$$G_1^* = k_1 G, \qquad (11.3)$$

donde

$$k_1 = \sqrt{(1+\eta_y)^2+\eta_x^2}.$$

Por analogía, partiendo de las dos últimas combinaciones tenemos:

$$\operatorname{tg}\beta_2 = \eta_x : (1-\eta_y); \qquad (11.4)$$

$$G_2^* = k_2 G, \qquad (11.5)$$

donde

$$k_2 = \sqrt{(1-\eta_y)^2+\eta_x^2}.$$

Si ahora hacemos girar, por ejemplo, la primera combinación de fuerzas (véase la fig. 234) a un ángulo β_1 de modo que la resultante G_1^* sea vertical (fig. 235), entonces podemos considerar convencionalmente esta parte de la obra como parte con un nuevo peso G_1^*. Ello da la posibilidad de representar todo el sistema prefijado (fig. 236) como si fuera girado en el ángulo β y tuviera un nuevo peso G^*, determinado según la fórmula (11.3).

También podemos realizar una operación análoga con otras combinaciones de las fuerzas. Semejante modo de tratar el cálculo sísmico fue empleado por el autor [15]. Este método es cómodo sobre todo para el cálculo de los muros de contención (fig. 237, *a*), ya que permite emplear las fórmulas corrientes de cálculo estático para la pared girada en el ángulo sísmico β (fig. 237, *b*), siendo aumentada la densi-

dad ρ^*. En este caso es necesario tomar en consideración la variación del ángulo de rozamiento interno, el rozamiento del terreno contra el muro y la adherencia del terreno durante el terremoto.

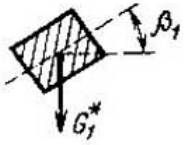


Fig. 235

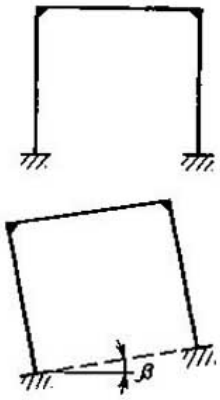


Fig. 236

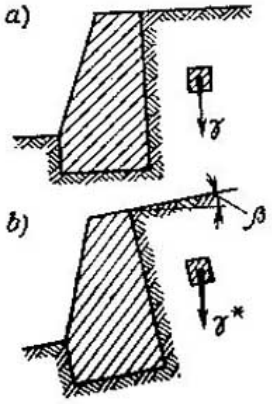


Fig. 237

§ 93. MÉTODO DINÁMICO DE CÁLCULO. El cálculo radica principalmente en la investigación de las obras durante las perturbaciones cinemáticas de sus cimientos.

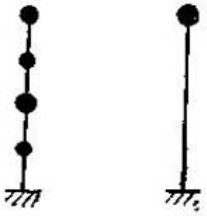


Fig. 238

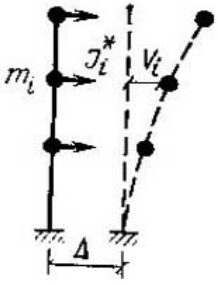


Fig. 239

El problema, enunciado en forma simple, se reduce al cálculo del pilar que porta una o varias masas concentradas (fig. 238) para el desplazamiento preestablecido del punto donde está empotrado.

Las ecuaciones canónicas se escriben según (3.5):

$$-\delta_{k1}m_1\ddot{y}_1\delta_{k2}m_2\ddot{y}_2 - \ldots - \delta_{kn}m_n\ddot{y}_n - y_k + \Delta = 0 \qquad (11.6)$$

$$\text{para } k = 1, 2, \ldots, n,$$

donde Δ es el desplazamiento prefijado del punto de empotramiento del pilar.

A veces a tal cálculo se le atribuye otra forma, partiendo de que el desplazamiento de cualquier masa m_i se compone del desplazamiento provocado por el desplazamiento del cimiento Δy del desplazamiento debido a la flexión del pilar (fig. 239):

$$y_i = \Delta + v_i.$$

La fuerza de inercia aplicada en el lugar de ubicación de la masa m_i, es

$$J_i^* = -m_i (\ddot{\Delta} + \ddot{v}_i). \tag{11.7}$$

En vista de que la fuerza de inercia $-(m_i\ddot{\Delta})$, en esencia es una magnitud prefijada, podemos calificarla como fuerza actuante conocida. Esta circunstancia permite sustituir el cálculo de los desplazamientos forzados por el cálculo en el que están prefijadas las fuerzas y se determinan sólo los desplazamientos v_i de las masas causados por la flexión del pilar. La ecuación canónica en este caso será:

$$v_k = \delta_{k1} (-m_1\ddot{\Delta} - m_1\ddot{v}_1) + \delta_{k2} (-m_2\ddot{\Delta} - m_2\ddot{v}_2) + \ldots + \\ + \delta_{kn} (-m_n\ddot{\Delta} - m_n\ddot{v}_n),$$

o

$$-\delta_{k1}m_1\ddot{v}_1 - \delta_{k2}m_2\ddot{v}_2 - \ldots - \delta_{kn}m_n\ddot{v}_n - v_k + \Delta_k(t) = 0,$$

donde

$$\Delta_k (t) = -(\delta_{k1}m_1\ddot{\Delta} + \delta_{k2}m_2\ddot{\Delta} + \ldots + \delta_{kn}m_n\ddot{\Delta}). \tag{11.8}$$

Si sustituimos aquí $v_i = y_i - \Delta$, obtendremos la ecuación (11.6).

Cuando el desplazamiento del punto de empotramiento del pilar está prefijado en forma general $\Delta (t)$, podemos utilizar su desarrollo en serie trigonométrica o según las formas principales de oscilaciones propias como en los sistemas con un número finito de grados de libertad.

ESTABILIDAD DE LAS OBRAS

CAPÍTULO 1 * LA ESTABILIDAD DE LAS OBRAS Y LOS MÉTODOS PARA SU INVESTIGACIÓN

§ 1. OBJETO Y PROBLEMAS DE LA ESTABILIDAD DE LAS OBRAS. La estabilidad de las obras es una parte especial de la mecánica de construcción, dedicada a los métodos de cálculo de esa estabilidad.

Se denomina estabilidad a la capacidad que poseen las obras de conservar su posición inicial y la forma inicial de equilibrio en el estado de deformación en correspondencia con la carga, de estar siempre en una posición cercana al estado inicial imperturbable ante cualesquiera pequeñas perturbaciones exteriores y volver a la posición inicial completamente en la fase elástica, y, como regla, parcialmente, en el estadio elástico-plástico, si las causas fortuitas que provocaron la perturbación de la obra, desaparecen.

En otras palabras, la estabilidad es la propiedad de la obra de ofrecer resistencia a las influencias externas *casuales* y de restablecer **por sí misma** total o parcialmente su posición y la forma de equilibrio en estado de deformación, cuando esas influencias fortuitas desaparecen.

En correspondencia con esto habremos de diferenciar la estabilidad *de la posición* de la obra y la estabilidad *de las formas de equilibrio* en estado de deformación.

La estabilidad de las obras ante el crecimiento de las fuerzas que actúan sobre ellas, con frecuencia, no es ilimitada. Cuando esta propiedad se ha agotado, la obra no puede seguir resistiendo a la carga actuante y debido a causas ajenas insignificantes de orden externo o interno, modifica su posición inicial o su forma inicial de estado de deformación, y, a veces, ambas conjuntamente. Por eso, pueden existir posiciones estables e inestables de las obras, formas de equilibrio estable e inestable en el estado de deformacion de toda la obra o de algunas de sus partes.

Los conceptos de posiciones y formas de equilibrio en estado de deformación estables e inestables, están vinculados al examen de aquellos movimientos que habrá de efectuar la obra, si algunos factores **externos** le provocan desviaciones iniciales sumamente pequeñas con respecto al equilibrio investigado, con velocidades iniciales muy pequeñas.

La posición de la obra y la forma del equilibrio en el estado de deformación se consideran **estables, si para cualquier** desviación

posible, tan pequeña como se quiera, del equilibrio investigado, y para velocidades comunicadas a la obra tan pequeñas como se quiera, el objeto habrá de desviarse sumamente poco del equilibrio investigado.

El comportamiento de la obra estable después de la perturbación, depende de si ella trabaja en la fase elástica o en la elástico-plástica.

Si la obra trabaja en la fase elástica, entonces, habiéndose inclinado hasta el final debido a la perturbación, una vez que queda liberada a su propia suerte, comenzará a moverse hacia el estado inicial y oscilará alrededor del mismo; en presencia de las fuerzas de resistencia, estas oscilaciones se amortiguarán y, finalmente, el objeto regresará a su estado inicial.

Si la obra trabaja en la fase elástico-plástica, su comportamiento después de la perturbación resultará sensiblemente más complejo que durante su trabajo en el estadio elástico. Pero también en este caso, el objeto estable que, por efecto de la perturbación, se haya inclinado hasta el final, comienza a moverse hacia la posición inicial, lo que constituye un indicio de su estabilidad. Sin embargo, por regla general, la obra, luego de algunas oscilaciones se detiene, pero ya no regresa totalmente al estado inicial.

La posición de la obra y la forma de equilibrio en el estado de deformación se consideran **inestables**, si, **ante cualquier** desviación posible, tan pequeña como se quiera, del equilibrio investigado y cualesquiera velocidades iniciales tan pequeñas como se quiera, la obra se aleja inmediatamente del equilibrio investigado e incluso no manifiesta ninguna tendencia para regresar al mismo, apartándose hasta una nueva posición o una nueva forma de equilibrio en el estado de deformación.

De este modo, la definición del equilibrio estable de una obra surge del carácter de su movimiento ante perturbaciones tan pequeñas como se quieran. Si el estado del objeto con estas perturbaciones resulta cercano al inicial y después de la interrupción de las perturbaciones en el estadio elástico se restablece totalmente, y en el estadio plástico, parcialmente, es decir, que por lo menos manifiesta la tendencia de regresar, entonces, semejante estado del objeto se denomina **estable.**

Todo lo expresado se puede generalizar para las perturbaciones y desviaciones pequeñas pero finitas, que se presentan en la práctica. Debido a esto se distingue la estabilidad «en pequeño», para perturbaciones y desviaciones tan pequeñas como se quiera y la estabilidad «en grande», para perturbaciones y desviaciones pequeñas pero finitas.

Si una obra es estable «en grande», también lo será «en pequeño». El juicio contrario no siempre es verídico y necesita una investigación especial, cuando esto es necesario.

Hay que hacer notar, que habría que realizar una división más precisa en tres categorías: estabilidad en lo «infinitamente peque-

ño», estabilidad en lo «finitamente pequeña» y estabilidad en «cualquier» desplazamiento posible.

El paso de una obra del estado estable al inestable con frecuencia lo denominan *pérdida de la estabilidad*. La frontera de este paso se llama *estado crítico* de la obra, y las cargas correspondientes, *críticas*.

La carga crítica puede referirse al equilibrio estable o al inestable; ello depende del sistema, de la exactitud de la investigación realizada y de otras causas.

La pérdida de la estabilidad, como se deduce del concepto de estabilidad, puede ser de dos tipos: 1) pérdida de la estabilidad de posición, y 2) pérdida de la estabilidad de formas de equilibrio en el estado de deformación.

La pérdida de la estabilidad de posición se refiere al caso, cuando la obra en su conjunto no puede ulteriormente conservar su posición

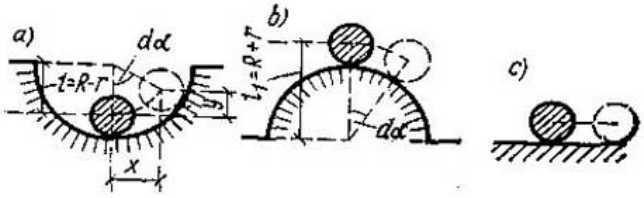


Fig. 1

inicial y se ve obligada a cambiarla como, por ejemplo, al derribar o desplazar paredes de contención, presas, un arca de agua, etc. En este caso se produce el desequilibrio de las fuerzas exteriores que actúan sobre la obra, que recupera su equilibrio sólo en su nueva posición.

A fin de comprender claramente la estabilidad de la posición de las obras, examinemos las posiciones de algunos cuerpos sólidos.

Consideremos una bola en el fondo de una esfera cóncava (fig. 1, *a*) en la cima de una esfera convexa (fig. 1, *b*) y en un plano horizontal (fig. 1, *c*).

Comuniquemos a la bola un traslado y una velocidad iniciales tan pequeños como se quiera. Sea que después de esto la bola se encuentre en la posición indicada con línea de puntos (fig. 1) y luego la dejamos librada a sí misma.

En el primer caso (fig. 1, *a*) la energía cinética inicial será amortiguada por la elevación ulterior de la bola a una altura complementaria infinitamente pequeña, después de lo cual la bola se detiene por un instante, pero no habrá equilibrio, por cuanto la reacción inclinada de la esfera lisa no puede equilibrar la fuerza vertical del peso. La fuerza resultante del peso y de la reacción estará dirigida hacia el lado de la posición inicial de la bola y ella iniciará el regreso a esta posición. Con esto, rodando por la esfera desde la posición desviada, la bola adquirirá energía cinética, gracias a la cual se traslada, pasan-

do por la posición investigada, al otro lado de la esfera, y luego comienza a moverse hacia el lado opuesto. Pero incluso en condiciones ideales la bola no puede elevarse en el otro lado de la esfera más arriba del nivel del cual inició su movimiento. De este modo la bola se moverá *en las proximidades* de la posición investigada, en el fondo de la esfera, sin alejarse de la misma. El rozamiento absorberá energía, y ello hará que la bola finalmente se detenga en la posición inicial.

Todo esto atestigua que la posición de la bola en el fondo de la esfera cóncava será **estable.**

En el segundo caso (fig. 1, *b*) la fuerza resultante de la reacción de la esfera lisa y del peso de la bola estará dirigida en sentido opuesto a la posición inicial y la bola rodará inmediatamente por la esfera alejándose, incluso si no existiese energía cinética inicial (velocidad inicial). Esto significa que la posición de la bola en la cima de la esfera convexa es inestable.

En el tercer caso (fig. 1, *c*) la reacción del plano liso, aunque puede equilibrar la fuerza del peso de la bola, ocurre que en condiciones ideales la energía cinética inicial no puede ser amortiguada por nada y la bola habrá de moverse hacia adelante. Por consiguiente, la posición de la bola en el plano liso también es **inestable.**

Pero si en calidad de perturbación inicial se adopta **sólo** el desplazamiento inicial, la bola en el plano, después de haber sido desplazada, permanece en su lugar. Ella no regresa a su lugar inicial ni manifiesta una tendencia hacia ello, aunque tampoco se alejará más. Semejante posición de la bola se denomina **indiferente.** En este sentido utilizaremos en adelante el equilibrio indiferente.

Si la bola se coloca en una superficie de ensilladura (fig. 2), entonces, con respecto a la desviación según la línea *a—b* la posición de la bola es estable, pero con relación a la línea *c—d* ella es inestable. *Por eso, la posición de un cuerpo puede considerarse estable sólo en el caso en que es imposible cualquier desplazamiento suyo que lleve a una posición considerada inestable. Dicho de otro modo, si el cuerpo, ante cualquier desviación es capaz de regresar a la posición inicial, es estable.*

Como se aprecia en el ejemplo, cuando el cuerpo se desvía de la posición investigada la fuerza del peso en la posición estable realiza un trabajo negativo (la energía crece); en la posición inestable, un trabajo positivo (la energía disminuye), y en la posición indiferente su trabajo es nulo (la energía no varía). En consecuencia, la energía de la posición del cuerpo es mínima si el equilibrio es estable, máxima si el equilibrio es inestable, y constante si el equilibrio resulta indiferente.

Todas las conclusiones de las investigaciones de la estabilidad de la bola «en pequeño» son válidas para su estabilidad «en grande». Además es evidente que se sobreentienden equellos traslados infinitamente pequeños, con los que la bola permanece en las superficies dadas.

Una cuestión distinta resulta cuando, por ejemplo, la bola se encuentra en una esfera cóncava pero muy pequeña, ubicada en la cima de otra esfera convexa (fig. 3). Con desplazamientos infinitamente pequeños, la bola regresará a la posición inicial (será estable

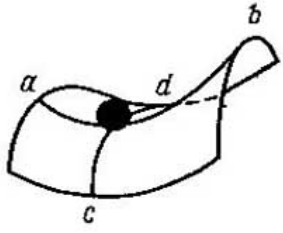


Fig. 2

Fig. 3

«en pequeño»), mientras que con desplazamientos pequeños finitos, bien puede no volver a la posición inicial (es decir, ser inestable «en grande»).

Hasta ahora han sido descritas las posiciones de los cuerpos sólo bajo la influencia de sus propios pesos, cuyo valor numérico no desempeñaba ningún papel. Ahora estudiaremos la posición de los cuerpos bajo la acción de fuerzas crecientes sobre ellos y mostraremos cómo la posición estable de un cuerpo puede transformarse en inestable.

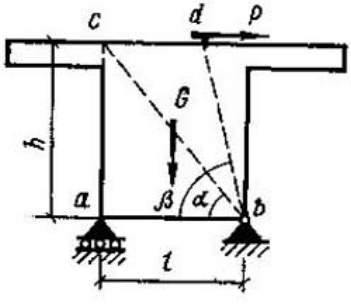


Fig. 4

Consideremos una placa (un disco plano) en dos apoyos (fig. 4), además, el apoyo izquierdo movible es capaz de desarrollar una reacción sólo hacia arriba, es decir, es un enlace unilateral. El único traslado de la placa permitido por los enlaces, es la rotación de la misma en el sentido de las agujas del reloj con respecto a la charnela b. Mientras que sobre la placa no actúa ninguna carga, excepto su propio peso, su equilibrio es estable. En efecto, si giramos la placa en un ángulo infinitamente pequeño en el sentido de las agujas del reloj, entonces el propio peso de la placa la hará regresar a la posición inicial. Lo mismo sucederá luego de un giro pequeño finito.

Comencemos ahora a aplicarle a la placa en un punto arbitrario d la fuerza horizontal P. Mientras la reacción del apoyo izquierdo es positiva, es decir, cuando $Ph < G\,(l/2)$, el equilibrio de la placa es estable. Si la fuerza $P = G\,(l/2h)$, entonces la reacción izquierda será igual a cero. En este caso, la resultante de la fuerza P y G pasará a través de la charnela b y por eso comienza el estado *crítico*. Llamemos a esta fuerza crítica P_{cr}.

No es difícil darse cuenta de que si para el giro dado a la placa alrededor de la charnela b en un ángulo infinitamente pequeño en el sentido de las agujas del reloj, el punto de aplicación P habrá de elevarse, entonces para la fuerza crítica $P_{cr} = G\frac{l}{2h}$ el equilibrio de la placa será inestable, y la fuerza P_{cr} para algunas perturbaciones externas que levantan la placa, la volcará. En efecto, al elevar el punto de aplicación de la fuerza P_{cr} el brazo de la misma con respecto a la charnela b crecerá, al mismo tiempo que el brazo G al girar se acorta. Y si al girar la placa el punto de aplicación de la fuerza P_{cr} desciende y el brazo de esta fuerza con respecto a la charnela b disminuye, entonces, para $P = P_{cr}$ la posición puede ser inestable, estable e indiferente. Todo depende de la magnitud de descenso de la fuerza P_{cr}.

En el caso considerado y en otros semejantes a él, la estabilidad depende de la magnitud de la fuerza actuante P, y cuando $P = P_{cr}$, también del punto de aplicación de este fuerza. Aquí el propio peso desempeña un papel esencial en la estabilidad de la posición.

La pérdida de estabilidad de la forma de equilibrio en el estado de deformación se refiere al caso cuando la forma inicial de deformación de los cuerpos que tienen por lo menos de las tres dimensiones una pequeña en comparación con las otras dos, que corresponde a pequeñas cargas iniciales de un determinado tipo, para un determinado valor de estas cargas se vuelve inestable y se ve obligada a adoptar otra forma, cualitativamente distinta de la inicial. Comienza la ramificación (bifurcación) de las por lo menos dos formas de equilibrio teóricamente posibles, una de las cuales es inestable.

Examinando el proceso continuo de carga, se puede observar que en los sistemas elásticos el paso de un estado de equilibrio a otro durante la bifurcación, tiene lugar de inmediato con grandes traslados, para pequeños excesos de carga en el momento de la bifurcación, y, a veces, sin excesos, lo que atestigua su peligro.

Si inmediatamente a continuación del paso de la obra a otra posición o a otra forma de equilibrio en el estado de deformación, el objeto incorpora un enlace que antes no trabajaba, entonces la obra adquiere por algún tiempo nuevamente estabilidad y si ulteriormente se le aumentan las cargas en pequeñas dosis, éstas habrán de corresponder a pequeños traslados (véase la fig. 14, *d*). En estos casos, cuando casi de inmediato se incorpora un enlace complementario tras la bifurcación (para pequeños φ_0 véase la fig. 14, *d*), se puede hablar de una bifurcación sin pérdida de la estabilidad. Un cuadro semejante de este fenómeno tiene lugar cuando se comba una varilla en el estadio plástico y la fuerza aplicada es mayor que la elástica pero menor que la crítica. En este caso, durante la flexión tiene lugar la descarga de una parte de la sección, a raíz de lo cual aumenta la rigidez de la barra, o sea, es como si se incorporara un enlace complementario.

De este modo, se puede distinguir la bifurcación con pérdida de estabilidad, cuando en el momento de la bifurcación a pequeños aumentos de la carga inmediatamente les corresponden grandes desplazamientos, y de la bifurcación sin pérdida de la estabilidad, cuando a pequeños excesos de la carga les corresponden pequeños deplazamientos.

Aclaremos lo expresado con algunos ejemplos.

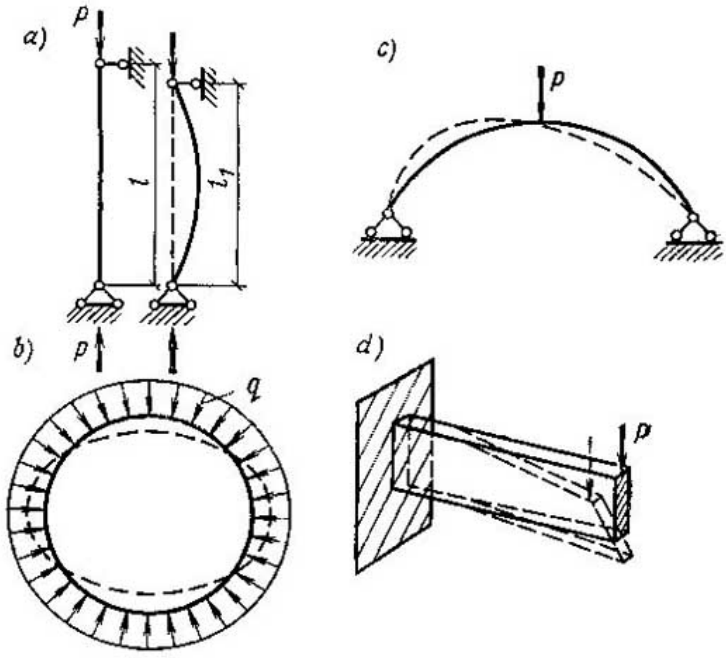


Fig. 5

Una barra recta larga, contraída por dos fuerzas en sus extremos, para un valor determinado de las fuerzas de compresión se vuelve inestable y ante pequeños influjos externos se encorva (fig. 5, *a*) y ya no vuelve al estado inicial rectilíneo; un anillo circular apretado radialmente por una carga uniforme, que conserva su forma cuando la carga es pequeña, al adoptar ésta un determinado valor adquiere en un principio una forma elíptica y luego una forma similar a un ocho (fig. 5, *b*); un arco simétricamente cargado cambia su forma inicial simétrica de deformación por otra oblicua (fig. 5, *c*); una barra fina, flexionada en el plano de mayor rigidez, ante cierta carga comienza a doblarse oblicuamente y a torcerse (fig. 5, *d*).

Podrían mostrarse muchos ejemplos más de la pérdida de la estabilidad de las formas de equilibrio en el estado de deformación, pero no hay necesidad de ello, por cuanto el aspecto fundamental del fenómeno se refleja claramente en los casos apuntados

más arriba. Este aspecto se reduce a que el tipo inicial de la deformación para ciertos valores de las cargas actuantes se vuelve inestable y le cede su lugar a otro tipo de deformación, mientras que el carácter de la carga externa permanece invariable, modificándose sólo su valor.

En el caso cuando la forma del estado de deformación pierde estabilidad, las fuerzas internas, sólo propias del primer tipo de deformación, no pueden obstaculizar la aparición ni el desarrollo de la deformación complementaria de nuevo tipo.

En otras palabras, a diferencia de la pérdida de la estabilidad de la posición, aquí se alteran las condiciones de equilibrio entre las fuerzas exteriores e interiores, correspondientes al tipo inicial de deformación, que se restablecen con mucha rapidez (casi instantáneamente) en el nuevo estado de deformación.

A fin de estudiar ahora con más detalle la esencia del fenómeno de pérdida de la estabilidad de las formas de equilibrio del estado de deformación, así como las consecuencias derivadas de este fenómeno, es necesario ante todo recordar que los métodos habituales del cálculo de las obras a la rigidez suponen la conservación del tipo inicial de deformación determinado, que corresponde tanto al tipo de cargas dado, como al crecimiento de estas cargas por cualquier ley, hasta un momento reconocido como peligroso para la solidez de material dado.

Sin embargo, como se deduce de los ejemplos mostrados, en algunos casos, antes de que se manifiesten las cargas destructoras y, a veces, con una carga menor que la admitida habitualmente, la forma inicial del estado de deformación se vuelve inestable y pasa a otra forma. Esta nueva forma crea en el elemento de la obra tensiones complementarias, no consideradas en el cálculo habitual a la rigidez, y puede suceder que estas tensiones complementarias provoquen la destrucción del material del elemento con cargas menores que las admitidas según el cálculo habitual a la rigidez para la forma inicial de equilibrio.

Se pueden traer a colación muchos ejemplos de grandes catástrofes de obras de ingeniería, cuando la estabilidad de la forma de equilibrio del estado de deformación de sus elementos no fue comprobada por medio de cálculos, debido a lo cual la práctica castigó con rigor a los creadores de tales obras.

De este modo, la investigación del estado tenso de los elementos que tienen una o dos dimensiones pequeñas con respecto a las otras, a partir sólo del tipo inicial de deformación, correspondiente a cargas pequeñas, en algunos y no raros casos es por cierto insuficiente. En estos casos son necesarias investigaciones complementarias de la estabilidad de la forma inicial de equilibrio en el estado de deformación.

De todo lo expresado se deduce que la carga crítica es la frontera teórica de la bifurcación de las formas de equilibrio, cuando luego de la pérdida de la estabilidad en la segunda forma de equilibrio,

habitualmente a pequeños incrementos de la carga les corresponden grandes desplazamientos.

La pérdida de la estabilidad con el cambio de la forma del estado de deformación se denomina pérdida de estabilidad de *primer* género.

Si la pérdida de la estabilidad tiene lugar en la fase elástica, siendo que el equilibrio postcrítico sólo puede tener lugar para un incremento positivo de la carga crítica, entonces, la forma postcrítica de equilibrio elástico dentro de ciertos límites de crecimiento de la carga habitualmente resulta estable, es decir, capaz de restablecerse ante cualesquiera pequeñas desviaciones de esta forma, cuando la causa que las ha provocado, desaparece.

Teóricamente, la nueva forma del estado de deformación ya puede manifestarse cuando la carga crítica recibe por lo menos un incremento infinitamente pequeño. Si la carga supera en mucho a la crítica, entonces, más allá de algunos de sus valores, denominados críticos de orden superior, son teóricamente posibles varias (más de dos) formas distintas de equilibrio en el estado de deformación. Sin embargo, todas ellas, excepto la primera forma, más allá de la primera carga crítica, son inestables, poco probables y, lo que es más importante, no tienen ningún sentido práctico, por cuanto al calcular las obras se debe conocer la carga crítica menor.

Hay que destacar particularmente, que la carga crítica al perder estabilidad en la fase elástica habitualmente en teoría aún no es destructiva, con la que se agota por completo la capacidad portadora de la obra o de sus elementos, aunque para los objetos de construcciones comunes con frecuencia es muy cercana a la carga destructiva. Por eso, la identificación que a veces se hace entre las cargas crítica y destructiva es, en general, condicionada. Al mismo tiempo, no se debe olvidar que la carga crítica es con frecuencia muy cercana a la destructiva y resulta *peligrosa*. Máxime que las desviaciones que siempre existen en la realidad con respecto al esquema de cálculo, influyen negativamente en la estabilidad del elemento o de toda la obra y, en alguna medida, privan de una autenticidad total a los resultados de las elaboraciones teóricas.

En aquellos casos cuando el equilibrio postcrítico sólo es posible con la disminución de la carga crítica, la nueva forma de equilibrio elástico resulta inestable. Para estos sistemas la carga crítica, como regla, también será destructiva.

Si la pérdida de la estabilidad tiene lugar en la fase *plástica* de trabajo del material, entonces la nueva forma de equilibrio en el estado de deformación tendrá deformaciones residuales. Ella ya no será capaz de restablecerse plenamente, si es que causas extrañas hacen aumentar la deformación plástica. En este caso se puede considerar *condicionalmente* que el restablecimiento parcial de la forma inicial atestigua su estabilidad.

Si se considera la pérdida de la estabilidad de la forma de equilibrio en un planteamiento ideal, entonces el paso de una forma a otra sólo es posible como resultado de alguna causa exterior. Pero en la

realidad, además de las causas exteriores existen las interiores. Desde el comienzo de la carga, a raíz de diversas imperfecciones, además del tipo fundamental predominante de deformación, son inevitables las deformaciones de otro tipo, las que en la fase inicial de carga no se manifiestan en grado notable y pueden no ser tenidas en cuenta en los cálculos. Sólo con la aproximación de la carga al valor crítico estas deformaciones de segundo orden alteran la fundamental de tal modo, que engendran una nueva forma de equilibrio.

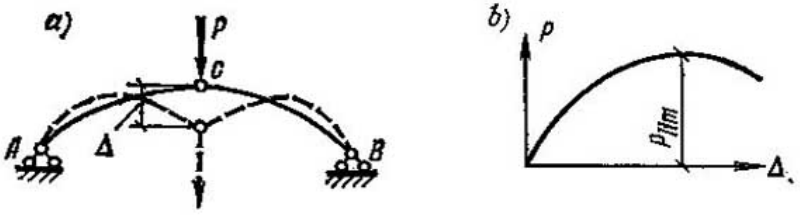


Fig. 6

A la pérdida de estabilidad de *segundo* género habitualmente se la denomina primer estado límite del sistema por capacidad portadora, cuando para un aumento ulterior de la carga el equilibrio entre las fuerzas exteriores e interiores resulta imposible. El sólo es posible ante una disminución de la carga.

La pérdida de la estabilidad de segundo género puede ocurrir tanto con el cambio de la forma inicial del estado de deformación como sin él, tanto en la fase elástica como en la elástico-plástica. Así, por ejemplo, puede tener lugar la pérdida de la capacidad portadora de un arco flexible de tres articulaciones (fig. 6, *a*) incluso en la fase elástica, sin el cambio de la forma del estado de deformación incluso hasta la fuerza límite P_{lim}, con la cual se alcanza el límite del equilibrio posible entre las fuerzas exteriores e interiores. En adelante, el equilibrio sólo se logra con la disminución de la fuerza P (fig. 6, *b*). El estado límite se define por la condición

$$dP/d\Delta = 0.$$

El problema de la estabilidad de las obras consiste en el cálculo de éstas, fundamentalmente a la estabilidad del primer género.

En nuestro curso se considera la estabilidad de los sistemas conservadores, es decir de los elásticos, cuando sobre ellos actúan fuerzas que tienen potencial. Recordemos que estas fuerzas poseen dos propiedades:

1) la magnitud y dirección de cada fuerza dependen sólo de la posición del sistema;

2) el trabajo de las fuerzas en algún traslado del sistema no depende del camino de seguimiento de cada fuerza, siendo únicamente función de las posiciones inicial y final del sistema.

§ 2. INDICIOS DE LA ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO DE UN SISTEMA CONSERVADOR. El equilibrio de un sistema se determina por los siguientes indicios.

1. Por el principio de los traslados posibles, según el cual, *si el sistema se encuentra en equilibrio, la suma de los trabajos de todas las fuerzas interiores y exteriores en cualesquiera posibiles traslados infinitamente pequeños, calculada hasta los infinitésimos de primer orden, para enlaces ideales y bilaterales es igual a cero, y para enlaces unilaterales es igual a cero o negativa.*

2. Por la propiedad de la energía potencial total del sistema según la cual, *si el sistema se halla en equilibrio, su potencial total de energía, es decir, la energía de las fuerzas interiores y exteriores, adopta un valor extremo.*

Sin embargo, ambos indicios no responden a la pregunta de si el equilibrio dado es estable o inestable. A esta cuestión responde el teorema de Lagrange—Dirichlet, según el cual, **si el potencial total de energía de un sistema tiene un mínimo con respecto a todas las posiciones suficientemente cercanas del sistema (mínimo local), entonces el equilibrio del sistema es estable.** En los restantes casos estacionarios, los equilibrios de los sistemas son **inestables.**

Conforme al teorema de Lagrange—Dirichlet, para el análisis de la estabilidad de un sistema hay que examinar el cambio de su energía potencial, cuando el sistema pasa a un nuevo estado de desviación infinitamente cercano como resultado de una supuesta pérdida de la estabilidad. Aquí, si la energía potencial del sistema en cada estado de desviación, calculada *tomando en cuenta todas las magnitudes infinitesimales*, resulta mayor que la energía potencial del sistema en el estado investigado, entonces el sistema es *estable.*

La energía potencial total del sistema en el estado de deformación consta de la energía potencial de deformación (energía de las fuerzas interiores) y de la energía potencial de las fuerzas exteriores. Además, recordemos que si las fuerzas exteriores efectúan un trabajo positivo, entonces la energía de las mismas disminuye. Por consiguiente, el cambio de la energía total del sistema δU cuando el mismo pasa de la posición investigada a otra contigua, se puede escribir así:

$$\delta U = \delta V - \delta T, \tag{1.1}$$

donde δV es el incremento de la energía potencial de deformación; δT, el incremento del trabajo de las fuerzas exteriores.

Si el estado investigado es estable, entonces, de acuerdo con el principio de Lagrange—Dirichlet $\delta U > 0$, es decir,

$$\delta V - \delta T > 0. \tag{1.2}$$

Quiere decir, que si se tienen en cuenta todas las magnitudes infinitesimales, entonces

$$\text{con } \delta V > \delta T, \text{ tenemos el equilibrio estable;} \tag{1.3}$$
$$\text{» } \delta V < \delta T, \text{ el equilibrio inestable;} \tag{1.4}$$
$$\text{» } \delta V = \delta T, \text{ el equilibrio indiferente.} \tag{1.5}$$

Si no existe el equilibrio indiferente, la igualdad (1.5), escrita con una exactitud de hasta un infinitésimo del orden inferior, detoermina la carga crítica, lo que habitualmente se emplea en el método energético.

La expresión del equilibrio estable (1.3) también se puede interpretar así: las fuerzas exteriores siempre tienden a realizar un trabajo positivo. Por eso, si en el estado de inclinación, la energía potencial elástica de deformación del sistema, complementariamente acumulada, es mayor que el trabajo de las fuerzas exteriores para esa inclinación, entonces, esta energía es capaz de superar la resistencia de las fuerzas exteriores al regreso de las mismas al lugar anterior, y ella hará que el sistema vuelva a su estado inicial.

Otro enfoque de esta misma cuestión se reduce a la investigación al mínimo de la energía potencial del sistema. Para esto se compone la expresión de la energía potencial del sistema en el estado de desviación con traslados finitos en función de uno o varios parámetros por la cantidad de grados de libertad del sistema, empleados en la investigación dada. Así, por ejemplo, para un sistema con un grado de libertad la energía potencial es determinada por un solo parámetro: el traslado general q. La condición del valor extremal del potencial de la energía U en este caso será:

$$\frac{dU}{dq} = 0. \tag{1.6}$$

Si con esto,

$$\frac{d^nU}{dq^n} > 0, \text{ es el equilibrio estable;} \tag{1.7}$$

$$\frac{d^nU}{dq^n} < 0, \text{ el equilibrio inestable;} \tag{1.8}$$

$$\frac{d^nU}{dq^n} = 0, \text{ el estado transitorio (crítico);} \tag{1.9}$$

$$\frac{d^mU}{dq^m} \equiv 0, \text{ el equilibrio indiferente,} \tag{1.10}$$

donde n es el orden de la derivada inferior diferente del cero, si ella es par (habitualmente, $n = 2$); m es cualquier orden de la derivada.

Si n es el orden inferior, distinto de cero, de una derivada impar, entonces el equilibrio es *inestable*.

En los sistemas con n grados de libertad, la energía potencial U depende de n traslados generalizados:

$$U = f(q_1, q_2, \ldots, q_n).$$

Las condiciones de mínimo de la energía potencial en este caso se hallan mediante las reglas generales del análisis matemático, lo que, hablando en general, resulta un problema complejo.

Para los sistemas con dos grados de libertad, cuando $U = f(q_1, q_2)$, estas condiciones serán:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0. \tag{1.11}$$

Si con esto, para los valores q_1 y q_2 hallados a partir de (1.11), se cumple la desigualdad

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = c_{11}c_{22} - c_{22}^2 > 0, \tag{1.12}$$

donde

$$c_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}; \quad c_{12} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}; \quad c_{22} = \frac{\partial_2 U}{\partial q_2^2}, \tag{1.13}$$

entonces, cuando $c_{11} > 0$ ó $c_{22} > 0$ [puesto que c_{11} y c_{22} al cumplir la condición (1.12) tendrán el mismo signo], tiene lugar el *mínimo* de la energía potencial, mientras que cuando $c_{11} < 0$, el *máximo*.

Cuando $c_{11}c_{22} - c_{12}^2 < 0$, no existen puntos extremos, y si $c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = 0$, se está en presencia de un caso de indeterminación, que requiere un examen con el empleo de derivadas superiores.

Si los traslados generalizados (coordenadas) $q_1, q_2, \ldots, q_n$, contados a partir de la posición de equilibrio investigada, se consideran como magnitudes pequeñas, entonces, descomponiendo la energía potencial en serie por los grados de las pequeñas coordenadas, obtenemos:

$$U(q_1, q_2, \ldots, q_n) = U_0 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_0 q_i + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 q_i q_j + \ldots \tag{1.14}$$

Adoptando el valor U_0 en posición de equilibrio como el comienzo de la lectura, es decir, suponiendo $U_0 = 0$, teniendo en cuenta que, por las condiciones de equilibrio $\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_0 = 0$, y, despreciando los infinitésimos de órdenes superiores, tendremos:

$$U(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} q_i q_j, \tag{1.15}$$

donde

$$c_{ij} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0. \tag{1.16}$$

La expresión (1.15) define la energía potencial como una forma cuadrática debida a las coordenadas generalizadas $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

La posición (el estado) investigada es estable, si la energía potencial U es mínima. Para esto debe cumplirse la condición

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} q_i q_j > 0. \tag{1.17}$$

Esto significa que la forma cuadrática U debe ser determinadamente positiva. Para ello es necesario y suficiente, que el descriminante

de la energía potencial y sus menores principales sean positivos, es decir,

$$c_{11} > 0; \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0 \ldots\ldots \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} > 0, \quad (1.18)$$

donde

$$c_{ij} = c_{ji} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \, \partial q_j}. \quad (1.19)$$

Aunque una de las condiciones no se cumpla, se requiere un análisis complementario.

Los criterios de estabilidad (1.3)—(1.8) se denominan *energéticos*.

Sobre la estabilidad de la forma inicial de equilibrio del objeto estudiado, que antes de la carga se encuentra en equilibrio estable, se puede juzgar basándose en consideraciones estáticas que surgen de su equilibrio en estado de desviación, principalmente nuevo durante el desdoblamiento de las formas de equilibrio, pero cercano al estado investigado.

Si en cada desviación el estado de equilibrio es posible, entonces hay que hallar el valor del tipo de fuerzas dado a partir de la condición de equilibrio del sistema en el estado de desviación y comparar estas fuerzas con las cargas dadas. En aquellos casos cuando las cargas, que equilibran al sistema en posición de desviación, son *mayores* que las dadas, el sistema no puede ser mantenido en estado de desviación por las fuerzas dadas y regresará a la posición inicial, lo que significa que el equilibrio es *estable*. Si las cargas que mantienen al sistema en estado de desviación son *menores* que las dadas, entonces, las fuerzas dadas no sólo son capaces de mantener al sistema en estado de desviación, sino que habrán de aumentar su desviación y, por consiguiente, el equilibrio es *inestable*. Si las cargas que mantienen al sistema en estado de inclinación, dentro de ciertos límites de la desviación dada son siempre iguales a las cargas dadas, entonces el equilibrio dentro de estos límites, será *indiferente*.

Todo lo dicho surge de la curva de estados de equilibrio del sistema cuando él se desvía del equilibrio investigado $P = f(\Delta)$ (fig. 7), si la desviación según la nueva forma de su estado se puede determinar por un cierto parámetro de desplazamiento Δ y por el parámetro de carga P.

En aquellos casos cuando el parámetro de carga $P = f(\Delta)$ en el estado de desviación para cualquier valor de Δ dentro de ciertos límites es mayor que el parámetro de la carga dada, dentro de estos límites el equilibrio investigado es *estable*; si es menor que el parámetro de la carga dada, es *inestable*, y si es igual al parámetro de la carga dada, el equilibrio es *indiferente*.

El parámetro crítico de carga en la curva de equilibrio se determina madiante el punto k de ramificación de las formas de equilibrio

para $\Delta = 0$, es decir, $P_{cr} = f(0)$. Si la función $f(\Delta)$ para valores infinitesimales de $\Delta > 0$, incluso para $dP/d\Delta = 0$ en el punto k (fig. 8), es *creciente*, entonces cuando $P = P_{cr}$, el equilibrio es aun estable; si la función $f(\Delta)$ es decreciente, entonces cuando $P = P_{cr}$ el equilibrio ya es *inestable*, y si la función $f(\Delta)$ es *constante*, entonces cuando $P = P_{cr}$, el equilibrio es *indiferente*. Para el caso mostrado en la fig. 7 el equilibrio para $P = P_{cr}$ es aun estable.

Consideremos ahora el equilibrio del sistema en el estado de inclinación y mostremos que si, por ejemplo, para $\Delta > 0$ la función

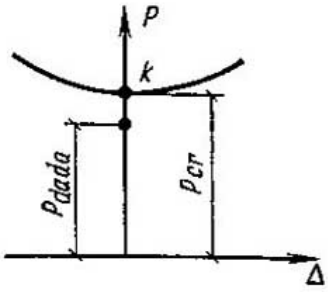


Fig. 7

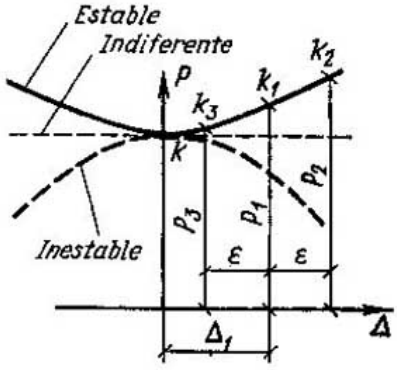


Fig. 8

$f(\Delta)$ es unívocamente *creciente*, entonces el equilibrio del estado de inclinación para variaciones de Δ resulta *estable*. Examinamos cierto punto k_1 en la curva de los estados de equilibrio para un determinado valor Δ_1 (fig. 8). Incrementamos la coordenada Δ_1 en $+\varepsilon$, lo que corresponde al punto k_2 en la curva. Con una desviación complementaria, para el equilibrio del sistema se debe tener una carga con parámetro $P_2 > P_1$, inexistente en el sistema, por lo cual éste regresará a su posición inicial. Damos un incremento negativo de $-\varepsilon$ a la coordenada Δ_1, lo que en la curva corresponde al punto k_3. Para el equilibrio del sistema es suficiente una carga con parámetro $P_3 < P_1$, mientras que el mismo tiene una carga $P_1 > P_3$ que hará regresar al sistema a la posición inicial, correspondiente al punto k_1. Del mismo modo se puede mostrar que si para $\Delta > 0$ la función $f(\Delta)$ es unívoca y *decreciente*, entonces el equilibrio del estado de desviación para cambios de Δ es *inestable*.

Cuando $\Delta < 0$ las conclusiones mostradas serán opuestas, es decir para una función $f(\Delta)$ creciente, el equilibrio del estado de desviación es inestable, y si la función es decreciente, estable.

En aquellos casos cuando para $\Delta > 0$ el trabajo de las fuerzas exteriores crece (lo que habitualmente sucede), acerca del equilibrio del sistema en el estado de desviación, ante cambios del parámetro en una función unívoca de estados de equilibrio $P = f(\Delta)$, se puede juzgar por su primera derivada.

Si para $\Delta > 0$, $dP/d\Delta > 0$, entonces el equilibrio es estable. (1.20)

Si para $\Delta > 0$, $dP/d\Delta < 0$, entonces el equilibrio es inestable. (1.21)

Si dentro de ciertos límites $dP/d\Delta = 0$, el equilibrio es indiferente. (1.22)

Esto se deduce del examen de la energía potencial

$$U(\Delta) = V(\Delta) - PT(\Delta),$$

donde $T(\Delta)$ es el trabajo de la carga exterior con parámetro $P = 1$.

Según la condición de equilibrio

$$U'(\Delta) = V'(\Delta) - PT'(\Delta) = 0.$$

De aquí la ecuación de la curva de equilibrio adopta la forma:

$$P = V'(\Delta) : T'(\Delta) = f(\Delta).$$

Respectivamente,

$$\frac{dP}{d\Delta} = \frac{V''(\Delta)\,T(\Delta) - T''(\Delta)\,V'(\Delta)}{[T'(\Delta)]^2} = \frac{V'' - PT''}{T'(\Delta)} = \frac{U''(\Delta)}{T'(\Delta)}.$$

Si $U''(\Delta)$ existe, entonces, para $U''(\Delta) > 0$ y $T'(\Delta) > 0$, cuando $dP/d\Delta > 0$, el equilibrio es estable; para $U''(\Delta) < 0$ y $T'(\Delta) > 0$, cuando $dP/d\Delta < 0$, el equilibrio es inestable.

Todos los resultados obtenidos también serán válidos para la región ubicada a la izquierda del punto k (véase la fig. 8), si se cambia el sentido del eje Δ.

Pero si el equilibrio del sistema en el estado de desviación es en principio imposible, entonces, en base a las fuerzas que actúan en el sistema hay que aclarar cuál será el movimiento del sistema. En aquellos casos en que la desviación crezca el equilibrio será inestable, y cuando la desviación disminuya, el equilibrio será estable. Estos criterios los denominamos *estáticos*.

También es posible un criterio *dinámico* de la estabilidad, basado en la investigación por las ecuaciones de la dinámica del movimiento del sistema desviado con respecto a una posición dada, siempre que las causas que provocaron las desviaciones hayan sido eliminadas y el sistema queda abandonado a sí mismo. El equilibrio es estable si el movimiento resulta oscilatorio con tendencia a extinguirse, o, sencillamente, restablece la posición inicial.

Si, por ejemplo, la frecuencia inferior de las oscilaciones propias, en base a la teoría de las pequeñas oscilaciones lineales, es positiva, entonces el equilibrio es estable; si ella es igual a cero, tiene lugar la situación crítica, y, finalmente, si su magnitud es imaginaria, el equilibrio es inestable.

El empleo de los criterios de estabilidad considerados lo mostraremos en algunos ejemplos.

Examinemos primeramente la posición de una bola en una esfera cóncava (véase la fig. 1, *a*). Cuando la bola pasa de la posición de equilibrio a la desviada la fuerza del peso de la bola ejecuta un

trabajo negativo $-Gl\ (1-\cos d\alpha)$. La bola no tiene energía potencial de deformación, es decir, $\delta V = 0$. Aplicando el criterio (1.3), obtenemos $\delta T = -Gl\ (1-\cos d\alpha) < 0$, o sea, la posición es estable.

Escribamos ahora la expresión de la energía potencial de la bola en el estado de desviación en el ángulo final α, suponiendo que para $\alpha = 0$ su energía total en el estado analizado en igual a U_0, entonces,

$$U = U_0 + Gl\ (1 - \cos \alpha).$$

Formulamos la primera derivada

$$\frac{dU}{d\alpha} = Gl \operatorname{sen} \alpha.$$

Cuando $\alpha = 0$ ella será nula. Esto significa que cuando $\alpha = 0$ el equilibrio es posible para cualquier G.

Formulamos la segunda derivada

$$\frac{d^2U}{d\alpha^2} = Gl \cos \alpha.$$

Cuando $\alpha = 0$ ella es igual a $Gl > 0$, en consecuencia, según (1.7) la posición de la bola es estable.

Si la superficie cóncava (véase la fig. 1, *a*) tuviese la forma de un paraboloide de rotación, descripto por la ecuación $y = ax^{20}$, entonces, despreciando, para simplificar, el radio de la bola, es decir, transformándola en un punto material, tendríamos

$$U = U_0 + Gax^{20}.$$

En este caso la calidad del equilibrio según (1.7) se establece basándose en la vigésima derivada $\left(\frac{d^{20}U}{dx^{20}} = 20\ ta > 0\right)$, que es mayor que cero, y, por lo tanto, la posición de la bola en el fondo de la taza es estable.

Cuando la bola pasa de la posición de equilibrio en la esfera convexa (véase la fig. 1, *b*) a la posición de desviación, el peso de la bola ejecuta un trabajo positivo, $\delta T = Gl\ (1 - \cos d\alpha) > 0$ y, de acuerdo con (1.4), concluimos que la posición es inestable.

La energía potencial y sus derivadas, en este caso, serán:

$$U = U_0 - Gl\ (1 - \cos \alpha);$$

$$\frac{dU}{d\alpha} = -Gl \operatorname{sen} \alpha.$$

Cuando $\alpha = 0$, $dU/d\alpha = 0$ (el equilibrio es posible), $d^2U/d\alpha^2 = -Gl \cos \alpha < 0$ [el equilibrio, según (1.8), es inestable].

Cuando la bola se traslada desde la posición de equilibrio en el plano (véase la fig. 1, *c*) el peso de la misma no efectúa ningún trabajo, su energía potencial es constante. Tenemos una posición de equilibrio indiferente.

Consideremos ahora el equilibrio de la placa (véase la fig. 4) con una fuerza $P_{cr} = Gl/2h$ en dependencia del punto de su aplicación. Hacemos girar la placa en el sentido de las agujas del reloj en

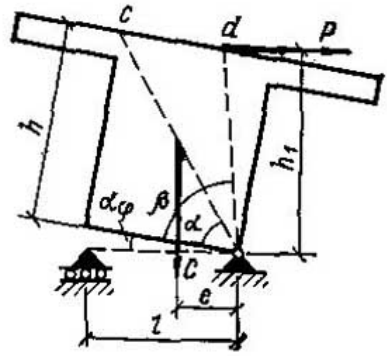


Fig. 9

un ángulo $d\varphi$ y formulamos la expresión del trabajo de las fuerzas aplicadas a la placa (fig. 9):

$$\delta T = P_{cr} \frac{h}{\operatorname{sen} \beta} [\cos \beta - \cos (\beta + d\varphi)] -$$

$$- G \frac{h}{2 \operatorname{sen} \alpha} [\operatorname{sen} (\alpha + d\varphi) - \operatorname{sen} \alpha],$$

o bien,

$$\delta T = P_{cr} \frac{h}{\operatorname{sen} \beta} [\cos \beta - (\cos \beta \cos d\varphi - \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} d\varphi] -$$

$$- \frac{Gh}{2 \operatorname{sen} \alpha} [\operatorname{sen} \alpha \cos d\varphi + \cos \alpha \operatorname{sen} d\varphi - \operatorname{sen} \alpha].$$

En correspondencia con (1.5) para $\delta V = 0$ con exactitud hasta un infinitésimo de primer orden de pequeñez:

$$P_{cr} h \, d\varphi - \frac{Gh \, d\varphi}{2 \operatorname{tg} \alpha} = 0.$$

De aquí, $P_{cr} = Gh : 2l$, independientemente del ángulo β.

Teniendo ahora en cuenta que $P_{cr} = Gh : 2l$, después de las transformaciones obtenemos

$$\delta T = \frac{Gl}{2} (\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{tg} \alpha)(1 - \cos d\varphi). \qquad (a)$$

Esta igualdad, con una exactitud hasta los infinitésimos de primer orden, es igual a cero, y esto significa que hay equilibrio.

Como $(1 - \cos d\varphi) > 0$, entonces, en correspondencia con (1.3)—(1.5), tenemos:

1) $\beta = \alpha$; $\delta T > 0$, es equilibrio inestable;

2) $\beta = 90°$; $\delta T > 0$, equilibrio inestable;

3) $\beta = 90° + \alpha$; $\delta T = 0$, equilibrio indiferente;
4) $\beta > 90° + \alpha$; $\delta T < 0$, equilibrio estable.

Para el empleo de las características de estabilidad (1.7)—(1.9) formulemos la expresión de la energía potencial, girando la placa en un ángulo φ (fig 9):

$$U = U_0 - P_{cr} \frac{h}{\operatorname{sen} \beta} [\cos \beta - \cos (\beta + \varphi)] + \\ + G \frac{h}{2 \operatorname{sen} \alpha} (\operatorname{sen} (\alpha + \varphi) - \operatorname{sen} \alpha].$$

Calculamos la primera derivada:

$$\frac{dU}{d\varphi} = - \frac{P_{cr} h}{\operatorname{sen} \beta} \operatorname{sen} (\beta + \varphi) + G \frac{h}{2 \operatorname{sen} \alpha} \cos (\alpha + \varphi).$$

Cuando $\varphi = 0$ ella es nula, por lo tanto, hay equilibrio.

Formulamos la segunda derivada:

$$\frac{d^2U}{d\varphi^2} = - \frac{P_{cr} h}{\operatorname{sen} \beta} \cos (\beta + \varphi) - G \frac{h}{2 \operatorname{sen} \alpha} \operatorname{sen} (\alpha + \varphi).$$

Cuando $\varphi = 0$, ella resulta

$$\frac{d^2U}{d\varphi^2} = - P_{cr} h (\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{tg} \alpha). \qquad (b)$$

De conformidad con los criterios (1.7)—(1.9):

1) $\beta = \alpha$; $d^2U/d\varphi^2 < 0$ es equilibrio inestable;
2) $\beta = 90°$; $d^2U/d\varphi^2 < 0$, equilibrio inestable;
3) $\beta = 90° + \alpha$; $d^2U/d\varphi^2 = 0$, equilibrio indiferente, debido a que cualquier derivada se convierte en cero;
4) $\beta > 90° + \alpha$; $d^2U/d\varphi^2 > 0$, equilibrio estable.

Esta misma cuestión en base a consideraciones estáticas se resuelve del siguiente modo. Giramos la placa en un ángulo infinitamente pequeño $d\varphi$ y hallamos, de la condición de equilibrio, la fuerza P en forma de suma de los momentos con respecto a la charnela del apoyo derecho; esta fuerza debe ser capaz de mantener la placa girada

$$Ph_1 = Ge,$$

o bien,

$$P \frac{h}{\operatorname{sen} \beta} \operatorname{sen} (\beta + d\varphi) = G \frac{h}{2 \operatorname{sen} \alpha} \cos (\alpha + d\varphi).$$

De aquí obtenemos:

$$P = P_{cr} \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos (\alpha + d\varphi)}{\operatorname{sen} (\beta + d\varphi)}; \qquad (c)$$

1) $\beta = \alpha$; $P = P_{cr} [\operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} (\alpha + d\varphi)] < P_{cr}$, equilibrio inestable;
2) $\beta = 90°$; $P = P_{cr} [1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} d\varphi] < P_{cr}$, equilibrio inestable;
3) $\beta = 90° + \alpha$; $P = P_{cr}$, equilibrio indiferente;
4) $\beta > 90° + \alpha$; $P > P_{cr}$, equilibrio estable.

Obtendremos los mismos resultados en base a los criterios (1.20)—(1.22), componiendo la derivada de (c) según el ángulo φ:

$$\frac{dP}{d\varphi} = -P_{cr}\,\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}^2(\beta+\varphi)}\,, \qquad (d)$$

si $\beta = \alpha$, entonces

$$\frac{dP}{d\varphi} = -P_{cr}\,\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}^2(\alpha+\varphi)} < 0,$$

equilibrio inestable;

2) si $\beta = 90°$, entonces,

$$\frac{dP}{d\varphi} = -P_{cr}\,\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\varphi} < 0,$$

también equilibrio inestable;

3) si $\beta = 90° + \alpha$, entonces,

$$\frac{dP}{d\varphi} = -P_{cr}\,\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos 90°}{\cos^2(\alpha+\varphi)} \equiv 0,$$

equilibrio indiferente;

4) si $\beta = 90° + \alpha + \Delta$ (pequeño), entonces

$$\frac{dP}{d\varphi} = -P_{cr}\,\frac{\cos(\alpha+\Delta)}{\cos\alpha}\cdot\frac{(-\operatorname{sen}\Delta)}{\cos^2(\alpha+\varphi+\Delta)} > 0,$$

equilibrio estable.

Para una representación clara acerca de los equilibrios postcríticos, en la fig. 10 se dan las curvas $P = f(\varphi)$ con $\alpha = 45°$ para cuatro valores de β: $\beta = \alpha$ (curva *1*), $\beta = 90°$ (curva *2*), $\beta = 90° + \alpha$ (curva *3*), y $\beta = 90° + \alpha + 5°$ (curva *4*).

Arriba se examinaron los sistemas modificables, en los cuales los estados de desviación no estaban vinculados con las deformaciones de los mismos.

Detengámonos ahora en los sistemas cuyas estabilidades no sólo dependen del trabajo de las fuerzas exteriores durante la desviación de ellos, sino que también de la energía potencial de la deformación. Examinemos primeramente una varilla infinitamente rígida con la masa en su extremo y un peso igual a P (fig. 11). La reacción del resorte la consideraremos horizontal y proporcional a su alargamiento, es decir, $H = cy$, donde c (kN/cm) es la rigidez del resorte.

1. *Según los criterios energéticos*:

a) desviamos la varilla en un ángulo infinitamente pequeño $d\varphi$. Conforme a (1.5) componemos la igualdad:

$$\left[\delta V = \frac{cl^2}{2}\operatorname{sen}^2 d\varphi\right] = [\delta T = Pl\,(1-\cos d\varphi)],$$

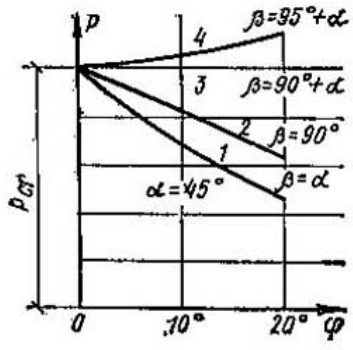


Fig. 10

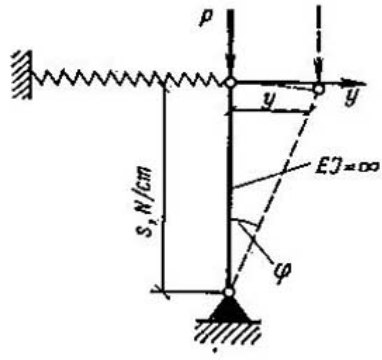


Fig. 11

o, con exactitud hasta una magnitud infinitesimal de segundo orden de pequeñez

$$\frac{cl^2}{2}\,d\varphi^2 = Pl\,\frac{d\varphi^2}{2},$$

de aquí $P_{cr} = cl$. No es difícil notar que en el caso dado cuando $P_{cr} = cl$, $\delta V < \delta T$, o sea, el equilibrio es estable. Efectivamente,

$$\frac{cl^2}{2}(1+\cos d\varphi) < cl^2;$$

b) formulemos la energía potencial total del sistema, suponiendo que la varilla gira en un ángulo φ (fig. 11):

$$U = U_0 - Pl\,(1-\cos\varphi) + \frac{c}{2}\,l^2 \operatorname{sen}^2\varphi,$$

donde U_0 es la energía potencial inicial del sistema, cuando $\varphi = 0$.

La derivada de la energía potencial es

$$\frac{dU}{d\varphi} = -Pl\operatorname{sen}\varphi + \frac{cl^2}{2}\,2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi.$$

En condiciones de equilibrio

$$\frac{dU}{d\varphi} = -Pl\operatorname{sen}\varphi + cl^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi = 0.$$

De aquí obtenemos que:

a) el equilibrio es posible cuando el ángulo $\varphi = 0$ para cualquier fuerza P;

b) el equilibrio es posible para un ángulo φ y una fuerza

$$P = cl\cos\varphi = P_0\cos\varphi, \qquad (e)$$

donde

$$P_0 = cl. \qquad (f)$$

A partir de las consideraciones geométricas sencillas

$$y = l\operatorname{sen}\varphi = 1\sqrt{1-(P/P_0)^2}. \qquad (g)$$

La representación gráfica de esta ley se muestra en la fig. 12. De la misma se deduce que para una fuerza $P = P_0 \cos \varphi$ con cualquier valor de φ, incluyendo $\varphi = 0$, el equilibrio es inestable. Con-

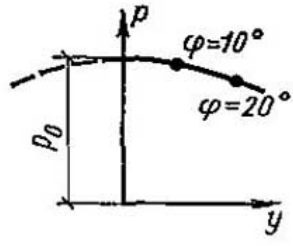


Fig. 12

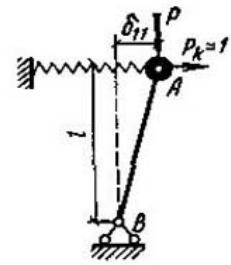


Fig. 13

firmemos esto analíticamente. Componemos la segunda derivada:

$$\frac{d^2U}{d\varphi^2} = -Pl\cos\varphi + cl^2\cos 2\varphi. \qquad \text{(h)}$$

En correspondencia con (1.5)

$$(-Pl\cos\varphi + cl^2\cos 2\varphi)_{\text{cuando } \varphi \to 0} = -Pl + cl^2 = 0.$$

De aquí, $P_{cr} = cl$.

Teniendo en cuenta (e)

$$\frac{d^2U}{d\varphi^2} = -cl^2\cos^2\varphi + cl^2\cos 2\varphi = cl^2(\cos^2\varphi - 1) < 0.$$

Esto significa que el equilibrio es inestable para cualquier valor de φ. Por cuanto cuando $\varphi = 0$, $\frac{d^2U}{d\varphi^2} = 0$, entonces, conforme a (1.7) y (1.8) hay que formular la derivada par superior y resolver según ella la cuestión de la estabilidad del sistema:

$$\frac{d^4U}{d\varphi^4} = Pl\cos\varphi - 4cl^2\cos 2\varphi.$$

Teniendo en cuenta que para $\varphi = 0$

$$P = P_0 = cl,$$

$$\frac{d^4U}{d\varphi^4} = cl^2 - 4cl^2 < 0.$$

Por consiguiente, y para $\varphi = 0$, cuando $P = cl = P_0$, el equilibrio es inestable. Si para $\varphi = 0$, $P < cl$, entonces, de (h) se aprecia que $d^2U/d\varphi^2 > 0$ y el equilibrio se vuelve estable. Sin embargo, el equilibrio sólo es estable para pequeñas desviaciones con respecto al estado investigado (en pequeño) y, con la misma fuerza, puede volverse inestable con grandes desviaciones (en grande), por ejemplo, cuando el $\cos\varphi < P/cl$.

2) *Según el criterio estático.*

Hallamos la fuerza P que sostiene la barra en posición inclinada en un ángulo φ. Para esto componemos la suma de los momentos de las fuerzas que actúan sobre la barra con respecto al apoyo inferior

$$Py - Hl\cos\varphi = 0.$$

Como $H = cy$, entonces

$$Py - cyl\cos\varphi = 0.$$

De aquí,

$$P = cl\cos\varphi = P_0\cos\varphi. \qquad (i)$$

De esta expresión se ve que $dP/d\varphi = -P_0\,\text{sen}\,\varphi < 0$, esto significa que el equilibrio con la fuerza $P = P_0\cos\varphi$ y con un ángulo φ es inestable. También resulta inestable cuando $\varphi = 0$, debido a que la fuerza que sostiene a la barra en posición inclinada $P_0\cos\varphi$ es menor que la fuerza $P_0 = cl$.

3. *Según el criterio dinámico.*

Determinamos la frecuencia de las oscilaciones propias del sistema por la fórmula

$$\omega = \sqrt{1 : m\delta_{11}}.$$

Para calcular δ_{11} aplicamos a la masa una fuerza horizontal $P_k = 1$ (fig. 13). La condición de equilibrio es

$$\Sigma M_B = 1l + P\delta_{11} - c\delta_{11}l = 0.$$

De aquí

$$\delta_{11} = l : (cl - P).$$

La frecuencia de las oscilaciones propias resulta

$$\omega = \sqrt{\frac{cl - P}{ml}}. \qquad (j)$$

Cuando $P < cl$, el equilibrio es estable; para $P = cl$, el estado es crítico; si $P > cl$, el equilibrio es inestable,

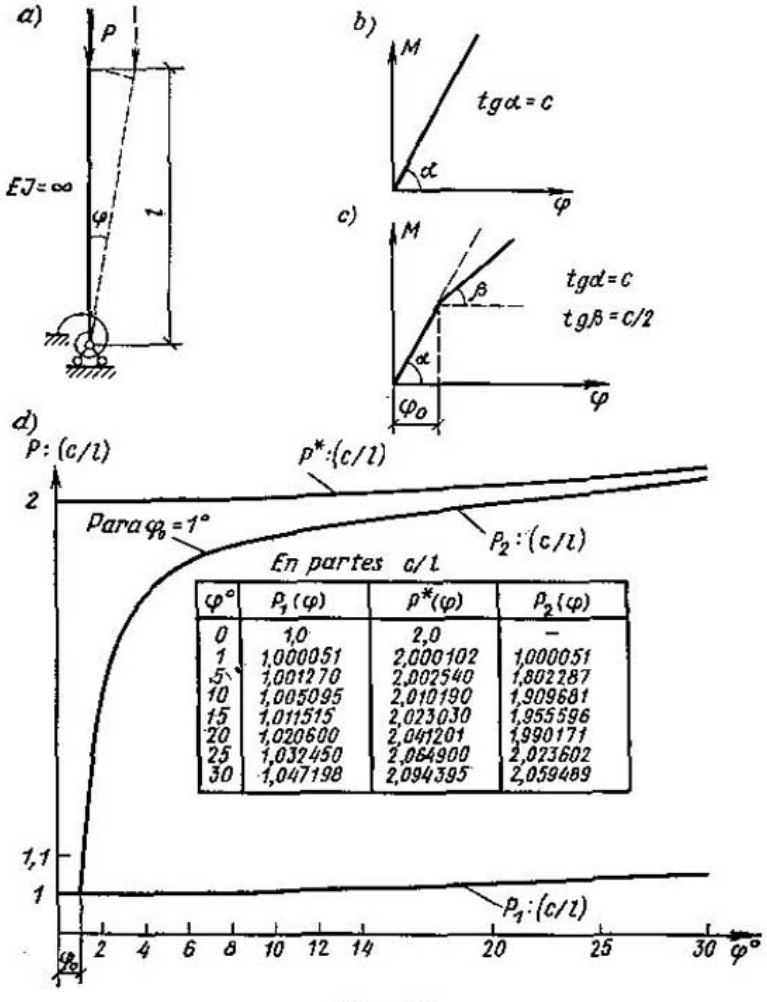
Si una barra análoga es sostenida por un muelle espiral (fig. 14, *a*), entonces los resultados de la investigación ya serán otros. Para ella la energía potencial en posición inclinada en un ángulo φ, será igual a:

$$U = U_0 + \frac{c\varphi^2}{2} - Pl\,(1 - \cos\varphi);\ \frac{dU}{d\varphi} = c\varphi - Pl\,\text{sen}\,\varphi = 0.$$

De donde,

$$P = \frac{c}{l}\,\frac{\varphi}{\text{sen}\,\varphi}.$$

Cuando $\varphi = 0$, obtenemos la fuerza crítica $P_{cr} = c/l$.



φ°	$P_1(\varphi)$	$p^*(\varphi)$	$P_2(\varphi)$
0	1,0	2,0	–
1	1,000051	2,000102	1,000051
5	1,001270	2,002540	1,802287
10	1,005095	2,010190	1,909681
15	1,011515	2,023030	1,955596
20	1,020600	2,041201	1,990171
25	1,032450	2,064900	2,023602
30	1,047198	2,094395	2,059489

Fig. 14

Establezcamos la estabilidad del equilibrio del sistema. Para ello formulamos la segunda derivada de la energía potencial:

$$\frac{d^2U}{d\varphi^2} = c - Pl\cos\varphi.$$

Teniendo en cuenta la fuerza P, tenemos

$$\frac{d^2U}{d\varphi^2} = c - c\,\frac{\varphi}{\operatorname{tg}\varphi} > 0.$$

Quiere decir, que con semejante fuerza y cualquier ángulo φ, el equilibrio resulta estable.

Si nosotros hubiésemos comprobado la estabilidad sólo con la fuerza crítica $P_{cr} = c/l$ y un ángulo $\varphi = 0$, obtendríamos

$$\frac{d^2U}{d\varphi^2} = c - c = 0.$$

En este caso, habría que tomar la cuarta derivada de la energía potencial

$$\frac{d^4U}{d\varphi^4} = Pl\cos\varphi.$$

Ella, cuando la fuerza $P = P_{cr}$ y $\varphi = 0$, es

$$\frac{d^4U}{d\varphi^4} = c > 0 \text{ (equilibrio estable).}$$

Efectuemos la investigación de la estabilidad además de otro modo:

$$\delta T = Pl(1 - \cos\varphi) = c(1 - \cos\varphi) = 2c\,\mathrm{sen}^2\frac{\varphi}{2};$$

$$\delta V = \frac{M\varphi}{2} = \frac{c\varphi^2}{2}.$$

No es difícil observar que para cualquier φ, $\delta V > \delta T$ y el equilibrio con la fuerza crítica $P_{cr} = c/l$, es estable.

Pero si se representa la dependencia entre el ángulo de inclinación de la barra y el momento del muelle según la fig. 14, *c*, entonces,

$$\delta V = \frac{c\varphi^2}{2} - \frac{c(\varphi - \varphi_0)^2}{2},$$

En este caso la barra será estable ante pequeñas desviaciones finitas (estable en «pequeño finito»), cuando $\varphi < \varphi_0$, e inestable para grandes desviaciones, cuando $\varphi \gg \varphi_0$ (inestable en «grande finito»). Por ejemplo, para $\varphi_0 = 0{,}05$ y $\varphi = 0{,}1$ tenemos:

$$\delta T = c\ (1 - 0{,}995) = 0{,}005\ c;$$

$$\delta V = c\frac{0{,}1^2}{2} - c\frac{(0{,}1 - 0{,}05)^2}{2} = 0{,}00375c < \delta T.$$

Supongamos ahora que la barra tiene dos muelles iguales, pero que el segundo comienza a trabajar cuando $\varphi = \varphi_0$ (fig. 14). En este caso habrá equilibrio para las siguientes fuerzas:

1) si $\varphi < \varphi_0$;

$$P_1 = \frac{c}{l}\frac{\varphi}{\mathrm{sen}\,\varphi},$$

2) si $\varphi > \varphi_0$;

$$P_2 = \frac{c}{l}\frac{2\varphi - \varphi_0}{\mathrm{sen}\,\varphi}.$$

Escribimos también la fuerza P^* para dos muelles, que comienzan a trabajar al unísono cuando $\varphi = 0$.

$$P^* = \frac{2c}{l} \frac{\varphi}{\operatorname{sen} \varphi} = 2P_1.$$

En la fig. 14, *d* se muestra el gráfico de la carga de un pilar con una fuerza $P > P_1 = c/l$, cuando $\varphi_0 = 1°$. Del gráfico de P_2 se ve que cuando se incorpora el segundo muelle el pilar vuelve

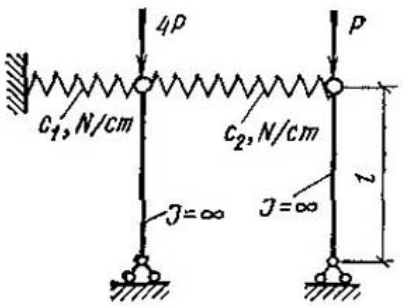


Fig. 15

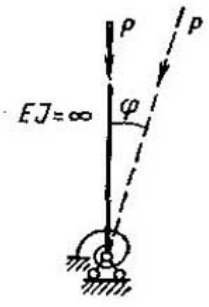


Fig. 16

a ser estable. En aquellos casos, cuando φ_0 es muy pequeño, la bifurcación para la fuerza P_1 puede considerarse sin pérdida de estabilidad.

Examinemos la aplicación de las condiciones de equilibrio (1.18) en el sistema representado en la fig. 15. Damos al sistema un estado de desviación, tomando los ángulos φ_1 y φ_2 en calidad de traslados generalizados. Escribimos la energía potencial, tomando la energía inicial U_0 como nula:

$$U = [-4Pl(1-\cos\varphi_1) - Pl(1-\cos\varphi_2)] + \\ + \left[\frac{c_1 l^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_1}{2} + \frac{c_2 l^2}{2}(\operatorname{sen}\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_1)^2\right].$$

En los primeros corchetes se tiene el cambio de la energía potencial de las fuerzas exteriores, y dentro de los segundos, la acumulación de la energía elástica en los muelles.

La energía potencial, con una exactitud hasta los infinitésimos de segundo orden, inclusive, es:

$$U = -4Pl\frac{\varphi_1^2}{2} - Pl\frac{\varphi_2^2}{2} + \frac{c_1 l^2 \varphi_1^2}{2} + \frac{c_2 l^2}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)^2. \qquad \text{(a)}$$

Formulamos las derivadas parciales:

$$c_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2} = -4Pl + c_1 l^2 + c_2 l^2;$$

$$c_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2} = -Pl + c_2 l^2;$$

$$c_{12} = c_{21} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} = -c_2 l^2. \qquad \text{(b)}$$

Las condiciones de estabilidad, según (1.18) son:

$$c_{11} = -4Pl + c_1 l^2 + c_2 l^2 > 0:$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (-4Pl + c_1 l^2 + c_2 l^2) - c_2 l^2 \\ -c_2 l^2 \qquad (-Pl + c_2 l^2) \end{vmatrix} > 0. \qquad (c)$$

Basándose en el criterio energético se puede mostrar que la barra analizada, cargada con la fuerza P dirigida a lo largo de aquélla, no pierde estabilidad (fig. 16). En efecto, al girar la barra en un ángulo $d\varphi$ la fuerza exterior P no efectúa ningún trabajo, mientras que el muelle acumula energía elástica, la cual hará regresar la barra a su posición inicial. En este caso se cumple la desigualdad (1.3).

Según el criterio estático obtenemos que la fuerza P, dirigida a lo largo de la barra, para cualquier valor de la misma no puede

Fig. 17

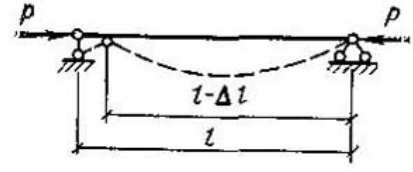


Fig. 18

mantener la varilla girada. La fuerza elástica del muelle, que se manifiesta, crea un movimiento de retorno. Quiere decir, que para cualquier fuerza P la barra es estable.

Consideremos una barra extendida de sección continua (fig. 17). Para simplificar los razonamientos no tomamos en cuenta el propio peso de la barra, lo que no se reflejará en las conclusiones a obtener. En este caso la posición desviada no es posible sin la deformación de la barra. Le otorgamos a la barra una posición curva, pero cercana a la rectilínea (véase la fig. 17), con la cual tendrá lugar el acercamiento de sus extremos en un valor Δl. Esto significa que la fuerza exterior P realizará un trabajo negativo igual a $-P\Delta l$. A consecuencia de la flexión, en la barra se acumula una energía potencial suplementaria $\delta V > 0$. De acuerdo con (1.3) tenemos que $\delta V > -P\Delta l$ es un equilibrio estable. La conclusión es correcta para cualquier desplazamiento.

En el caso cuando la barra está contraída (fig. 18), cuando tenemos una desviación de la misma con respecto a la posición rectilínea, la fuerza exterior P habrá de efectuar un trabajo positivo y la estabilidad de la barra depende del valor de la fuerza P:

cuando $\delta V > P\Delta l$, el equilibrio es estable;
» $\delta V < P\Delta l$, el equilibrio es inestable;
$\delta V = P\Delta l$, la posición es transitoria o el equilibrio es indiferente.

Análogamente, la placa rectangular colocada sobre apoyos móviles y extendida en ambas direcciones (fig. 19), se encuentra en equilibrio estable, por cuanto al pasar a la posición vecina, sus extremos se acercan debido a la flexión, y las fuerzas exteriores efectúan un trabajo ($\delta T < 0$), al mismo tiempo que el incremento de la energía potencial de deformación es positivo ($\delta V > 0$), y la desigualdad (1.3) quedará satisfecha.

Pero si por lo menos en una dirección la placa se contrae, entonces ella puede resultar en un estado de equilibrio inestable, debido

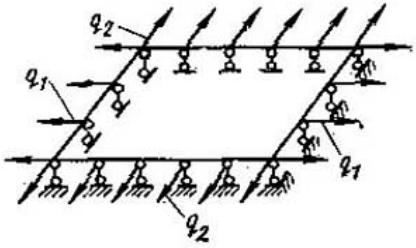


Fig. 19

Fig. 20

a que la carga que comprime la placa cuando ésta pasa al estado de desviación, habrá de realizar un trabajo positivo, que puede resultar mayor que el trabajo negativo de la carga de la otra dirección y la energía potencial de la deformación, tomados en conjunto.

De estos ejemplos se puede apreciar que la pérdida de la estabilidad está ante todo vinculada con las cargas de compresión y las tensiones de compresión.

Investigamos además la estabilidad de una viga flexionada, con respecto a los traslados verticales (fig. 20). La energía potencial de las deformaciones de la viga es

$$V = \frac{Pf}{2} = \frac{f^2}{2c} \quad \text{cuando} \quad f = cP.$$

Desviemos la viga hacia abajo en un δf, manteniendo la forma de la flexión.

Entonces:

$$\delta V = \frac{(f+\delta f)^2}{2c} - \frac{f^2}{2c} = \frac{f\delta f}{c} + \left(\frac{\delta f}{2c}\right)^2;$$

$$\delta T = P\delta f = f\frac{\delta f}{c}.$$

De acuerdo con (1.3) $\delta V > \delta T$, el equilibrio es estable.

Obtenemos el mismo resultado si desviamos la viga hacia arriba en un $-\delta f$.

§ 3. MÉTODO DE DETERMINACIÓN DE LAS CARGAS CRÍTICAS. Se denominan cargas críticas, tal como fue definido en el § 1, las que se encuentran en la frontera del paso del sistema de un estado de equilibrio estable al inestable.

Para unos sistemas esta carga será la **máxima con la que el sistema es aún estable, mientras que para otros, la menor carga con la que el sistema ya resulta inestable.**

La cuestión del estado de equilibrio al que teóricamente pertenece la propia carga crítica, se resuelve en dependencia del tipo de sistema y de la exactitud del experimento realizado.

Si la investigación es exacta, es decir, cuando el trabajo de las uerzas durante el paso del sistema del estado examinado al contiguo, infinitamente cercano al inicial, se calcula teniendo en cuenta los infinitésimos de órdenes superiores de pequeñez, entonces la carga crítica en los sistemas elásticos corresponde bien al equilibrio **estable** o bien al **inestable.**

Pero si la investigación se efectúa en forma aproximada, es decir, cuando el trabajo de las fuerzas durante el paso del sistema al estado de desviación se calcula considerando **solamente** los infinitésimos de primer orden, entonces la carga crítica se refiere al equilibrio **inestable,** por cuanto en presencia de ella ya pueden existir traslados infinitesimales. En tales casos la carga crítica puede pertenecer a **otro** estado de equilibrio, que el que se deduce de la solución exacta. Por eso, en dependencia de la exactitud de las investigaciones surgen distintas interpretaciones de la carga crítica, como, por ejemplo, sucede en relación a la fuerza de Euler para la barra comprimida. Según la solución exacta (véase el § 4), la fuerza crítica, con la cual aún no hay flexión longitudinal, pertenece al equilibrio **estable** de la barra recta, mientras que según la solución aproximada ella se refiere al equilibrio **inestable,** puesto que con ella **ya** es posible una flexión longitudinal con flechas infinitamente pequeñas, cuando con exactitud hasta infinitésimos de primer orden la cuerda de la barra deformada se puede considerar igual al largo de la propia barra.

Si en calidad de perturbaciones se toman sólo los desplazamientos, entonces también se puede separar el llamado equilibrio indiferente.

Así, por ejemplo, antes se mostró que una misma fuerza crítica de la placa $P_{cr} = Gl/2h$ (véase la fig. 9) para $\beta = \alpha$ corresponde al equilibrio inestable, cuando $\beta = 90° + \alpha$ al indiferente y si $\beta > 90° + \alpha$ al equilibrio estable.

Cuando la carga crítica se halla en la frontera del equilibrio estable e inestable, y ella misma corresponde a uno de estos dos equilibrios, entonces es suficiente para el equilibrio estable agregar a la carga crítica y para el inestable desquitarle un valor finito tan pequeño como se quiera, para que el equilibrio en el primer caso se vuelva inestable y en el segundo, estable.

Pero cuando la carga crítica se encuentra en la frontera del equilibrio estable e indiferente o del equilibrio inestable e indiferente, entonces la adición o sustracción de una pequeña parte convierte al equilibrio en inestable o estable.

Mostremos en el ejemplo de la misma placa (véase la fig. 9) cómo la variación de la fuerza crítica en una pequeña magnitud δP cam-

bia el estado de equilibrio. Para ello formulemos el trabajo durante el giro de la placa en un ángulo $d\varphi$:

$$\delta T = (P_{cr} \pm \delta P) \frac{h}{\operatorname{sen} \beta} [\cos \beta - \cos (\beta + d\varphi)] -$$

$$- \frac{Gh}{2 \operatorname{sen} \alpha} [\operatorname{sen} (\alpha + d\varphi) - \operatorname{sen} \alpha].$$

Esta expresión cuando $P_{cr} = Gl : 2h$ se reduce a la forma:

$$\delta T = P_{cr} h \left(\frac{\cos \beta}{\operatorname{sen} \beta} + \operatorname{tg} \alpha \right) (1 - \cos d\varphi) \pm$$

$$\pm \delta P h \left[\frac{\cos \beta}{\operatorname{sen} \beta} (1 - \cos d\varphi) - \operatorname{sen} d\varphi \right].$$

El signo del trabajo está determinado por los sumandos $\pm \delta P h \times$ $\times$ sen $d\varphi$, por eso, si de la fuerza P_{cr} para $\beta = \alpha$ se resta δP, entonces $\delta T < 0$ y el equilibrio se vuelve estable; si para $\beta = 90° + \alpha$ se resta δP, el equilibrio también se convierte en estable, y si se agrega δP, entonces $\delta T > 0$ y el equilibrio pasa a ser inestable y, finalmente, cuando $\beta > 90° + \alpha$, si se agrega δP, entonces $\delta T > 0$ y el equilibrio se vuelve inestable.

Si durante el cálculo del trabajo de las fuerzas nos limitamos al empleo de infinitésimos de primer orden, entonces para $P_{cr} = Gl/2h$ y $\delta P = 0$ el trabajo δT, independientemente del ángulo β, es igual a cero, y esto significa que por su investigación aproximada la fuerza crítica P_{cr} corresponde, dentro de los límites de un giro infinitesimal, a un equilibrio indiferente, independientemente del punto de aplicación de la fuerza.

Para la determinación de las cargas críticas se emplean los métodos estático y energético. Relativamente raro es el empleo del método dinámico, o método de las pequeñas oscilaciones, debido a su complejidad.

METODO ESTÁTICO

Al sistema investigado se le da una forma desviada de equilibrio, que por el carácter de sus traslados coincide con la nueva forma de equilibrio del sistema esperada después de la pérdida de la estabilidad y se determinan los valores de las cargas examinadas, capaces de mantener el sistema en la nueva forma de equilibrio.

Habitualmente se considera que la forma desviada de equilibrio es infinitamente próxima a la inicial y que las coordenadas de las condiciones de frontera se adoptan según el estado inicial. Las cargas determinadas en base a tales premisas se consideran críticas. Ellas corresponden al equilibrio indiferente entre el estado investigado y el infinitamente cercano a él.

Sin embargo, cabe observar que semejante interpretación del método estático, sumamente cómoda para su empleo práctico y utili-

zada más abajo, engendra distintas concepciones de determinación de las cargas críticas por las soluciones exacta y aproximada, por ejemplo, en relación a la fuerza de Euler de una barra comprimida.

A fin de obtener una interpretación igual de las cargas críticas por las soluciones exacta y aproximada, hay que adoptar las coordenadas de las condiciones de frontera de la posición vecina del sistema (posición que, hablando en general, no está obligada a ser infinitamente próxima) con cambios fundamentales de las mismas al pasar del estado investigado al vecino, por más pequeños que sean estos cambios. Luego, con el paso límite de la nueva forma de equilibrio a la inicial, por medio de la aproximación de las coordenadas de las condiciones de frontera del estado de desviación a las coordenadas de la situación inicial, se determinan las cargas críticas (véanse los §§ 2 y 4). Para semejante paso límite, las soluciones en base a ecuaciones diferenciales aproximadas paulatinamente se acercan a las soluciones logradas mediante el empleo de ecuaciones diferenciales exactas. Si con esto las cargas disminuyen, entonces las cargas críticas corresponden al equilibrio estable del sistema, y si ellas aumentan, al inestable. En casos particulares, cuando en el paso límite las cargas no varían, en los límites de la desviación examinada del sistema, el equilibrio será indiferente.

Si durante el cálculo de las cargas, capaces de mantener el sistema en el estado de desviación, se adoptan las condiciones de frontera según el estado inicial, entonces las cargas calculadas son críticas. Estas cargas responden a un equilibrio indiferente.

El método estadístico sólo sirve para las fuerzas conservadoras. Para las fuerzas no conservadoras se aconseja emplear el método dinámico [9].

La idea general del método estático la observamos en un ejemplo sencillo de un sistema con un grado de libertad, cuando el desplazamiento dado se determina mediante un parámetro, precisamente en el ejemplo de cálculo de la fuerza crítica para la placa (véase la fig. 9). Le damos a la placa una posición desviada mediante un giro en el sentido de la marcha de las agujas del reloj en un ángulo pequeño pero finito φ y determinamos la fuerza P, capaz de mantener la placa en el estado girado:

$$Ph_1 = Ge;$$

$$P\frac{h}{\operatorname{sen}\beta}\operatorname{sen}(\beta+\varphi) = G\frac{l}{2\operatorname{sen}\alpha}\cos(\alpha+\varphi),$$

de donde

$$P = \frac{Gl}{2h}\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha}\frac{\cos(\alpha+\varphi)}{\operatorname{sen}(\beta+\varphi)}. \qquad (a)$$

Suponiendo $\varphi \to 0$, y $P \to P_{cr}$, determinamos la carga crítica con el paso límite al estado inicial

$$P_{cr} = Gl/2h.$$

La fuerza crítica no depende del ángulo β, es decir, del punto de aplicación de la fuerza, y se refiere:

1) al equilibrio inestable, si $\beta < \alpha + 90°$;
2) al equilibrio indiferente, si $\beta = \alpha + 90°$;
3) al equilibrio estable, si $\beta > \alpha + 90°$.

Si el ángulo φ se considera infinitamente pequeño, de la expresión (a), con una exactitud hasta las magnitudes finitas, obtenemos:

$$P = \frac{Gl}{2h} \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha} \frac{\cos \alpha \cos d\varphi - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} d\varphi}{\operatorname{sen} \beta \cos d\varphi + \cos \beta \operatorname{sen} d\varphi} = \frac{Gl}{2h} = P_{cr}.$$

Esto significa, que con este enfoque en la solución del problema, la placa para una fuerza $P = P_{cr}$ puede encontrarse en equilibrio indiferente, ante un giro infinitamente pequeño de ella, independientemente del punto de aplicación de la fuerza.

El método estático posee algunas variedades.

1. Formulación y solución de las ecuaciones diferenciales. La forma desviada del estado de deformación se determina en forma general como una función continua incógnita, expresada por una ecuación diferencial. Basándose en esta ecuación se hallan las cargas capaces de crear el equilibrio del sistema en estado desviado, y luego con el paso límite se determinan las cargas críticas. Este método se aplica en los sistemas con un grado infinito de libertad, y por eso teóricamente se obtiene un número infinitamente grande de cargas críticas, de las cuales la primera (la menor) resulta interesante en la práctica.

2. Formulación y solución de las ecuaciones algebraicas. Aquí la forma desviada del estado de deformación se determina por medio de traslados de un número finito de puntos, en virtud de lo cual se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas, cuyas soluciones brindan varios valores de las cargas críticas. Sólo tiene significado práctico la primera (menor) carga crítica.

Este método es aplicable a sistemas con un grado de libertad finito. En aquellos casos cuando el número de los grados de libertad utilizado en los cálculos es menor que el real, el método se vuelve aproximado, lo que con frecuencia se emplea para simplificar la solución del problema planteado. Esto en primer lugar se refiere a los casos, cuando un sistema con un grado de libertad infinito se considera con un grado de libertad finito (habitualmente pequeño).

En este caso, las ecuaciones de equilibrio escritas en forma algebraica, habitualmente en forma aproximada, teniendo en cuenta el primer grado de pequeñez de las variables dadas, pueden ser llevadas a la forma:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_i) y_{1i} + a_{12} y_{2i} + \ \dots \ + a_{1n} y_{ni} = 0; \\ a_{21} y_{1i} + (a_{22} - \lambda_i) y_{2i} + \ \dots \ + a_{2n} y_{ni} = 0; \\ a_{n1} y_{1i} + a_{n2} y_{2i} + \ \dots \ + (a_{nn} - \lambda_i) y_{ni} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1.23)$$

donde λ_i es una magnitud que depende del parámetro de las fuerzas críticas P_i.

Las ecuaciones (1.23) son homogéneas. Por cuanto habitualmente la pérdida de la estabilidad sucede para las $y_{1i}, y_{2i}, \ldots, y_{ni}$ distintas de cero, entonces obtendremos la ecuación de la estabilidad, igualando a cero el determinante de las ecuaciones (1.23):

$$D = \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda_i) & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda_i) & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & (a_{nn} - \lambda_i) \end{vmatrix} = 0. \quad (1.24)$$

La forma de pérdida de la estabilidad se puede determinar a partir de (1.23) si previamente se dividen las ecuaciones, por ejemplo, por y_{1i}, tal como se hizo antes en la dinámica de las obras.

Si la pérdida de la estabilidad es posible para $y_{1i}, y_{2i}, \ldots, y_{ni}$, iguales a cero, entonces ella debe ser investigada especialmente.

En la forma matricial las ecuaciones (1.23) y (1.24) serán:

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})\, \mathbf{Y} = 0; \quad (1.25)$$

$$|\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}| = 0, \quad (1.26)$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix} \quad (1.27)$$

es la matriz de los coeficientes a_{ik};

$$Y = |\{y_{1i} y_{2i} \ldots y_{ni}\}| \quad (1.28)$$

es la matriz columna de los desplazamientos dados.

Como se observa, la investigación de la estabilidad por las expresiones (1.23)—(1.28) por su forma coincide con las investigaciones de las oscilaciones propias de los sistemas con algunos grados de libertad y se reduce al hallazgo de los valores propios y de los vectores propios de la matriz A (véase el § 21 de la dinámica de las obras).

Para ilustrar lo expuesto analicemos un sistema de tres barras absolutamente rígidas en dos apoyos rígidos y dos apoyos elásticos (fig. 21, *a*).

El desplazamiento dado (la línea punteada en el dibujo) lo determinamos mediante las magniludes y_{1i} e y_{2i} de compresión de los muelles. Las reacciones de los muelles serán: $R_C = cy_{1i}$; $R_D = cy_{2i}$. Respectivamente, las reacciones de los apoyos rígidos resultan:

$$R_A = c/4\,(3y_{1i} + y_{2i}); \quad R_B = c/4\,(y_{1i} + 3y_{2i}).$$

Compongamos la suma de los momentos de las fuerzas izquierdas con respecto a la articulación C, y de las fuerzas derechas con respecto a la articulación D:

$$P_i y_{1i} - c/4\,(3y_{1i} + y_{2i})\, l = 0;$$
$$P_i y_{2i} - c/4\,(y_{1i} + 3y_{2i})\, l = 0.$$

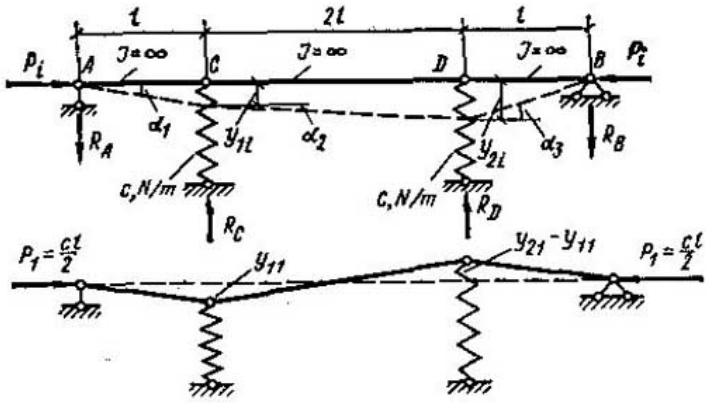


Fig. 21

Estas ecuaciones se reducen a la forma:

$$\begin{aligned}(3cl - 4P_i)\, y_{1i} + cly_{2i} &= 0; \\ cly_{1i} + (3cl - 4P_i)\, y_{2i} &= 0.\end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

Ellas también se expresan en la forma matricial (1.25):

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})\, \mathbf{Y} = 0,$$

donde

$$\mathbf{A} = cl \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \lambda_i = 4P_i; \quad \mathbf{Y} = [\{y_{1i} y_{2i}\}].$$

Conforme a (1.26)

$$\mathbf{D} = |\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} (3cl - \lambda_i) & cl \\ cl & (3cl - \lambda_i) \end{vmatrix} = 0.$$

Desarrollando el determinante, obtenemos:

$$(3cl - \lambda_i)^2 - (cl)^2 = (3cl - \lambda_i + cl)\,(3cl - \lambda_i - cl) = 0.$$

De aquí:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 2cl = 4P_1; \quad P_1 = cl : 2; \\ \lambda_2 &= 4cl = 4P_2; \quad P_2 = cl.\end{aligned}$$

Determinamos las formas de pérdida de la estabilidad a partir de cualquier ecuación, por ejemplo, de la primera (*a*): $3cl - 4P_i + cl\frac{y_{2i}}{y_{1i}} = 0$; en consecuencia, $\frac{y_{2i}}{y_{1i}} = \frac{4P_i - 3cl}{cl}$;

cuando $P_1 = cl/2$; $y_{21}/y_{11} = -1$ (forma antisimétrica de pérdida de la estabilidad, fig. 21, *b*);

cuando $P_2 = cl$; $y_{22}/y_{12} = 1$ (forma simétrica de pérdida de la estabilidad).

Mostremos también la aplicación de este método en el ejemplo de una barra de sección constante, apoyada articuladamente en sus extremos (fig. 22, *a*), para la cual la fuerza crítica es conocida del curso de resistencia de materiales ($P_{cr} = \pi^2 EJ/l^2$).

Le otorgamos a la barra un desplazamiento infinitamente pequeño, el cual inicialmente lo determinamos mediante un parámetro, la flecha f (véase la fig. 22, *a*). El diagrama de los momentos de flexión debidos a la fuerza P se da en la fig. 22, *b*. Hallamos el desplazamiento f, para lo cual, en el centro de la barra aplicamos la fuerza auxiliar $P = 1$ (fig. 22, *c*).

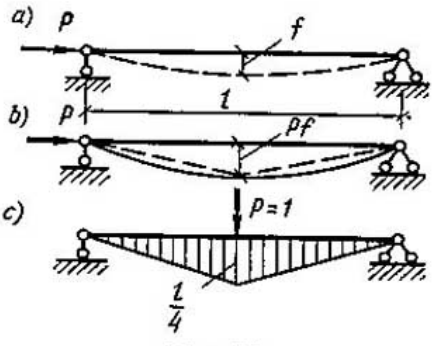


Fig. 22

Si el diagrama de los momentos debido a la fuerza P dada lo adoptamos aproximadamente como un triángulo (la línea punteada en la fig. 22, *b*), entonces, según la fórmula de los desplazamientos («multiplicando» los diagramas) tendremos

$$EJf = \left(Pf \frac{l}{4} \frac{2}{3} \frac{l}{4}\right) 2$$

o bien,

$$f = \left(P \frac{l^2}{12} - EJ\right) = 0.$$

En el caso dado se ha obtenido una sola ecuación, de la cual hallamos $P = 12EJ: l^2$ [la solución exacta resulta $P = 9{,}87\ (EJ/l^2)$].

Supongamos ahora que el diagrama de los momentos debidos a la fuerza P se define por una parábola. En este caso

$$EJf = \left(\frac{2}{3} \frac{l}{2} Pf \frac{5}{8} \frac{l}{4}\right) 2.$$

De aquí

$$P = 9{,}6 \frac{EJ}{l^2}.$$

Luego anotamos el desplaz miento de la barra con dos parámetros: con las flechas en el centro y en la cuarta parte de la luz (fig. 23, *a*). El diagrama de los momentos debido a la fuerza dada P se ilustra en la fig. 23, *b*. Para determinar las flexiones y_1 e y_2 le aplicamos a la barra las fuerzas auxiliares $P = 1$ en la cuarta parte y en el centro de la luz y construimos los diagramas de los momentos de ellas (fig. 23, *c*). El diagrama de los momentos debido a la fuerza dada P lo admitimos aproximadamente como un polígono (la línea punteada en la fig. 23, *b*). «Multiplicando» los correspondientes

diagramas, podemos escribir:

$$EJy_1 = Py_1 \frac{l}{8}\left(\frac{2}{3}\frac{3l}{16} + \frac{2}{3}\frac{l}{16}\right) + \frac{Py_1 + Py_2}{2}\frac{l}{4}\,2\,\frac{l}{8};$$

$$EJy_2 = \left[Py_1 \frac{l}{8}\frac{2}{3}\frac{l}{8} + Py_1 \frac{l}{8}\left(\frac{2}{3}\frac{l}{8} + \frac{1}{3}\frac{l}{4}\right) + \right.$$

$$\left. + Py_2 \frac{l}{8}\left(\frac{1}{3}\frac{l}{8} + \frac{2}{3}\frac{l}{4}\right)\right] 2.$$

Después de las simplificaciones tenemos:

$$(5Pl^2 - 96EJ)\, y_1 + 3Pl^2\, y_2 = 0;$$
$$6Pl^2 y_1 + (5Pl^2 - 96EJ)\, y_2 = 0.$$

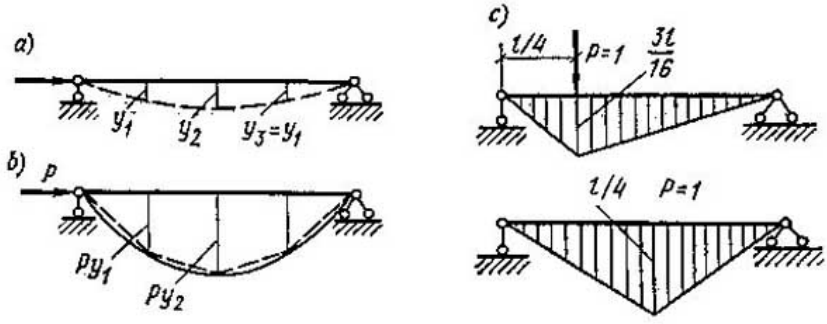


Fig. 23

Estas mismas ecuaciónes, reducidas a la forma matricial (1.25) resultan:

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})\,\mathbf{Y} = 0,$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 5 \end{Vmatrix}; \quad \lambda_i = \frac{96EJ}{P_i l^2}; \quad \mathbf{Y} = |\{y_1 y_2\}|.$$

De acuerdo a (1.26)

$$D = |A - \lambda_i E| = 0,$$

o bien

$$\left|\begin{Vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 5 \end{Vmatrix} - \lambda_i E\right| = \begin{vmatrix} 5-\lambda_i & 3 \\ 6 & 5-\lambda_i \end{vmatrix} = 0.$$

Desarrollando el determinante hallamos

$$\lambda_i^2 = 10\lambda_i + 7 = 0.$$

La mayor raíz es

$$\lambda_i = 5 + \sqrt{25 - 7} = 9{,}243.$$

La menor fuerza crítica resulta

$$P_i = \frac{96EJ}{\lambda_i l^2} = \frac{96EJ}{9{,}243 l^2} = \frac{10{,}39EJ}{l^2},$$

que resulta más cercana al valor exacto, que 12 (EJ/l^2) obtenido anteriormente para un solo parámetro.

3. Método de Bubnov—Galiorkin. Se formula la ecuación diferencial de equilibrio del sistema en la posición desviada:

$$L\,(z,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots) = 0. \tag{1.29}$$

Supongamos que la solución de esta ecuación puede expresarse en forma de

$$y = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i\,(z) \tag{1.30}$$

donde n es cualquier número entero.

Sustituyendo el valor de (1.30) en (1.29) obtenemos la identidad

$$L\left\{z,\ \sum_1^n a_i\varphi_i\,(z),\ \sum_1^n a_i\varphi_i'\,(z),\ \sum_1^n a_i\varphi_i''\,(z),\ \ldots\right\} \equiv 0.$$

La identidad no se altera si se multiplica por cualquier función $\varphi_k\,(z)$ de (1.30):

$$L\left\{z,\ \sum_1^n a_i\varphi_i\,(z),\ \sum_1^n a_i\varphi_i'\,(z),\ \sum_1^n a_i\varphi_i''\,(z),\ \ldots\right\} \varphi_k\,(z) \equiv 0.$$

Compongamos la integral de la expresión obtenida por todo el sistema:

$$\int L\left\{z,\ \sum_1^n a_i\varphi_i\,(z),\ \sum_1^n a_i\varphi_i'\,(z),\ \sum_1^n a_i\varphi_i''\,(z),\ \ldots\right\} \varphi_k\,(z)\,dz = 0. \tag{1.31}$$

Esta igualdad es justa para cualquier $k = 1, 2, \ldots, n$. En las soluciones aproximadas las funciones $\varphi_i\,(z)$ en (1.30) se dan arbitrariamente, de modo que cumplan total o parcialmente (lo que, por lo común, es peor) las condiciones de frontera del problema, «parecidas» a la forma de pérdida de la estabilidad, mientras que los coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se determinan a partir de la ecuación (1.31) para $k = 1, 2, \ldots, n$.

Las ecuaciones así obtenidas con los coeficientes incógnitos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son lineales y homogéneas. Para los valores de a_i, distintos de cero, el determinante de las ecuaciones se debe igualar a cero. Luego se determinan las cargas capaces de mantener el sistema en el estado de desviación, y por él, con el paso límite al estado inicial, se calculan las cargas críticas. Si la solución aproximada de (1.30) satisfaciera las condiciones de frontera en el estado inicial, entonces las cargas determinadas resultan críticas, correspondientes, como se dijo antes, al equilibrio indiferente. En este método, conforme a (1.31), el error de la solución aproximada (1.30) es ortogonal a cada componente de esta serie.

Mostremos el empleo del método descrito en la ecuación diferencial de la flexión longitudinal de una barra de sección constante:

$$y'' + \alpha^2 y = 0, \qquad (1.32)$$

donde

$$\alpha^2 = P : EJ.$$

Damos la solución en la siguiente forma:

$$y = a\varphi_1(z) = az(l - z); \quad y'' = -2a.$$

Ella satisface parcialmente las condiciones de frontera.

Componemos la expresión (1.31):

$$\int_0^l [-2a + \alpha^2 az(l-z)]\, z(l-z)\, dz = 0.$$

Efectuando la integración, obtenemos:

$$a\left(-\frac{l^3}{3} + \frac{Pl^5}{30EJ}\right) = 0, \text{ de aquí } P = \frac{10EJ}{l^2}.$$

Si la solución dada de la ecuación (1.32) se compusiera de dos funciones, se hubiesen tenido que formular dos ecuaciones según (1.31) e igualar a cero el determinante de las mismas.

4. Método de las diferencias finitas. En este método, la ecuación diferencial de equilibrio en estado desviado (1.29) se reemplaza por una ecuación en diferencias finitas. Según tal ecuación se formula un número finito de ecuaciones algebraicas, en dependencia de la cantidad de puntos en que se dan desplazamientos del sistema en el estado de desviación. Las ecuaciones obtenidas serán homogéneas. Igualando el determinante de ellas a cero, tendremos la ecuación para la determinación de las cargas que corresponden al estado de desviación y, por éstas, para determinar las cargas críticas, en dependencia de la investigación realizada.

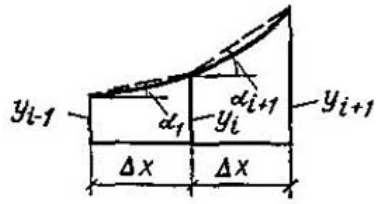


Fig. 24

Para una barra, las diferencias finitas al cambiar la curva por una línea quebrada se escriben así (fig. 24):

$$\Delta y = y_i - y_{i-1}; \quad \operatorname{tg}\alpha_i = \frac{\Delta y}{\Delta z} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta z};$$

$$\Delta(\operatorname{tg}\alpha_i) = \Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta z}\right) = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta z} - \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta z};$$

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta z^2} = \frac{\Delta}{\Delta z}\left(\frac{\Delta y}{\Delta z}\right) = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta z^2} - \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta z^2}.$$

Respectivamente, la ecuación diferencial (1.32) para el punto i, al reemplazar d^2y/dz^2 por $\Delta^2y/\Delta z^2$ será:

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{\Delta z^2}+\alpha^2 y=0,$$

donde

$$\alpha_i^2=P:EJ_i.$$

Definitivamente

$$y_{i-1}+(\beta_i^2-2)\,y_i+y_{i+1}=0, \tag{1.33}$$

donde

$$\beta_i^2=\alpha_i^2\,\Delta z^2=\frac{P}{EJ_i}\,\Delta z^2,$$

Δz es la distancia entre las ordenadas.

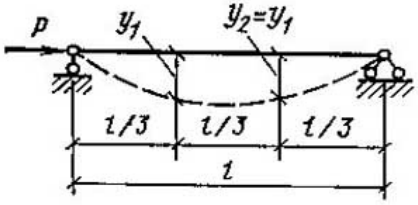


Fig. 25

Dividimos la barra, por ejemplo en tres tramos (fig. 25) con una longitud de $l/3$ cada uno. Examinando consecutivamente las tres ordenadas vecinas de las flexiones según (1.33) obtendremos:

$$0+(\beta^2-2)\;y_1+y_2=0;$$

$$y_1+(\beta^2-2)\;y_2+0=0;$$

$$\Delta z=l/3.$$

Igualamos a cero el determinante de estas ecuaciones:

$$D=\begin{vmatrix}(\beta^2-2) & 1\\ 1 & (\beta^2-2)\end{vmatrix}=(\beta^2-2)^2-1=0.$$

De aquí obtenemos

$$\beta^2=\frac{P}{EJ}\left(\frac{l}{3}\right)^2=2\mp 1,$$

y la fuerza menor

$$P_{cr}=9EJ/l^2.$$

Si dividimos la barra en cuatro tramos con $\Delta z=l/4$ (fig. 26) y examinamos consecutivamente las ordenadas de tres en tres: y_0, y_1, y_2 e y_1, y_2, $y_3=y_1$, entonces, según la ecuación (1.33), tendremos:

$$0+(\beta^2-2)\,y_1+y_2=0;$$

$$y_1+(\beta^2-2)\,y_2+y_1=0.$$

Igualamos a cero el determinante de las ecuaciones:

$$D=(\beta^2-2)^2-2=0.$$

De aquí obtenemos $\beta^2=\frac{P}{EJ}\left(\frac{l}{4}\right)^2=2\mp\sqrt{2}$.

La fuerza menor es $P_{cr}=9{,}344\frac{EJ}{l^2}$.

Si la barra está empotrada por un extremo (fig. 27), es necesario tener una ordenada más alla del empotrado, igual a la ordenada en el empotrado, las cuales deben contarse a partir de la línea de acción de la fuerza en estado de desviación.

5. Método de las aproximaciones sucesivas. Este método consiste en la solución de la ecuación diferencial (1.29) o de las ecuaciones algebraicas mediante aproximaciones sucesivas. Cada aproximación sucesiva se obtiene de los resultados de la precedente.

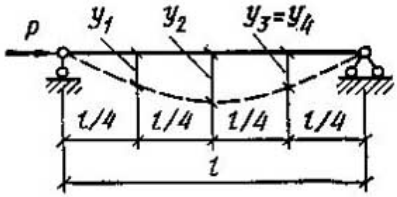


Fig. 26

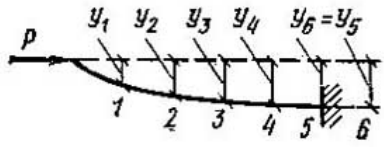


Fig. 27

Examinemos este método para una barra en dos variantes.

Primera variante: escribimos la ecuación diferencial (1.32) del siguiente modo:

$$y'' = -Py : EJ.$$

Integramos ambos miembros de la igualdad:

$$y = \int\int -\frac{Py}{EJ}\,dz^2 + Az + B. \qquad (1.34)$$

En el segundo miembro daremos una ecuación aproximada de la curva $y = f(z)$, la que, por lo menos, satisface las condiciones cinemáticas de frontera. Obtenemos el resultado según (1.34) y luego sucesivamente lo vamos precisando.

Veamos el orden de solución para una barra con apoyos articulados.

Damos la curva, por ejemplo, en forma de parábola $y = 4fz\,(l - z)/l^2$.

Sustituyendo el valor de esta ecuación en el segundo miembro de (1.34) e integrando obtenemos:

$$y = Az + B - \frac{P}{EJ}\int\int \frac{4fz\,(l-z)\,dz^2}{l^2} = Az + B - \frac{4Pf}{EJl^2}\left(\frac{lz^3}{6} - \frac{z^4}{12}\right). \quad (a)$$

Las constantes de integración las determinamos basándose en las condiciones de frontera:

a) para $z = 0$, $y = 0$, lo que da $B = 0$;

b) para $z = l$, $y = 0$, lo que da $A = Pfl/3EJ$.

Ahora la ecuación (a) será

$$y = \frac{Pfl}{3EJ}\,z - \frac{Pf}{3l^2EJ}\,(2lz^3 - z^4). \qquad (b)$$

Es necesario que esta curva tenga en el centro de la luz una flecha igual al f dado. Entonces

$$f = \frac{Pfl}{3EJ}\cdot\frac{l}{2} - \frac{Pf}{3l^2EJ}\left(2l\,\frac{l^3}{8} - \frac{l^4}{16}\right)$$

o bien,

$$\frac{10}{96}\,\frac{Pl^2}{EJ} = 1.$$

De aquí obtenemos la primera aproximación de la fuerza crítica $P_{cr} = 9{,}6\ (EJ/l^2)$.

Sustituyendo el valor obtenido de P_{cr} en la ecuación (b), hallamos:

$$y = \frac{3{,}2f}{l}\,z - \frac{3{,}2f}{l^4}\,(2lz^3 - z^4). \qquad (c)$$

Esta curva la aplicaremos para la segunda aproximación, sustituyendo la expresión (c) en (1.34)

$$y = Az + B - \frac{Pf}{EJ}\int\int\left[\frac{3{,}2f}{l}\,z - \frac{3{,}2f}{l^4}\,(2lz^3 - z^4)\right]dz^2.$$

Después de integrar tendremos

$$y = Az + B - \frac{Pf}{EJ}\left[\frac{3{,}2}{l}\,\frac{z^3}{6} - \frac{3{,}2}{l^4}\left(2l\,\frac{z^5}{20} - \frac{z^6}{30}\right)\right]; \qquad (d)$$

para $z = 0$, $y = 0$, lo que determina $B = 0$;

para $z = l$, $y = 0$, lo que determina $A = \frac{9{,}6}{30}\cdot\frac{Plf}{EJ}$.

Ahora (d) sera:

$$y = \frac{9{,}6}{30}\,\frac{P}{EJ}\,fz - \frac{Pf}{EJ}\left[\frac{3{,}2z^3}{6l} - \frac{3{,}2}{l^4 30}\,(3lz^5 - z^6)\right]. \qquad (e)$$

Exigimos nuevamente que $z = 1/2y = f$. Entonces

$$f = \frac{9{,}6}{30}\,\frac{P}{EJ}\,f\,\frac{l}{2} - \frac{Pfl^2}{EJ}\left[\frac{3{,}2}{6}\,\frac{1}{8} - \frac{3{,}2}{30}\left(\frac{3}{32} - \frac{1}{64}\right)\right].$$

Después de las simplificaciones, $f\left(\frac{Pl^2}{EJ}\,\frac{39{,}04}{384} - 1\right) = 0$.

De aquí obtenemos la segunda aproximación de $P_{cr} = 9{,}836 \times \times EJ/l^2$ [el valor exacto es $9{,}87\,(EJ/l^2)$]. Luego la operación se puede repetir reemplazando el valor de P hallado en la ecuación (e).

Segunda variante: damos a una barra el estado desviado, ya sea en forma de una función continua $y = f(z)$, o bien en forma de ordenadas en algunos puntos $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (fig. 28, *a*). Respectivamente los momentos de flexión serán aquí bien $M = Py = Pf(z)$, o bien $M_i = Py_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. La carga condicional (ficticia),

cuyos momentos dan las flexiones, será $q(z) = Pf(z)/EJ$, o bien (fig. 28, *b*):

$$q_1 = \frac{Py_1}{EJ_1}; \quad q_2 = \frac{Py_2}{EJ_2}; \ldots; \quad q_i = \frac{Py_i}{EJ_i}; \ldots; \quad q_n = \frac{Py_n}{EJ_n}. \qquad (1.35)$$

Los razonamientos ulteriores los efectuamos para el caso cuando se dan desplazamientos en algunos puntos.

Consideremos un punto cualquiera *i*. Para él de (1.35) tenemos:

$$P = \frac{EJ_i q_i}{y_i} \qquad (1.36)$$

Dividimos ahora la carga condicional por q_i (fig. 28, *c*). Las flexiones serán q_i veces menores, es decir,

$$y_i^* = y_i : q_i. \qquad (1.37)$$

Reemplazando en (1.36) obtenemos:

$$P = EJ_i : y_i^*. \qquad (1.38)$$

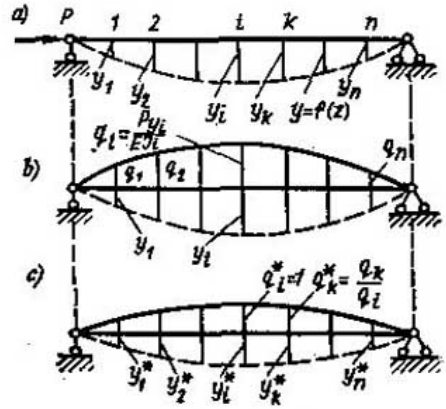


Fig. 28

Esta es la fórmula fundamental de la segunda variante. El orden de cálculo es el siguiente:

1) damos una curva arbitraria en forma de ordenadas $y_1, y_2, \ldots, y_n$;

2) la carga condicional, en cualquier punto escogido *i*, la tomamos igual a la unidad, y en los restantes puntos, respectivamente igual a

$$q_k^* = \frac{q_k}{q_i} = \frac{EJ_i}{EJ_k}\frac{y_k}{y_i}; \qquad (1.39)$$

3) por esta carga condicional determinamos las flexiones en los puntos elegidos $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*$, y, en base a ellos, las nuevas cargas condicionales

$$q_k^{**} = \frac{q_k^*}{q_i^*} = \frac{EJ_i}{EJ_k}\frac{y_k^*}{y_i^*}. \qquad (1.40)$$

Y así sucesivamente, hasta el momento en que los nuevos valores de las cargas o de las flexiones debidas a ellas, sean próximas a los precedentes. La fuerza crítica se halla a partir de la expresión (1.38) según el último valor de y_i^{**}. Este método se emplea para las barras con rigidez variable.

MÉTODO ENERGÉTICO

Este método se basa en el análisis de la energía total del sistema o en el incremento de la energía en el estado desviado, aproximadamente coincidente por el carácter de los desplazamientos con la nueva

forma esperada del estado de deformación después de la pérdida de equilibrio del sistema. Las variedades del método son las siguientes.

1. Empleo de la igualdad de trabajo de las fuerzas exteriores y de la energía potencial suplementaria de deformación, cuando el sistema pasa al estado de desviación, infinitamente cercano al investigado [estado transitorio (1.5)]. Al sistema se le otorga un estado de desviación infinitamente pequeño y se compone en forma general el trabajo de las fuerzas exteriores, el que se iguala a la energía potencial de las deformaciones acumulada suplementariamente, es decir, se analiza el estado transitorio:

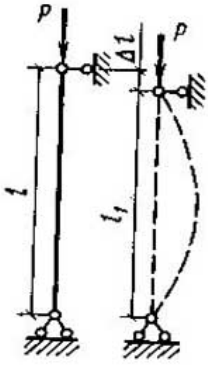


Fig. 29

$$\delta_T = \delta_V. \tag{1.41}$$

Esta igualdad se formula con una exactitud hasta los infinitésimos de primer orden. Mostremos su aplicación en el ejemplo de una placa (véase la fig. 9):

$$\delta T = P \frac{h}{\operatorname{sen} \beta} [\cos \beta - \cos (\beta + d\varphi)] - \\ - G \frac{h}{2 \cos \alpha} [\operatorname{sen} (\alpha + d\varphi) - \operatorname{sen} \alpha] = \delta V = 0.$$

Con exactitud hasta los infinitésimos de primer orden

$$Ph\, d\varphi - G \frac{h}{2} \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} d\varphi = 0.$$

De aquí $P_{cr} = \frac{G}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{Gl}{2h}$, que fue obtenido antes por el método estático.

Examinemos este método aplicado a una barra (fig. 29). Sea que la posición de la barra después de la pérdida de la estabilidad, nos es conocida.

El acercamiento de los extremos de la barra en un Δl se determina por la expresión

$$\Delta l \approx \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 \, dz. \tag{1.42}$$

El trabajo de la fuerza P será

$$\delta T = P \Delta l = \frac{P}{l} \int_0^l (y')^2 \, dz. \tag{1.43}$$

El incremento de la energía potencial elástica, como resultado de la flexión de la barra, es

$$\delta V = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EJ} \, dz.$$

Como $M = -EJy''$, entonces,

$$\delta V = \frac{1}{2} \int_0^l EJ\,(y'')^2\,dz. \tag{1.44}$$

En correspondencia con la igualdad (1.41), tenemos

$$\frac{P}{2} \int_0^l (y')^2\,dz = \frac{1}{2} \int_0^l EJ\,(y'')^2\,dz.$$

De aquí tenemos

$$P_{cr} = \int_0^l EJ\,(y'')^2\,dz : \int_0^l (y')^2\,dz. \tag{1.45}$$

Si la forma de desviación se interpreta no como una posibilidad cualquiera, sino como la forma de la flexión longitudinal cuando tiene lugar el equilibrio entre las fuerzas exteriores e interiores, es decir, cuando es justa la igualdad

$$Py = -EJy'',$$

entonces

$$\delta V = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{P^2y^2}{EJ}\,dz. \tag{1.46}$$

En este caso la igualdad (1.41), la cual debe interpretar no como el paso del estado estable al inestable, sino como la condición de igualdad del trabajo de las fuerzas exteriores y de la energía elástica durante la flexión, será

$$\frac{P}{2} \int_0^l (y')^2\,dz = \frac{P^2}{2} \int_0^l y^2 \frac{dz}{EJ}.$$

De aquí

$$P_{cr} = \int_0^l (y')^2\,dz : \int_0^l y^2 \frac{dz}{EJ}. \tag{1.47}$$

La fórmula (1.47) da un significado más exacto de la fuerza crítica que la (1.45). En aquellos casos cuando la curva y (z) es exacta, ambas fórmulas, la (1.45) y la (1.47), brindan un resultado exacto.

Primeramente damos la línea elástica, como se deduce de los cálculos según el método estático, en forma de sinusoide (véase más adelante) $y = f \operatorname{sen} (\pi z/l)$.

Respectivamente:

$$y' = f \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi z}{l}; \quad y'' = -f \frac{\pi^2}{l^2} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l};$$

$$\int_0^l (y')^2\,dz = \int_0^l f^2 \frac{\pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{\pi z}{l}\,dz = f^2 \frac{\pi^2}{l^2} \frac{l}{2};$$

$$\int_0^l (y'')^2\,dz = \int_0^l f^2 \frac{\pi^4}{l^4} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{l}\,dz = f^2 \frac{\pi^4}{l^4} \frac{l}{2}.$$

Por la fórmula (1.45)

$$P_{cr} = EJ\, f^2 \frac{\pi^4}{l^4} \frac{l}{2} : f^2 \frac{\pi^2}{l^2} \frac{l}{2} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

El resultado obtenido coincide con la solución por el método estático. El mismo resultado obtenemos con la fórmula (1.47).

La cuestión resulta distinta en otros casos, cuando la línea elástica apropiada se debe dar arbitrariamente. Así, por ejemplo, si adoptamos:

$$y = az\,(l - z);\ y' = a\,(l - 2z);\ y'' = -2a;$$

$$\int_0^l (y')^2\,dz = \int_0^l a^2\,(l-2z)^2\,dz = \frac{a^2 l^3}{3};$$

$$\int_0^l (y'')^2\,dz = \int_0^l 4a^2\,dz = 4a^2 l.$$

Por la fórmula (1.45)

$$P_{cr} = EJ 4a^2 l : \frac{a^2 l^3}{3} = 12 \frac{EJ}{l^2}.$$

Según la fórmula (1.47):

$$\int_0^l y^2 \frac{dz}{EJ} = \int_0^l a^2 z^2\,(l-z)^2\,dz = \frac{a^2 l^5}{30EJ};$$

$$P_{cr} = \frac{a^2 l^3}{3} : \frac{a^2 l^5}{30EJ} = 10 \frac{EJ}{l^2}.$$

También damos una curva en forma de $y = f\left(\frac{3z}{l} - \frac{4z^3}{l^3}\right)$.

Respectivamente:

$$y' = f\left(\frac{3}{l} - \frac{12z^2}{l^3}\right);\quad y'' = -f\frac{24z}{l^3};$$

$$2\int_0^{l/2} (y')^2\,dz = 2\int_0^{l/2} f^2 \left(\frac{3}{l} - \frac{12z^2}{l^3}\right)^2 dz = 24f^2 : 5l;$$

$$2\int_0^{l/2} (y'')^2\,dz = 2\int_0^{l/2} f^2 \frac{24^2 z^2}{l^6}\,dz = 48f^2 : l^3.$$

Por la fórmula (1.45)

$$P_{cr} = EJ \frac{48f^2}{l^3} : \frac{24}{5} \frac{f^2}{l} = 10 \frac{EJ}{l^2}.$$

Según la fórmula (1.47):

$$2\int_0^{l/2} y^2 \frac{dz}{EJ} = 2\int_0^{l/2} f^2 \left(\frac{3z}{l} - \frac{4z^3}{l^3}\right)^2 \frac{dz}{EJ} = f^2 \frac{17l}{35EJ};$$

$$P_{cr} = \frac{24f^2}{5l} : f^2 \frac{17l}{35EJ} = 9{,}882 \frac{EJ}{l^2}.$$

2. Método de Lagrange—Ritz. Este método se basa en el análisis de la energía potencial total del sistema en estado desviado. Las cargas críticas se determinan a partir de la condición de mínimo de la energía potencial en el estado inicial del sistema. Así, por ejemplo, para una placa (véase la fig. 9) con una energía inicial U_0 tenemos:

$$U = U_0 - \frac{Ph}{\operatorname{sen}\beta}[\cos\beta - \cos(\beta+\varphi)] + \\ + G\frac{h}{2\operatorname{sen}\alpha}[\operatorname{sen}(\alpha+\varphi) - \operatorname{sen}\alpha].$$

La primera derivada es

$$\frac{dU}{d\varphi} = -\frac{Ph}{\operatorname{sen}\beta}\operatorname{sen}(\beta+\varphi) + \frac{Gh}{2\operatorname{sen}\alpha}\cos(\alpha+\varphi) = 0.$$

Cuando $\varphi = 0$, su valor es

$$-Ph + \frac{Gh\cos\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha} = 0.$$

De aquí

$$P_{cr} = G : 2\operatorname{tg}\alpha.$$

En aquellos casos, cuando el estado de desviación se determina mediante varios parámetros $q_1, q_2, \ldots, q_n$ (desplazamientos generalizados), con los cuales se habrá de expresar también la energía del sistema, las condiciones necesarias para el mínimo de la energía potencial se escriben así:

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0; \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.48}$$

Si con esto la energía potencial del sistema se calcula con exactitud hasta el segundo infinitésimo de los desplazamientos dados, entonces, las ecuaciones (1.48) se presentan en la forma de las ecuaciones (1.23).

Si el estado de desviación del sistema se aproxima mediante curvas con varios parámetros $a_1, a_2, \ldots, a_n$, entonces, las condiciones de mínimo de la energía potencial del sistema serán análogas:

$$\frac{\partial U}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.49}$$

Sin embargo, las ecuaciones obtenidas no siempre se reducen a la forma (1.23). En ambos casos las ecuaciones (1.48) y (1.49) serán homogéneas. El determinante de las mismas, igualado a cero, determina la ecuación para el cálculo de las cargas críticas. Así, por ejemplo, para el sistema representado en la fig. 21 se puede escribir:

$$y_{1i} = l\operatorname{sen}\alpha_1 \approx l\alpha_1; \quad \alpha_1 = y_{1i} : l;$$
$$y_{2i} - y_{1i} + 2l\operatorname{sen}\alpha_2 \simeq y_{1i} + 2l\alpha_2; \quad \alpha_2 = (y_{2i} - y_{1i}) : 2l;$$
$$y_{2i} = l\operatorname{sen}\alpha_3 \approx l\alpha_3; \quad \alpha_3 = y_{2i} : l.$$

El acercamiento de los extremos A y B del sistema es

$$\Delta L = l[(1-\cos\alpha_1) + 2(1-\cos\alpha_2) + (1-\cos\alpha_3)] \approx \\ \approx \frac{l}{2}(\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 + \alpha_3^2),$$

o bien,

$$\Delta L = \frac{l}{2}\left[\frac{y_{1i}^2}{l^2} + 2\left(\frac{y_{2i}-y_{1i}}{2l}\right)^2 + \frac{y_{2i}^2}{l}\right] = \frac{1}{4l}(3y_{1i}^2 - 2y_{1i}y_{2i} + 3y_{2i}^2).$$

La energía potencial total es

$$U = U_0 - \frac{P_i}{4l}(3y_{1i}^2 - 2y_{1i}y_{2i} + 3y_{2i}^2) + \frac{cy_{1i}^2}{2} + \frac{cy_{2i}^2}{2}.$$

Formulando las condiciones de (1.49):

$$\frac{\partial U}{\partial y_{1i}} = -\frac{P_i}{4l}(6y_{1i} - 2y_{2i}) + cy_{1i} = 0;$$

$$\frac{\partial U}{\partial y_{2i}} = -\frac{P_i}{4l}(-2y_{1i} + 6y_{2i}) + cy_{2i} = 0.$$

Después de las transformaciones:

$$\left.\begin{aligned}(3-\lambda_i)\,y_{1i} - y_{2i} &= 0;\\ -y_{1i} + (3-\lambda_i)\,y_{2i} &= 0,\end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

donde $\lambda_i = 2cl : P_i$.

Estas mismas ecuaciones en forma matricial son:

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})\,\mathbf{Y} = 0,$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{Y} = [\{y_{1i}\ y_{2i}\}].$$

Conforme a (1.26)

$$\mathbf{D} = |\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} (3-\lambda_i) & -1 \\ -1 & (3-\lambda_i) \end{vmatrix} = 0.$$

En forma desarrollada

$$(3 - \lambda_i + 1)\,(3 - \lambda_i - 1) = 0.$$

De aquí:

$$\lambda_1 = 4; \quad P_1 = 2cl : 4 = cl : 2;$$

$\lambda_2 = 2$ y $P_2 = 2cl : 2 = cl$, es decir, los mismos valores que por el método estático.

Las formas de pérdida de la estabilidad por la primera ecuación (a) resultan:

$$\frac{y_{2i}}{y_{1i}} = 3 - \lambda_i. \qquad (b)$$

Para $\lambda_i = 4$; $\frac{y_{2i}}{y_{1i}} = -1$ es la forma antisimétrica de pérdida de la estabilidad (véase la fig. 21,*b*);

para $\lambda_i = 2$; $\frac{y_{2i}}{y_{1i}} = 1$ es la forma simétrica.

CAPÍTULO 2 * ESTABILIDAD DE LAS BARRAS COMPRIMIDAS DE UNA LUZ CON SECCIÓN CONSTANTE

§ 4. ESTABILIDAD DE UNA BARRA ELÁSTICA SOBRE DOS APOYOS DE CHARNELAS. Examinemos una barra contraída por una fuerza P (fig. 30, *a*). El propio peso de la barra se desprecia. Mientras la fuerza $P \leqslant P_{cr}$, la forma rectilínea del equilibrio de la barra es estable, y cuando $P > P_{cr}$ ella es inestable y la barra inevitablemente se comba (fig. 30, *b*), es decir, sufre una flexión longitudinal.

Bajo la acción de la fuerza P la barra se acorta. Su longitud, para pequeñas flexiones, se determina por la fórmula

$$l_* = l\left(1 - \frac{P}{EF}\right), \qquad (2.1)$$

donde l es la longitud inicial de la barra.

En general, el valor del término P/EF es muy pequeño en comparación con la unidad y, habitualmente, lo despreciamos. Así, por ejemplo, para el acero, en el caso más desfavorable, cuando $P = P_{cr} = \sigma_{f.c}F = 2100\ F$, este término será del orden de $2100 : 2\,100\,000 = 0{,}001$.

Examinemos una barra en estado combado, cuando $P > P_{cr}$. Sea la flecha de la comba una magnitud finita f, y la cuerda l_1.

Para una comprensión más profunda de la cuestión de la flexión longitudinal, comencemos su examen con una resolución más exacta del problema, para luego considerar la solución aproximada y compararlas a ambas.

SOLUCIÓN EXACTA

Examinemos un elemento infinitesimal de la barra bajo la acción de la fuerza de contracción P y del momento de flexión M (fig. 31) y determinemos la ecuación diferencial de la flexión. El aspecto deformado del elemento se muestra con líneas continuas.

Directamente del dibujo, con exactitud hasta un infinitésimo de primer orden obtenemos:

el radio de curvatura de la línea axial

$$\rho = ds_1 : d\varphi; \qquad (a)$$

acortamiento absoluto de las fibras a una distancia de y de la línea axial

$$\Delta ds_y = \Delta ds_0 + y d\varphi;$$

acortamientos relativos

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta\, ds_y}{ds} = \frac{\Delta\, ds_0}{ds} + y\frac{d\varphi}{ds} \qquad \text{(b)}$$

o bien,

$$\varepsilon_y = \varepsilon_0 + y\frac{d\varphi}{ds}\ ;$$

la longitud de la línea axial luego del acortamiento

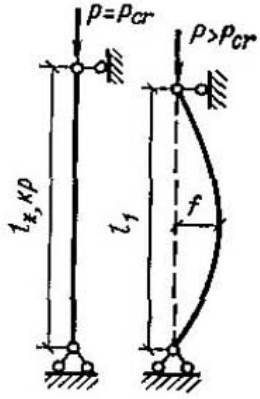


Fig. 30

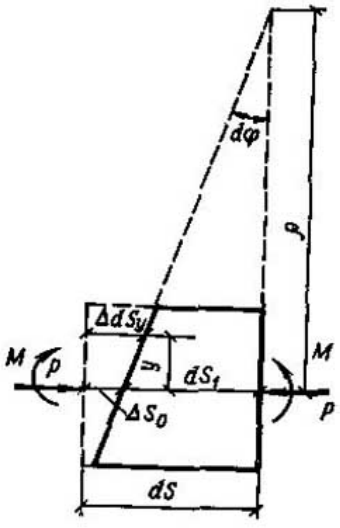


Fig. 31

$$ds_1 = ds\left(1 - \frac{P}{EF}\right).$$

De donde

$$ds = ds_1 : \left(1 - \frac{P}{EF}\right).$$

Ahora (b), teniendo en cuenta (a), resulta

$$\varepsilon_y = \varepsilon_0 + \frac{y}{\rho}\left(1 - \frac{P}{EF}\right).$$

La tensión en esta fibra será:

$$\sigma_y = E\varepsilon_y = E\varepsilon_0 + \frac{E_y}{\rho}\left(1 - \frac{P}{EF}\right).$$

Las condiciones de equivalencia son:

$$P = \int_F \sigma_y \, dF = \int_F \left[E\varepsilon_0 + \frac{Ey}{\rho}\left(1 - \frac{P}{EF}\right)\right] dF = EF\varepsilon_0;$$

$$M = \int_F \sigma_y \, dFy = \int_F \left[E\varepsilon_0 y + \frac{Ey^2}{\rho}\left(1 - \frac{P}{EF}\right)\right] dF = \frac{EJ}{\rho}\left(1 - \frac{P}{EF}\right).$$

De aquí obtenemos la dependencia entre el momento de flexión y la curvatura de la línea axial:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ\left(1 - \frac{P}{EF}\right)}. \qquad (c)$$

Supongamos que la flexión longitudinal (comba) de la barra tiene lugar en el plano de su menor rigidez; este plano coincide con el del dibujo (fig. 32).

La ecuación diferencial exacta de la flexión longitudinal teniendo en cuenta las deformaciones longitudinales debido a la fuerza P en

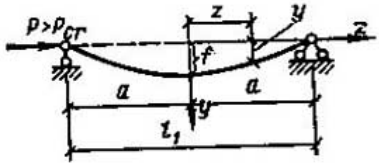


Fig. 32

correspondencia con el sistema de coordenadas en la fig. 32, para pequeñas flexiones, será:

$$y'' : [1 + (y')^2]^{3/2} = -\frac{M}{EJ_*} = -\frac{Py}{EJ_*} = -\alpha^2 y, \qquad (2.2)$$

donde

$$\alpha^2 = P : EJ_*; \quad J_* = J\left(1 - \frac{P}{EF}\right). \qquad (2.3)$$

Esta ecuación diferencial es no lineal, de segundo orden. Para disminuir el orden de la ecuación efectuamos la sustitución:

$$\frac{dy}{dz} = p; \quad \frac{d^2y}{dz^2} = \frac{dp}{dz} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dz} = \frac{dp}{dy}\, p.$$

Ahora la ecuación (2.2) se puede representar así:

$$pdp : (1 + p^2)^{3/2} = -\alpha^2 \, ydy.$$

Efectuamos el cambio de la variable p, haciendo $1 + p^2 = x$; de donde

$$2pdp = dx. \qquad (2.4)$$

Con esto obtenemos

$$\frac{x^{-3/2}\, dx}{2} = -\alpha^2 y \, dy.$$

Integrando, tendremos

$$-x^{-1/2} = -\frac{\alpha^2 y}{2} - C.$$

Después del reemplazo contrario, tenemos

$$1 : \sqrt{1+(y')^2} = \frac{\alpha^2 y^2}{2} + C. \tag{2.5}$$

Utilizamos la primera condición de frontera para $z = 0$; $y' = 0$. Esto determina $C = 1 - \alpha^2 f^2 : 2$. Ahora la ecuación (2.5) será:

$$\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} = 1 - \frac{\alpha^2}{2}(f^2 - y^2).$$

De aquí obtenemos con facilidad

$$y' = \frac{dy}{dz} = \mp \frac{\sqrt{1-\left[1-\frac{\alpha^2}{2}(f^2-y^2)\right]^2}}{1-\frac{\alpha^2}{2}(f^2-y^2)}. \tag{2.6}$$

El signo negativo se refiere a la mitad derecha de la curva de flexión (fig. 32), y el positivo, a la izquierda. Separando las variables en (2.6), tendremos:

$$dz = \mp \frac{\left[1-\frac{\alpha^2}{2}(f^2-y^2)\right]dy}{\sqrt{1-\left[1-\frac{\alpha^2}{2}(f^2-y^2)\right]^2}}. \tag{2.7}$$

Para integrar la expresión obtenida introducimos la sustitución:

$$y = f\cos\varphi; \quad dy = -f\,\mathrm{sen}\,\varphi d\varphi, \tag{2.8}$$
$$\text{donde } 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2.$$

La ecuación (2.7), después de sumarle y restarle la unidad en el numerador, adopta la forma:

$$dz = \pm\frac{1}{\alpha}\frac{[2(1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi)-1]\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}} =$$

$$= \pm\frac{1}{\alpha}\left[2\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi} - \frac{1}{\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}}\right]d\varphi, \tag{2.9}$$

donde

$$k^2 = a^2 f^2 : 4. \tag{2.10}$$

Después de la integración obtenemos:

$$z = \pm\frac{1}{\alpha}[2E(k\varphi) - F(k\varphi)] + D, \tag{2.11}$$

donde $F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}}$ es la integral elíptica de primer género; $E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}\,d\varphi$, integral elíptica de segundo

género; k se denomina módulo de las integrales elípticas, y φ, amplitud.

Para las integrales elípticas que no se integran en forma cerrada, se han elaborado tablas detalladas. Cuando $\varphi = \pi/2$, las integrales elípticas se llaman totales y se designan, respectivamente, por medio de $F(k, \pi/2)$ y $E(k, \pi/2)$.

Para determinar la segunda constante arbitraria D, utilizamos la segunda condición: cuando $z = 0$, $y = f$. Teniendo en cuenta (2.8), obtenemos que $\varphi = 0$ y, en consecuencia,

$$F = (k\varphi) = E(k\varphi) = 0, \text{ entonces } D = 0.$$

Las ecuaciones definitivas de la línea elástica para la flexión longitudinal, dadas en forma paramétrica, serán:

$$y = f\cos\varphi; \quad z = \pm\frac{f}{2k}[2E(k, \varphi) - F(k, \varphi)] \tag{2.12}$$

para $k^2 = \alpha^2 f^2 : 4$ y $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$.

En estas expresiones el módulo de las integrales elípticas es hasta ahora desconocido, debido a que no se conoce la flecha f. Para su determinación utilizamos la condición $s = l_*$, donde s es la longitud del arco de la barra encorvada.

El diferencial del arco es: $ds = -\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\, dy$ (el signo menos es debido a que dy es negativo).

Teniendo en cuenta (2.6) y (2.8) obtenemos:

$$ds = -\frac{dy}{\sqrt{1 - \left[1 - \frac{\alpha^2}{2}(f^2 - y^2)\right]^2}} = \frac{d\varphi}{\alpha\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}. \tag{2.13}$$

Después de la integración

$$s = \frac{1}{\alpha}F(k, \varphi) + B.$$

Teniendo en cuenta que cuando $z = 0$, $y = f$, $\varphi = 0$ y $s = 0$, obtenemos $B = 0$:

$$s = \frac{1}{\alpha}F(k, \varphi). \tag{2.14}$$

Para determinar el módulo de las integrales elípticas escribimos la longitud del arco en la mitad derecha de la barra:

$$s = \frac{l_*}{2} = \frac{1}{\alpha}F(k, \pi/2) = \frac{f}{2k}F(k, \pi/2), \tag{2.15}$$

por cuanto para $z = a$ y 0 y $\varphi = \pi/2$.

La ecuación (2.15) se resuelve mediante la elección del número k, lo que no resulta difícil si se cuenta con tablas de integrales elípticas.

La ecuación (2.15) también se puede escribir así:

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{P : P^*} = F(k, \pi/2),$$

donde

$$P^* = \frac{\pi^2 E J_*}{l_*^2} = \frac{\pi^2 E J}{l^2} : \left(1 - \frac{P}{EF}\right) = P_e : \left(1 - \frac{P}{EF}\right) \quad (2.16)$$

(magnitud variable);

$$P_e = \pi^2 E J : l^2.$$

A la flecha de la flexión f la hallamos de (2.12), (2.15) y (2.16):

$$f = \frac{2k}{\alpha} = \frac{k l_*}{F(k,\ \pi/2)} = \frac{2k l_*}{\pi \sqrt{P : P^*}}. \quad (2.17)$$

Orden de solución:

1) se da $P > P_{cr}$;
2) se determina l_*, por (2.1);
3) de (2.15) o (2.16) se elige el módulo k;
4) según (2.7) se halla la flecha f.

Hallamos el acercamiento de los extremos de la barra a cuenta de su flexión: $\Delta l_* = l_* - 2a$.

Conforme a (2.12) $a = \frac{f}{2k}[2E(k,\ \pi/2) - F(k,\ \pi/2)]$ y entonces

$$\Delta l_* = l_* - \frac{f}{k}[2E(k,\ \pi/2) - F(k,\ \pi/2)].$$

Tomando en consideración (2.15), definitivamente obtenemos:

$$\Delta l_* = 2l_* \left[1 - \frac{E(k,\ \pi/2)}{F(k,\ \pi/2)}\right]. \quad (2.18)$$

Si la barra cuando $P = P_{cr}$ conserva la forma rectilínea, entonces $f = 0$. En este caso, $k = 0$, $F(k, \pi/2) = \pi/2$ y entonces, según (2.16), obtenemos:

$$P_{cr} = P_{cr}^* = P_e : \left(1 - \frac{P_{cr}}{EF}\right). \quad (2.19)$$

Esto significa, que para una fuerza $P = P_{cr}$ aún no existe la flexión longitudinal. Habitualmente, tanto en la expresión (2.1) como en la (2.2) el sumando P/EF se desprecia, pese a lo cual la solución se llama *exacta*, por cuanto en (2.2) se halla escrita exactamente la curvatura de la la barra en estado curvado. En este caso la ecuación (2.2) así como los resultados obtenidos en base a ella, se vuelven aptos para las grandes flexiones, mientras que $P_{cr} = P_e$.

Se puede mostrar, que con una fuerza P_{cr}^* la forma recta de la barra es estable, mientras que para $P > P_{cr}^*$ es inestable [9]. El equilibrio indiferente, cuando la barra ante una fuerza P_{cr} podría encontrarse tanto en el estado rectilíneo como en el curvado, con cualquier flecha, incluso infinitamente pequeña, basado en una solución exacta no existe.

Para una representación evidente de la conducta de una barra tras la fuerza crítica, en la tabla 1 se muestran los valores de la fle-

Tabla 1. Relaciones $\frac{f}{l}$ y $\frac{\Delta l}{l}$

$\frac{P}{P_e}$	$\frac{f}{l}=\frac{k}{E}$	$\frac{\Delta l}{l}=2\left(1-\frac{E}{F}\right)$	$\frac{P}{P_e}$	$\frac{f}{l}=\frac{k}{F}$	$\frac{\Delta l}{l}=2\left(1-\frac{E}{F}\right)$
1	0	0	1,006	0,0695282	0,0120181
1,0005	0,02012665	0,0010002	1,0071	0,075061066	0,01402466
1,001	0,028456258	0,0020054	1,0081	0,080203007	0,01603222
1,002	0,040223052	0,004002	1,0091	0,085024969	0,0180409
1,003	0,049238248	0,00600448	1,01	0,088974164	0,01977752
1,004	0,056826836	0,00800800	1,02	0,12436538	0,03911912
1,005	0,06350232	0,01001268			

xión f y los acercamientos de los extremos Δl en dependencia de la relación $P : P_e$, cuando no se tomaba en consideración la magnitud de P/EF [13]. De esta tabla y de los gráficos en la fig. 33 se observa

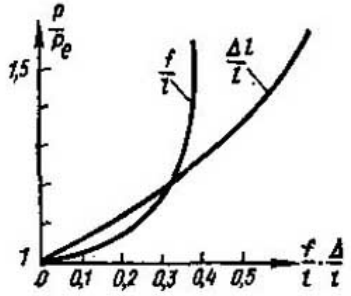


Fig. 33

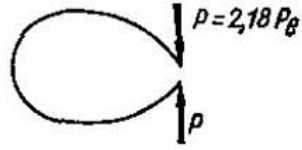


Fig. 34

que a cada valor de la fuerza P le corresponde su valor de f y de Δl. Por consiguiente, la barra en el estado elástico y después de la pérdida de la estabilidad, continúa ofreciendo resistencia a la flexión longitudinal. Cierto, en un principio, tras la fuerza P_{cr} la barra resiste débilmente a la flexión longitudinal y sólo después comienza a ofrecer una resistencia que, aunque débil, es notoriamente mayor.

Si la barra es muy elástica, puede ser doblada hasta formar un anillo (fig. 34) sin que se altere su solidez, pero para esto la fuerza de compresión P debe ser 2,18 veces mayor que la fuerza de Euler P_e.

La resolución exacta examinada del problema sobre la flexión longitudinal de una barra se ha formulado basándose en el supuesto de la flexión por una semionda, tal como ocurre en la realidad. Sin

embargo, hubiese resultado fácil resolver esta cuestión suponiendo una flexión por varias semiondas, aunque no hay necesidad práctica de ello.

De la solución exacta mostrada se pueden obtener diversas fórmulas aproximadas de la flexión y del acercamiento de los extremos [13]. Así, por ejemplo, si la ecuación (2.15) la escribimos en la forma siguiente

$$l_* = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\pi/2} (d\varphi : \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}), \tag{2.20}$$

y luego para φ adoptamos un valor medio $\pi/4 = 45°$, obtenemos:

$$l_* = \pi : \alpha \sqrt{1 - k^2 : 2}.$$

Luego, teniendo en cuenta que $k^2 = \alpha^2 f^2 : 4$,

$$l_* = \pi : \alpha \sqrt{1 - \alpha^2 f^2 : 8}.$$

De aquí,

$$f = \frac{2\sqrt{2}}{\alpha} \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{\alpha^2 l_*^2}} \quad \text{y} \quad \frac{f}{l_*} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\frac{P^*}{P}\left(1 - \frac{P^*}{P}\right)}. \tag{2.21}$$

Cuando $P = P^*$, la flecha $f = 0$.

Tomando en consideración (2.1), (2.16) y (2.21),

$$\frac{f}{l} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\frac{P_e}{P}\left(1 - \frac{P}{EF} - \frac{P_e}{P}\right)}. \tag{2.21'}$$

Efectuando la misma operación con la fórmula (2.18) y teniendo en cuenta que $E(k, \pi/2)$: $E(k, \pi/2) \approx 1 - (k^2/2)$, así como la fórmula (2.21'), tendremos:

$$\frac{\Delta l_*}{l_*} = 2\left(1 - \frac{P_*}{P}\right), \tag{2.22}$$

o bien,

$$\frac{\Delta l_*}{l} = 2\left(1 - \frac{P}{EF} - \frac{P_e}{P}\right). \tag{2.22'}$$

Habitualmente, los sumandos P/EF comparados con la unidad se desprecian y entonces

$$\frac{f}{l} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\frac{P_e}{P}\left(1 - \frac{P_e}{P}\right)}; \tag{2.21''}$$

$$\frac{\Delta l}{l} = 2\left(1 - \frac{P_e}{P}\right). \tag{2.22''}$$

Las fórmulas (2.21) y (2.22) de todos los tipos dan valores de f/l y $\Delta l/l$ cercanos a los exactos. De las mismas también se aprecia que cuando $P = P_{cr}$, según (2.19), aún no hay flexión longitudinal.

Consideremos ahora una barra con una flexión infinitamente pequeña df. Conforme a (2.10), el módulo de las integrales elípticas k será un infinitésimo del mismo orden que df. Desarrollamos la integral elíptica total F en una serie:

$$F(k,\ \pi/2) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{k^2}{4} + 9\,\frac{k^4}{64} + \ldots\right)$$

con exactitud hasta los infinitésimos de primer orden $F = \pi/2$ y regresamos nuevamente a la expresión (2.19).

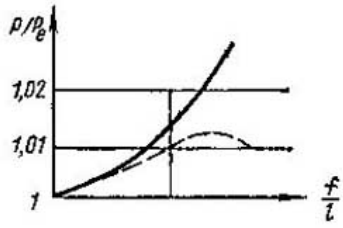


Fig. 35

Esto significa, que si la investigación se realiza con una exactitud hasta los infinitésimos de primer orden inclusive, cuando la fuerza es crítica puede existir una *flexión infinitesimal*, es decir, obtenemos la concepción del equilibrio *neutral* (indiferente) dentro de los límites de flexiones infinitamente pequeñas.

Las barras de las estructuras de construcciones con frecuencia pierden estabilidad en la fase plástica, cuando la fuerza P es menor que la P_{cr}, determinada a partir de (2.19).

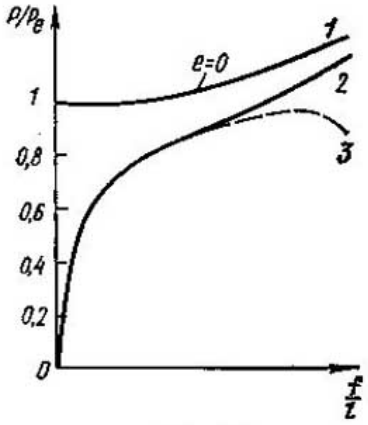


Fig. 36

Pero si la pérdida de la estabilidad de las barras de las estructuras de las construcciones tiene lugar en la fase elástica, entonces, ante un aumento ulterior de la fuerza P en el estado postcrítico, y como consecuencia de un rápido crecimiento de la flexión, en la barra habitualmente se manifiestan deformaciones plásticas, primero en su lado cóncavo, lo que a veces es suficiente para que la barra pierda su capacidad portadora (de resistencia), y luego en su lado convexo. Tiene lugar la pérdida de estabilidad de segundo género (fig. 35, línea punteada).

En estos casos, aunque la fuerza crítica de segundo género es generalmente mayor que la fuerza crítica que provoca la pérdida de estabilidad de primer género, esta superación no es muy significativa. Por eso, con frecuencia, a la fuerza crítica de primer género durante la pérdida de la estabilidad en la fase elástica, la consideran una fuerza límite y *peligrosa* para estas barras. Justifica esto el hecho de que, en condiciones reales, siempre se tienen desviaciones con respecto a la forma ideal de la barra y de la aplicación ideal de las fuerzas actuantes, que alteran desde el propio inicio de la carga la conducta esquematizada de la barra.

Así, por ejemplo, si en base a la ecuación diferencial exacta se considera la flexión longitudinal-transversal de la barra debido a la

fuerza de compresión, aplicada con excentricidad, entonces las flexiones se manifiestan en el comienzo de la carga (fig. 36). Si además el material de la barra trabaja todo el tiempo en los límites de la elasticidad, el aumento aproximado de la flexión de la barra lo muestra la curva *2*. Sin embargo, con frecuencia en la zona de rápido crecimiento de las flexiones aparece una fluidez, primero en el lado cóncavo y después en el convexo de la barra, el carácter de la curva *2* cambia, y al poco tiempo se logra la pérdida de la capacidad portadora (curva *3*). Frecuentemente en estos casos la fuerza crítica de segundo género será ya menor que la fuerza crítica de primer género.

SOLUCIÓN APROXIMADA

En la ecuación diferencial (2.2) despreciamos el término $(y')^2$, entonces obtenemos:

$$y'' + \alpha^2 y = 0. \tag{2.23}$$

Esta es una ecuación diferencial lineal con coeficiente constante. Su solución es

$$y = A \operatorname{sen} \alpha z + B \cos \alpha z. \tag{2.24}$$

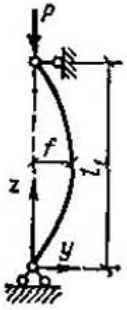


Fig. 37

Para simplificar los razonamientos ulteriores, emplearemos el sistema de coordenadas dado en la fig. 37.

Las constantes arbitrarias las determinamos en base a las condiciones de frontera del problema. Para $z = 0$, $y = 0$, lo que da $B = 0$. Ahora

$$y = A \operatorname{sen} \alpha z. \tag{2.25}$$

Luego, en los cursos de resistencia de materiales, habitualmente suponen que cuando $z = l$ (largo de la barra), $y = 0$, obteniendo:

$$A \operatorname{sen} \alpha l = 0. \tag{a}$$

De aquí resulta $P_{cr} = P_e = \pi^2 EJ : l^2$.

Esta escritura de la segunda condición de frontera es aproximada; por ella se considera que la longitud de la cuerda de la barra deformada es igual al largo de la propia barra, y esto explica la distinta interpretación de la fuerza crítica en las soluciones exacta y aproximada. Mientras que en la solución exacta, con la fuerza crítica P_e todavía no hay flexión longitudinal, en la aproximada esta flexión ya existe.

Iremos por otro camino, haciendo que cuando $z = l_1 = 2a$, $y = 0$:

$$A \operatorname{sen} \alpha l_1 = 0. \tag{2.26}$$

Aquí caben dos respuestas: o bien $A = 0$ y entonces, de acuerdo con (2.25), no habrá flexión y la barra seguirá siendo recta, o bien

$$\operatorname{sen} \alpha l_1 = 0. \tag{2.27}$$

De aquí obtenemos

$$\alpha l_1 = k\pi \ (k = 1, 2, \ldots, \infty). \tag{2.28}$$

La ecuación de la línea elástica de la flexión longitudinal (2.25) es:

$$y = A \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l_1}, \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots \tag{2.29}$$

En esta expresión k determina el número de semiondas de la sinusoide, que son teóricamente posibles durante la flexión longitudinal. Sin embargo, nos interesa sólo la fuerza menor, capaz de provocar una flexión longitudinal, la cual para $k = 1$ será

$$P = \frac{\pi^2 E J_*}{l_1^2}. \tag{2.30}$$

En este caso la flexión lateral tiene lugar por una semionda de la sinusoide (fig. 37):

$$y = A \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l_1} = f \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l_1}. \tag{2.31}$$

En adelante habría que establecer el enlace entre las longitudes de la barra recta en el estado crítico (2.1) $l_{*\mathrm{cr}}$, de la cuerda l_1 y de la flecha de flexión f durante la flexión lateral. Pero no haremos esto, puesto que las dependencias cuantitativas entre la longitud de la cuerda l_1, la flecha de la flexión f y la fuerza $P > P_{\mathrm{cr}}$, obtenidas basándose en la ecuación diferencial aproximada (2.23), son imperfectas. Pero sacamos una conclusión cualitativa de la expresión (2.30), que concuerda con la solución exacta en que a cada fuerza $P > P_{\mathrm{cr}}$ le corresponde su cuerda l_1 y su flecha de flexión f, y viceversa.

Comencemos ahora a disminuir la fuerza P. La cuerda del estado deformado l_1, como se deduce de la expresión (2.30), deberá aumentar, y la barra debe enderezarse. En el límite, el largo de la cuerda l_1 tenderá al largo de la barra en estado rectilíneo crítico $l_{*\mathrm{cr}}$, y la fuerza P tiende respectivamente a la fuerza crítica P_{cr}. Por consiguiente,

$$P_{\mathrm{cr}} = \frac{\pi^2 E J_*}{l_{*\mathrm{cr}}^2} = \frac{P_e}{\left(1 - \frac{P_{\mathrm{cr}}}{EF}\right)}.$$

El resultado obtenido coincide con la solución exacta de (2.19).

Realizando el paso límite de l_1 a $l_{*\mathrm{cr}}$, precisamos continuamente el resultado obtenido en base a la ecuación (2.23), debido a que $(y')^2$ se vuelve cada vez menor, y al fin y al cabo, llegamos a conclusiones coincidentes con las de la solución exacta.

Hay que destacar otra vez más que la fórmula (2.30) sólo brinda cualitativamente una idea correcta acerca del comportamiento de la barra más allá de la fuerza crítica, por la cual a cada valor de la fuerza $P > P_e$ le corresponde su cuerda de la barra deformada. Esta fórmula, desde el punto de vista cuantitativo, es imperfecta.

Por lo visto, en base a la ecuación (2.23) no se puede obtener una fórmula que dé una evaluación cuantitativa satisfactoria del comportamiento de la barra más allá de la fuerza crítica incluso cuando se precisan las condiciones de frontera.

Y aquí, conforme a (2.30), acerca del equilibrio indiferente (neutral) sólo se puede hacer referencia en forma condicional dentro de los límites de flexiones infinitesimales de la barra, si con esto se tiene en cuenta que, con exactitud de hasta un infinitésimo de primer orden $dz = ds$ y entonces el largo de la cuerda se vuelve igual a la longitud de la propia barra.

Con tales supuestos, una barra con una fuerza $P_{cr} = \pi^2 EJ_*/l_{cr}^2$ puede ser bien recta, o bien encorvada con flexiones infinitesimales.

En base a los razonamientos efectuados, se pueden indicar dos métodos posibles de obtención de las cargas críticas:

1. Se investiga el equilibrio de la barra en estado deformado después de la pérdida de la estabilidad, determinado por pequeños desplazamientos, tomando en consideración el acercamiento de los extremos de la barra durante la flexión longitudinal, después, de lo cual se hallan las cargas que corresponden al equilibrio investigado, y luego, con el paso límite al estado inicial, se determinan las fuerzas críticas.

2. Se investiga el equilibrio de la barra en estado deformado después de la pérdida de la estabilidad, determinado por desplazamientos infinitesimales, sin tener en cuenta el acercamiento de los extremos de la barra durante la flexión longitudinal; luego se hallan las cargas que corresponden al equilibrio investigado, las cuales se consideran críticas.

El primer método no requiere el concepto sobre el equilibrio neutral de la barra y, como se vio, brinda una idea cualitativamente correcta acerca del comportamiento de la barra durante la fuerza crítica y fuera de ésta, de acuerdo con la solución exacta. Para no realizar la operación del paso límite en cada caso particular, se puede efectuar la investigación de la barra fuera de la fuerza crítica directamente en condiciones de frontera, por el estado deformado.

El segundo método, en el cual el acercamiento de los extremos de la barra, para desplazamientos de ésta tan pequeños como se quiera después de la pérdida de la estabilidad, se calculan con una exactitud de hasta infinitésimos de primer orden, lleva al concepto del equilibrio indiferente (neutral) y permite hallar correctamente el valor de la fuerza crítica, pero engendra otra concepción de la fuerza crítica, que difiere con la solución exacta.

Por cuanto el primer método exige algunos razonamientos (aunque pocos) complementarios, debidos al paso límite, en adelante, *en todo lugar*, habremos de emplear el segundo método de determinación de las fuerzas críticas durante el *equilibrio indiferente*, despreciando el acortamiento de la barra debido a la contracción, *sobreentendiendo siempre los desplazamientos dados de la barra en estado desviado como infinitamente pequeños y considerando crítica la fuerza* $P = \alpha^2 EJ$,

obtenida en esta solución aproximada. Pero habremos de recordar, que en base a la solución exacta, para esta fuerza aun no hay flexión longitudinal y la barra en estado rectilíneo es estable.

§ 5. ECUACIONES GENERALES DE LA LÍNEA ELÁSTICA DURANTE LA FLEXIÓN LONGITUDINAL DE LA BARRA. Analicemos una barra comprimida por una fuerza P, en estado de equilibrio indiferente con desplazamientos infinitesimales. Sea que su extremo izquierdo, luego de la pérdida de la estabilidad, se desplaza en un y (0) y ha girado en un y' (0). Supongamos también que, como resultado de la pérdida de la estabilidad, en el extremo izquierdo de la barra han surgido el momento M (0) y la fuerza Q (0), perpendicular a la posición inicial de la barra (fig. 38, *a*).

El momento de flexión en cualquier sección del estado deformado de la barra es

$$M(z) = M(0) + Q(0)\, z + P\,[y - y(0)].$$

Componemos la ecuación diferencial lineal aproximada de la línea elástica de la flexión longitudinal, despreciando el acortamiento de la barra, debido a la compresión:

$$y'' = -\frac{M(0) + Q(0)\, z + P\,[y - y(0)]}{EJ}.$$

A ella la representamos así:

$$y'' + a^2 y = -\frac{M(0) + Q(0)\, z - Py(0)}{EJ}, \qquad (2.32)$$

donde, al igual que antes,

$$\alpha^2 = P : EJ.$$

Integrando esta ecuación, obtenemos

$$y(z) = A \operatorname{sen} \alpha z + B \cos \alpha z - \frac{M(0) + Q(0)\, z - Py(0)}{\alpha^2 EJ}. \qquad (2.33)$$

Expresamos las constantes arbitrarias por medio de las condiciones iniciales en el extremo izquierdo de la barra. Para ello, primeramente calculamos la derivada de (2.23):

$$y'(z) = \alpha A \cos \alpha z - \alpha B \operatorname{sen} \alpha z - \frac{Q(0)}{\alpha^2 EJ}. \qquad (2.34)$$

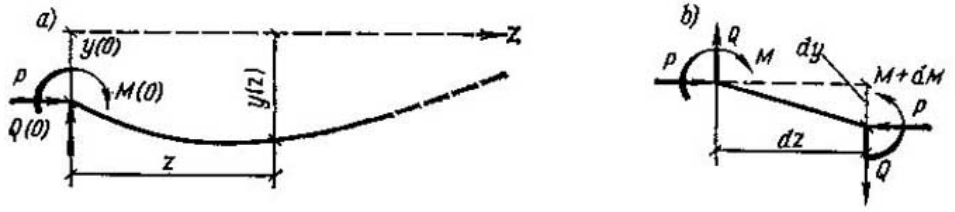


Fig. 38

Ahora escribimos las condiciones de frontera en el extremo izquierdo cuando $z = 0$:

$$y(0) = B - \frac{M(0) - Py(0)}{\alpha^2 EJ};$$

$$y'(0) = \alpha A - \frac{Q(0)}{\alpha^3 EJ}.$$

De donde

$$B = \frac{M(0)}{\alpha^2 EJ}; \quad A = \frac{y'(0)}{\alpha} + \frac{Q(0)}{\alpha^3 EJ}.$$

Sustituyendo por sus valores las constantes de integración en (2.33), definitivamente obtenemos

$$y(z) = y(0) + \frac{y'(0)}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha z - \frac{M(0)}{\alpha^2 EJ}(1 - \cos \alpha z) - \\ - \frac{Q(0)}{\alpha^3 EJ}(\alpha z - \operatorname{sen} \alpha z). \tag{2.35}$$

Respectivamente:

$$y'(z) = y'(0) \cos \alpha z - \frac{M(0)}{\alpha EJ} \operatorname{sen} \alpha z - \frac{Q(0)}{\alpha^2 EJ}(1 - \cos \alpha z); \tag{2.36}$$

$$M(z) = -EJy''(z) = \alpha EJy'(0) \operatorname{sen} \alpha z + M(0) \cos \alpha z + \frac{Q(0)}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha z. \tag{2.37}$$

La fuerza transversal $Q(z)$ resulta cómodo determinarla con respecto a la barra no deformada (fig. 38, *b*). De la condición de equilibrio del elemento infinitesimal en forma de una suma de momentos con respecto a su extremo derecho, obtenemos

$$Q(z) = \frac{dM(z)}{dz} - P\frac{dy}{dz} = Q(0). \tag{2.38}$$

A veces, resulta más comodo la expresión (2.35) escribirla en la forma

$$y(z) = y(0) + \frac{y'(0)}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha z - \frac{M(0)}{P}(1 - \cos \alpha z) - \frac{Q(0)}{P} \frac{\alpha z - \operatorname{sen} \alpha z}{\alpha}. \tag{2.35'}$$

Si luego, por el largo de la barra, para alguna coordenada $z = a_i$, se encuentran discontinuidades en las flexiones $\Delta y(a_i)$, en los ángulos, de inclinación de la tangente $\Delta y'(a_i)$, en los momentos de flexión $\Delta M(a_i)$ y en las fuerzas transversales $\Delta Q(a_i)$, aparecidas como resultado de la pérdida de la estabilidad, entonces estas discontinuidades, en virtud de la linealidad de la ecuación diferencial (2.32), pueden ser consideradas, agregando a las ecuacines (2.35)—(2.38) sumandos en forma de un producto de los valores de las discontinuidades por las funciones de influencia que les corresponden, tomadas para el

argumento $(z - a_i)$. Estos agregados serán:

$$\Delta y(z) = \Delta y(a_i) + \frac{\Delta y'(a_i)}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha (z - a_i) - \frac{\Delta M(a_i)}{\alpha^2 EJ} \times$$

$$\times [1 - \cos \alpha (z - a_i)] - \frac{\Delta Q(a_i)}{\alpha^3 EJ} [\alpha (z - a_i) - \operatorname{sen} \alpha (z - a_i)]; \quad (2.39)$$

$$\Delta y'(z) = \Delta y'(a_i) \cos \alpha (z - a_i) - \frac{\Delta M(a_i)}{\alpha EJ} \operatorname{sen} \alpha (z - a_i) -$$

$$- \frac{\Delta Q(a_i)}{\alpha^2 EJ} [1 - \cos \alpha (z - a_i)]; \quad (2.40)$$

$$\Delta M(z) = \alpha EJ \Delta y'(\alpha_i) \operatorname{sen} \alpha (z - a_i) + \Delta M(a_i) \cos \alpha (z - a_i) +$$

$$+ \frac{\Delta Q(a_i)}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha (z - a_i); \quad (2.41)$$

$$\Delta Q(z) = \Delta Q(a_i). \quad (2.42)$$

Así, por ejemplo, para el caso representado en la fig. 39, la ecuación (2.35) se escribe:

Primer tramo: $0 \leqslant z \leqslant a$

$$y_1(z) = y(0) + \frac{y'(0)}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha z - \frac{M(0)}{\alpha^2 EJ} (1 - \cos \alpha z) - \frac{Q(0)}{\alpha^3 EJ} (\alpha z - \operatorname{sen} \alpha z);$$

Segundo tramo: a

$$y_2(z) = y_1(z) - \frac{M}{\alpha^2 EJ} [1 - \cos \alpha (z - a)] +$$

$$+ \frac{P}{\alpha^3 EJ} [\alpha (z - a) - \operatorname{sen} \alpha (z - a)].$$

Diferenciando estas ecuaciones obtenemos las ecuaciones de las restantes magnitudes de cálculo.

Si la barra está alargada, en las expresiones (2.35)—(2.42), designando $\beta = \sqrt{P_{al}/EJ}$, hay que efectuar el reemplazo, haciendo $i = \sqrt{-1}$; $\alpha = i\beta$; $\alpha^2 = -\beta^2$; $\operatorname{sen} i\beta = i \operatorname{sh} \beta$; $\cos i\beta = \operatorname{ch} \beta$.

En este caso, la expresión (2.35) sera:

$$y(z) = y(0) + \frac{y'(0)}{\beta} \operatorname{sh} \beta + \frac{M(0)}{\beta^2 EJ} (1 - \operatorname{ch} \beta) + \frac{\theta(0)}{\beta^3 EJ} (\beta z - \operatorname{sh} \beta z).$$

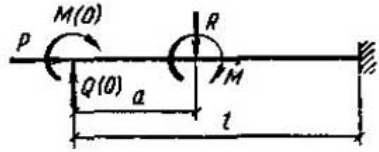


Fig. 39

§ 6. FUERZAS CRÍTICAS PARA LAS BARRAS DE SECCIÓN CONSTANTE, CON DISTINTAS FIJACIONES DE SUS EXTREMOS.

El valor de la fuerza crítica para cualquier barra, siendo arbitrarias sus fijaciones, se puede representar así:

$$P_{cr} = \frac{\lambda^2}{l^2} EJ, \tag{2.43}$$

donde $\lambda = al$.

La fuerza crítica también se puede expresar mediante el coeficiente μ del largo de la barra, que toma en consideración las condiciones de fijación de la barra:

$$P_{cr} = \pi^2 EJ : (\mu l)^2. \tag{2.44}$$

Comparando (2.43) con (2.44), obtenemos:

$$\mu = \pi : \lambda. \tag{2.45}$$

Examinemos algunos casos de barras con distintas fijaciones. Realizaremos las soluciones según las ecuaciones generales (2.35)—(2.42).

Primer caso (básico) (fig. 40). Parámetros iniciales para $z = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = ?$ $M(0) = 0$, $Q(0) = 0$.

Según la ecuación (2.35), $y(z) = y'(0) \frac{\operatorname{sen} \alpha z}{\alpha}$.

Condición de frontera en el extremo derecho de la barra para $z = l$: $y(l) = y'(0) \frac{\operatorname{sen} \alpha l}{\alpha} = 0$. De aquí $\operatorname{sen} \alpha l = 0$; $\alpha l = k\pi$; $P_{cr} = \frac{k^2 \pi^2 EJ}{l^2}$. La fuerza crítica menor es

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \quad \text{y} \quad \mu = 1. \tag{2.46}$$

Segundo caso (fig. 41). Parámetros iniciales: $y(0) = ?$ $y'(0) = ?$ $M(0) = 0$, $Q(0) = 0$. Según las ecuaciones (2.35) y (2.36)

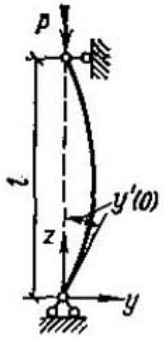


Fig. 40

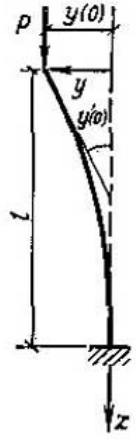


Fig. 41

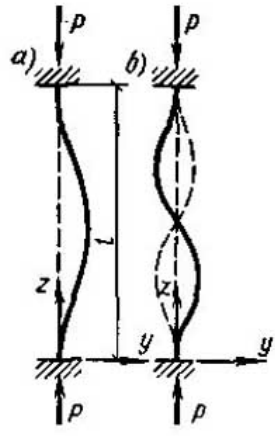


Fig. 42

tenemos:

$$y(z) = y(0) + y'(0)\frac{\operatorname{sen}\alpha z}{\alpha}; \quad y'(z) = y'(0)\cos\alpha z.$$

Condiciones de frontera en el extremo derecho, para $z = l$:

$$y(l) = y(0) + y'(0)\frac{\operatorname{sen}\alpha l}{\alpha} = 0; \quad y'(l) = y'(0)\cos\alpha l = 0.$$

Las ecuaciones son homogéneas; para obtener la ecuación de estabilidad del determinante de ellas lo igualamos a cero:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & (\operatorname{sen}\alpha l : \alpha) \\ 0 & \cos\alpha l \end{vmatrix} = \cos\alpha l = 0.$$

De aquí se obtiene el primer valor de $\alpha l = \pi/2$;

$$P_{cr} = \pi^2 EJ : 4l^2 \text{ y } \mu = 2. \tag{2.47}$$

Tercer caso (fig. 42). Parámetros iniciales: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $M(0) = ?$ $Q(0) = ?$

Según las ecuaciones (2.35) y (2.36) obtenemos:

$$y(z) = -\frac{M(0)}{\alpha^2 EJ}(1 - \cos\alpha z) - \frac{Q(0)}{\alpha^3 EJ}(\alpha z - \operatorname{sen}\alpha z);$$

$$y'(z) = -\frac{M(0)}{\alpha EJ}\operatorname{sen}\alpha z - \frac{Q(0)}{\alpha^2 EJ}(1 - \cos\alpha z).$$

Condiciones de frontera en el extremo derecho, cuando $z = l$:

$$y(l) = -\frac{M(0)}{\alpha^2 EJ}(1 - \cos\alpha l) - \frac{Q(0)}{\alpha^3 EJ}(\alpha l - \operatorname{sen}\alpha l) = 0;$$

$$y'(l) = -\frac{M(0)}{\alpha EJ}\operatorname{sen}\alpha l - \frac{Q(0)}{\alpha^2 EJ}(1 - \cos\alpha l) = 0.$$

Las ecuaciones son homogéneas.

Compongamos la ecuación de estabilidad, igualando el determinante de estas ecuaciones a cero:

$$D = \begin{vmatrix} -(1 - \cos\alpha l) & -(\alpha l - \operatorname{sen}\alpha l) \\ -\alpha\operatorname{sen}\alpha l & -\alpha(1 - \cos\alpha l) \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha[(1 - \cos\alpha l)^2 - \operatorname{sen}\alpha l(\alpha l - \operatorname{sen}\alpha l)].$$

Después de las transformaciones

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha l}{2}\left(4\operatorname{sen}\frac{\alpha l}{2} - \alpha l 2\cos\frac{\alpha l}{2}\right) = 0.$$

Si

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha l}{2} = 0, \text{ entonces } \frac{\alpha l}{2} = \pi, \; P_{cr} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2} \text{ y } \mu = 1/2. \tag{2.48}$$

Este caso define la forma simétrica de pérdida de estabilidad (fig. 42, *a*).

Si $4\operatorname{sen}\frac{\alpha l}{2} - \alpha l 2\cos\frac{\alpha l}{2} = 0$, entonces, $\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2} = \frac{\alpha l}{2}$, la menor

raíz es $\alpha l/2 = 4{,}4934$;

$$P_{cr} = 4 \cdot 4{,}4934^2 \frac{EJ}{l^2} \quad y \quad \mu \approx 0{,}35. \tag{2.49}$$

Tenemos el caso de la forma antisimétrica de pérdida de estabilidad (fig. 42, *b*). La fuerza crítica menor se obtiene con la forma simétrica de pérdida de la estabilidad.

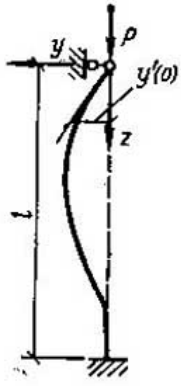


Fig. 43

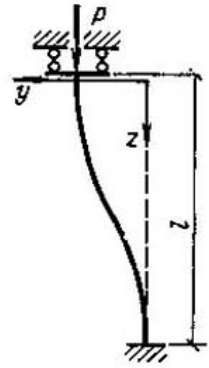


Fig. 44

Cuarto caso (fig. 43). Parámetros iniciales: $y\,(0) = 0$, $y'\,(0) = ?$ $M\,(0) = 0$, $Q\,(0) = ?$

Según las ecuaciones (2.35), (2.36) obtenemos:

$$y\,(z) = \frac{y'\,(0)}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha z - \frac{Q\,(0)}{\alpha^3 EJ} (\alpha z - \operatorname{sen} \alpha z);$$

$$y'\,(z) = y'\,(0) \cos \alpha z - \frac{Q\,(0)}{\alpha^2 EJ} (1 - \cos \alpha z).$$

Las condiciones de frontera en el extremo derecho son:

$$y\,(l) = \frac{y'\,(0)}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha l - \frac{Q\,(0)}{\alpha^3 EJ} (\alpha l - \operatorname{sen} \alpha l) = 0;$$

$$y'\,(l) = y'\,(0) \cos \alpha l - \frac{Q\,(0)}{\alpha^2 EJ} (1 - \cos \alpha l) = 0.$$

La ecuación de estabilidad es

$$D = -\operatorname{sen} \alpha l\,(1 - \cos \alpha l) + \cos \alpha l\,(\alpha l - \operatorname{sen} \alpha l) = 0.$$

De aquí, $\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l$. La menor raíz es $\alpha l = 4{,}4934$;

$$P_{cr} = \frac{4{,}4934^2 EJ}{l^2} \quad \text{y} \quad \mu \approx 0{,}7 \tag{2.50}$$

Quinto caso (fig. 44). Parámetros iniciales: $y\,(0) = ?$

$$y'\,(0) = 0,\ M\,(0) = ?\ Q\,(0) = 0.$$

$$y\,(z) = y\,(0) - \frac{M\,(0)}{\alpha^2 EJ} (1 - \cos \alpha z);$$

$$y'\,(z) = -\frac{M\,(0)}{\alpha EJ} \operatorname{sen} \alpha z.$$

Condiciones de frontera en el extremo derecho:

$$y(l) = y(0) - \frac{M(0)}{\alpha^2 EJ}(1 - \cos \alpha l) = 0;$$

$$y'(l) = -\frac{M(0)}{\alpha EJ} \operatorname{sen} \alpha l = 0.$$

Ecuación de estabilidad:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -(1 - \cos \alpha l) \\ 0 & -\alpha \operatorname{sen} \alpha l \end{vmatrix} = -\alpha \operatorname{sen} \alpha l = 0; \quad \alpha l = \pi;$$

$$P_{cr} = \pi^2 EJ : l^2 \quad \text{y} \quad \mu = 1. \tag{2.51}$$

Señalemos el caso posible de pérdida conjunta de la estabilidad de la columna representada en la fig. 45, cuando μ se debe tomar igual

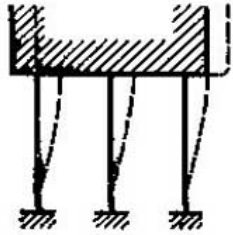


Fig. 45

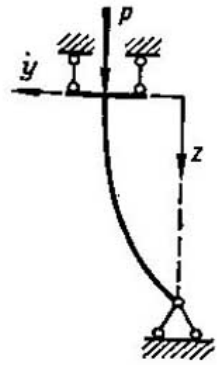


Fig. 46

a la unidad, mientras que para cada columna empotrada él es igual a un medio.

Sexto caso (fig. 46). Parámetros iniciales: $y(0) = ?$ $y'(0) = 0$, $M(0) = ?$ $Q(0) = 0$.

$$y(z) = y(0) - \frac{M(0)}{\alpha^2 EJ}(1 - \cos \alpha z);$$

$$M(z) = M(0) \cos \alpha z.$$

Condiciones de frontera en el extremo derecho:

$$y(l) = y(0) - \frac{M(0)}{\alpha^2 EJ}(1 - \cos \alpha l) = 0;$$

$$M(l) = M(0) \cos \alpha l.$$

Ecuación de estabilidad:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{(1 - \cos \alpha l)}{\alpha^2 EJ} \\ 0 & \cos \alpha l \end{vmatrix} = \cos \alpha l = 0.$$

De aquí, $\alpha l = \pi/2$ y $P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$, igual que en el segundo caso.

Séptimo caso (fig. 47). Parámetros iniciales: $y\,(0) = ?$ $y'\,(0) = ?$ $M\,(0) = 0$, $Q\,(0) = ky\,(0)$.

$$y\,(z) = y\,(0) + y'\,(0)\,\frac{\operatorname{sen}\alpha z}{\alpha} - \frac{ky\,(0)}{\alpha^3 EJ}\,(\alpha z - \operatorname{sen}\alpha z);$$

$$y'\,(z) = y'\,(0)\cos\alpha z - \frac{ky\,(0)}{\alpha^2 EJ}\,(1 - \cos\alpha z).$$

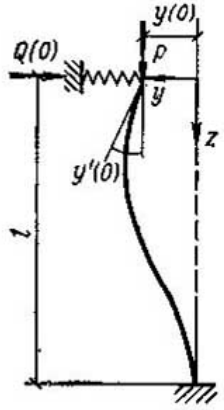


Fig. 47

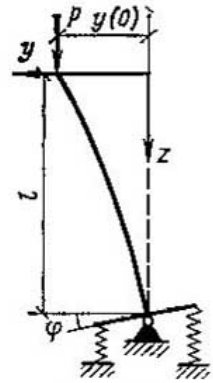


Fig. 48

Condiciones de frontera para el extremo derecho:

$$y\,(l) = y\,(0) + y'\,(0)\,\frac{\operatorname{sen}\alpha l}{\alpha} - \frac{ky\,(0)}{\alpha^3 EJ}\,(\alpha l - \operatorname{sen}\alpha l) = 0.$$

$$y'\,(l) = y'\,(0)\cos\alpha l - \frac{ky\,(0)}{\alpha^2 EJ}\,(1 - \cos\alpha l) = 0.$$

Ecuación de estabilidad:

$$D = \left[1 - \frac{k}{\alpha^3 EJ}\,(\alpha l - \operatorname{sen}\alpha l)\right]\cos\alpha l + \frac{k}{\alpha^2 EJ}\,(1 - \cos\alpha l)\,\frac{\operatorname{sen}\alpha l}{\alpha} = 0.$$

$$\cos\alpha l\left(1 - \frac{kl}{\alpha^2 EJ}\right) + \frac{k}{\alpha^3 EJ}\operatorname{sen}\alpha l = 0.$$

De aquí $\operatorname{tg}\alpha l = \alpha l - \frac{\alpha^3 EJ}{k}$. (2.52)

Esta ecuación se resuelve mediante la elección de αl.

Si $k = 0$, lo que significa la inexistencia de apoyo, entonces $\operatorname{tg}\alpha l = \infty$, $\alpha l = \pi/2$, obtenemos el segundo caso. Si $k = \infty$, quiere decir que el apoyo es rígido, la $\operatorname{tg}\alpha l = \alpha l$, obtenemos el cuarto caso.

Octavo caso: pilar sobre una base elástica y un apoyo rígido (fig. 48). El ángulo de giro del cimiento lo determinamos por la fórmula

$$\varphi = M/k, \tag{2.53}$$

donde M es el momento; k, el coeficiente de la base elástica.

Parámetros iniciales: $y\,(0) = ?\ y'\,(0) = ?\ M\,(0) = 0,\ Q\,(0) = 0$.

Momento de empotramiento, $M\,(l) = -Py\,(0)$; ángulo de giro $\varphi = -Py\,(0)/k$.

Según las ecuaciones (2.35) y (2.36):

$$y\,(z) = y\,(0) + \frac{y'\,(0)}{\alpha}\operatorname{sen}\alpha z;\quad y'\,(z) = y'\,(0)\cos\alpha z.$$

Condiciones de frontera en el extremo derecho:

$$y\,(l) = y\,(0) + \frac{y'\,(0)}{\alpha}\operatorname{sen}\alpha l = 0;$$

$$y'\,(l) = y'\,(0)\cos\alpha l = -\frac{Py\,(0)}{k}.$$

Ecuación de estabilidad:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{sen}\alpha l : \alpha \\ \frac{P}{y} & \cos\alpha l \end{vmatrix} = \cos\alpha l - \frac{P}{k}\frac{\operatorname{sen}\alpha l}{\alpha} = 0.$$

De aquí $\operatorname{tg}\alpha l = \frac{k}{\alpha EJ}$, o bien, $\frac{\operatorname{tg}\alpha l}{\alpha l} = \frac{k}{lP}$. (2.54)

La ecuación se resuelve mediante la elección por medio del valor dado k. Para la base elástica, según Winkler, $k = cJ_{\text{fund}}$, por eso

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha l}{\alpha l} = \frac{cJ_{\text{fund}}}{lP}, \tag{2.55}$$

donde c es el coeficiente de lecho.

Si el pilar se considera absolutamente rígido ($EJ = \infty$), entonces $\alpha = 0$, y según (2.54) y (2.55) obtenemos una indeterminación. Desarrollándola, obtenemos:

$$P_{\text{cr}} = \frac{k}{l};\quad P_{\text{cr}} = \frac{cJ_{\text{fund}}}{l}. \tag{2.56}$$

Noveno caso: barra con voladizo (fig. 49). Parámetros iniciales $y\,(0) = ?\ y'\,(0) = ?\ M\,(0) = 0,\ Q\,(0) = 0$.

Condiciones de paso del primer tramo al segundo:

$$\Delta y\,(a) = 0;\ \Delta y'\,(a) = 0,\ \Delta M\,(a) = 0,\ \Delta Q\,(a) = A.$$

Según la condición de equilibrio $Al - Py\,(0) = 0$; de donde $A = Py\,(0) : l$. Ecuaciones de la línea elástica por tramos:

$$y_1\,(z) = y\,(0) + y'\,(0)\frac{\operatorname{sen} az}{\alpha}\quad [\text{véase } (2.35)];$$

$$y_2\,(z) = y_1\,(z) - \frac{Py\,(0)}{l\alpha^3 EJ}\,[\alpha\,(z-a) - \operatorname{sen}\alpha\,(z-a)]\ [\text{véase } (2.39)].$$

Condiciones de frontera en los apoyos:

$$y_1\,(a) = y\,(0) + y'\,(0)\operatorname{sen}\alpha a : \alpha = 0;$$

$$y_2\,(a+l) = y\,(0) + y'\,(0)\operatorname{sen}\alpha\,(a+l) : \alpha - \frac{y\,(0)}{\alpha l}\,(\alpha l - \operatorname{sen}\alpha l) = 0.$$

Después de desarrollar el determinante de estas ecuaciones, igualado a cero, obtenemos la ecuación de estabilidad:

$$\operatorname{sen} \alpha (l + \alpha) = \operatorname{sen} \alpha a \operatorname{sen} \alpha l : \alpha l.$$

Ella, expresada de otro modo, será:

$$\alpha l (\operatorname{tg} \alpha l + \operatorname{tg} \alpha a) = \operatorname{tg} \alpha l \operatorname{tg} \alpha a. \qquad (2.57)$$

De aquí se pueden obtener las expresiones para el primer y segundo casos. Precisamente, si hacemos $a = 0$, obtenemos sen $\alpha l = 0$,

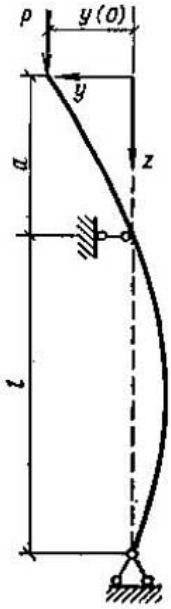


Fig. 49

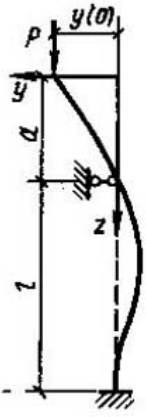


Fig. 50

lo que corresponde al primer caso. Si $l = da$, entonces podemos escribir:

$$\operatorname{sen} \alpha (a + da) = \operatorname{sen} \alpha a \frac{\operatorname{sen} \alpha\, da}{\alpha\, da}.$$

De aquí sen α $(a + da)$ — sen $\alpha a = d$ (sen αa) $= 0$. En consecuencia, cos $\alpha a = 0$, $\alpha a = \pi/2$ y $P_{cr} = \pi^2 EJ/4l^2$, lo que corresponde al segundo caso.

Si el largo del voladizo $a = l/2$, entonces, según (2.57), tenemos:

$$\alpha l \left(\operatorname{tg} \alpha l + \operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2} \right) = tg\, \alpha l \operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2}.$$

La elección determina $\alpha l = 1{,}802$ y $P_{cr} = 1{,}802^2 \frac{EJ}{l^2} =$

$= 3{,}247 \frac{EJ}{l^2}$, que resulta sensiblemente menor que $P_{cr} = \pi^2 EJ/l^2$.

Décimo caso: barra con voladizo y con un empotramiento (fig. 50). Parámetros iniciales: $y\,(0) = ?$ $y'\,(0) = ?$ $M\,(0) = 0$, $Q\,(0) = 0$.

Condiciones de paso para $z = a$:

$$\Delta y\,(a) = 0,\ \Delta y'\,(a) = 0,\ \Delta M\,(a) = 0,\ \Delta Q\,(a) = A.$$

En el primer tramo:

$$y_1(z) = y(0) + y'(0)\frac{\operatorname{sen}\alpha z}{\alpha}.$$

En el segundo tramo:

$$y_2(z) = y(0) + \frac{y'(0)\operatorname{sen}\alpha z}{\alpha} - \frac{A}{\alpha^3 EJ}[\alpha(z-a) - \operatorname{sen}\alpha(z-\alpha)];$$

$$y_2'(z) = y'(0)\cos\alpha z - \frac{A}{\alpha^2 EJ}[1 - \cos\alpha(z-a)].$$

Condiciones de frontera:

$$y_1(a) = y(0) + y'(0)\frac{\operatorname{sen}\alpha a}{a} = 0; \qquad (a)$$

$$y_2(a+l) = y(0) + y'(0)\frac{\operatorname{sen}\alpha(a+1)}{\alpha} - \frac{A}{\alpha^3 EJ}(\alpha l - \operatorname{sen}\alpha l) = 0; \qquad (b)$$

$$y_2'(a+l) = y'(0)\cos\alpha(a+l) - \frac{A}{\alpha^2 EJ}(1 - \cos\alpha l) = 0. \qquad (c)$$

Ecuación de estabilidad

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\operatorname{sen}\alpha a}{\alpha} & 0 \\ 1 & \frac{\operatorname{sen}\alpha(a+l)}{\alpha} & -\frac{\alpha l - \operatorname{sen}\alpha l}{\alpha^3 EJ} \\ 0 & \cos\alpha(l+\alpha) & -\frac{1-\cos\alpha l}{\alpha^2 EJ} \end{vmatrix} = 0.$$

En forma desarrollada

$$-\operatorname{sen}\alpha(l+\alpha) + \alpha l\cos\alpha(l+a) + (2-\cos\alpha l)\operatorname{sen}\alpha a = 0. \quad (2.58)$$

Si $a \to 0$, entonces $-\operatorname{sen}\alpha l + \alpha l\cos\alpha l = 0$, lo que lleva al cuarto caso. Cuando $l \to 0$ primero hacemos $l = da$. Según la ecuación (2.58)

$$-\operatorname{sen}\alpha(a+da) + \alpha\,da\cos\alpha(a+da) + (2-\cos\alpha\,da)\operatorname{sen}\alpha a = 0.$$

La reescribimos así:

$$-[\operatorname{sen}\alpha(a+da) - \operatorname{sen}\alpha a] + \alpha\,da\cos\alpha(a+da) - (1-\cos\alpha\,da)\operatorname{sen}\alpha a = 0.$$

o bien, $d(\operatorname{sen}\alpha a) = \cos\alpha a = 0$; $\alpha a = \pi/2$ (véase el segundo caso).

Si $a = l/2$, entonces $\alpha l = \pi$ y $P_{cr} = \pi^2 EJ/l^2$.

Undécimo caso: barra con charnela en la luz y con empotramiento de uno de los apoyos (fig. 51, *a*). El sistema después de la pérdida de la estabilidad se muestra en la fig. 51, *b*.

Parámetros iniciales: $y(0) = 0$, $y'(0) = ?$ $M(0) = 0$, $Q(0) = ?$

Las condiciones de paso cuando $z = a$ serán: $\Delta y\,(a) = 0$, $\Delta y'\,(a) = ?$ $\Delta M\,(a) = 0$, $\Delta Q\,(a) = 0$.

Primer tramo. $0 \leqslant z \leqslant a$. Según la ecuación (2.35)

$$y_1(z) = \frac{y'(0)}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha z - \frac{Q(0)}{\alpha^3 EJ} (\alpha z - \operatorname{sen} \alpha z).$$

Expresemos la incógnita $Q(0)$ por medio de otra incógnita $y(a)$, para lo cual componemos la suma de los momentos de las fuerzas

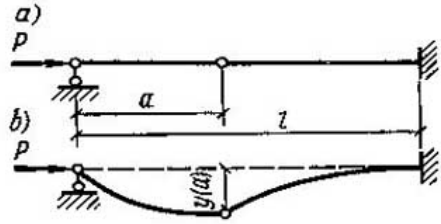


Fig. 51

izquierdas con respecto a la charnela:

$$Py(a) + Q(0)a = 0.$$

De aquí $Q(0) = -Py(a) : a$.
Ahora

$$y_1(z) = \frac{y'(0)}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha z + \frac{y(a)}{\alpha a} (\alpha z - \operatorname{sen} \alpha z). \qquad \text{(a)}$$

Segundo tramo: $a \leqslant z \leqslant l$. Según las expresiones (2.39) — (2.42) tenemos:

$$y_2(z) = \frac{y'(0)}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha z + \frac{y(\alpha)}{\alpha a} (\alpha z - \operatorname{sen} \alpha z) + \frac{\Delta y'(a)}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha (z - a); \qquad \text{(b)}$$

$$y_2'(z) = y'(0) \cos \alpha z + \frac{y(a)}{a} (1 - \cos \alpha z) + \Delta y'(a) \cos \alpha (z - a). \qquad \text{(c)}$$

Según la ecuación (a),

$$y(a) = \frac{y'(0)}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha a + \frac{y(a)}{\alpha a} (\alpha a - \operatorname{sen} \alpha a).$$

De aquí

$$y'(0) \operatorname{sen} \alpha a - y(a) \frac{\operatorname{sen} \alpha a}{a} = 0. \qquad \text{(d)}$$

No habremos de reducir (d), puesto que podemos perder la raíz de la ecuación de estabilidad, cuando $\operatorname{sen} \alpha a = 0$.

Por las ecuaciones (b) y (c) formulamos las condiciones de frontera en el extremo derecho de la barra, cuando $z = l$:

$$y(l) = \frac{y'(0)}{a} \operatorname{sen} \alpha l + \frac{y(a)}{\alpha a} (\alpha l - \operatorname{sen} \alpha l) + \frac{\Delta y'(a)}{a} \operatorname{sen} \alpha (l - a) = 0; \qquad \text{(e)}$$

$$y'(l) = y'(0) \cos \alpha l + \frac{y(a)}{a} (1 - \cos \alpha l) + \Delta y'(a) \cos \alpha (l - a) = 0. \qquad \text{(f)}$$

Las ecuaciones (d), (e) y (f) son homogéneas; obtendremos la ecuación de estabilidad igualando a cero el determinante de las mismas:

$$D = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \alpha a & -\frac{\operatorname{sen} \alpha a}{a} & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha l & \frac{1}{a}(\alpha l - \operatorname{sen} \alpha l) & \cos \alpha (l-a) \\ \cos \alpha l & \frac{1}{a}(1 - \cos \alpha l) & \cos \alpha (l-a) \end{vmatrix} =$$

$$= \operatorname{sen} \alpha a \, [\alpha l \cos \alpha (l-a) - \operatorname{sen} \alpha (l-a)] = 0. \qquad (2.59)$$

Si $\operatorname{sen} \alpha a = 0$, entonces la menor raíz es $\alpha a = \pi$ y $P_{cr,1} = \pi^2 EJ/a^2$ (fig. 52, *a*).

Si $\alpha l \cos \alpha (l-a) - \operatorname{sen} \alpha (l-a) = 0$, entonces

$$\operatorname{tg} \alpha (l-a) = \alpha l. \qquad (2.60)$$

De esta ecuación se determina $P_{cr,2}$ (fig. 52, *b*).

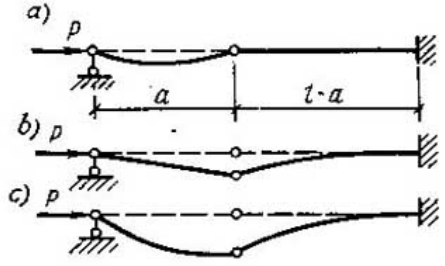


Fig. 52

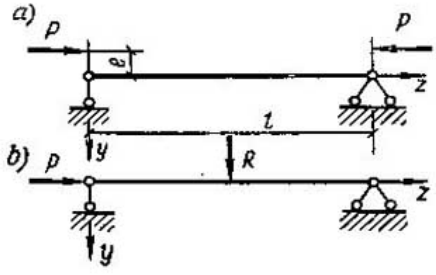


Fig. 53

Si $a \to 0$, entonces la ecuación (2.59) será $\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l$ (véase el cuarto caso); cuando $a \to l$, la ecuación (2.59) da $\operatorname{sen} \alpha l = 0$ (véase el primer caso).

Si $P = P_{cr,1} < P_{cr,2}$, entonces la forma de pérdida de la estabilidad corresponde a la fig. 52, *a*.

Si $P = P_{cr,2} < P_{cr,1}$, la forma de la pérdida de estabilidad es según la fig. 52, *b*.

Si $P = P_{cr,1} \geqslant P_{cr,2}$, la forma de pérdida de la estabilidad tiene lugar del modo indicado en la fig. 52, *c*.

Cuando $a = l/2$, obtenemos $P_{cr,1} = 4\pi^2 EJ/l^2$.

Conforme a (2.60) obtenemos:

$$\operatorname{tg} \alpha \frac{l}{2} = \alpha l; \quad \alpha l = 2{,}33; \quad P_{cr,2} = 5{,}429 \frac{EJ}{l^2}; \quad P_{cr,2} < P_{cr,1}.$$

§ 7. CÁLCULO DE LAS BARRAS COMPRIMIDAS Y FLEXIONADAS EN ESTADO DE DEFORMACIÓN. Se analizan las barras comprimidas con excentricidad y las comprimidas con carga transversal (fig. 53), para distintas fijaciones de los extremos.

El cálculo de semejantes barras en estado de deformación es sumamente cercano a la investigación de la flexión longitudinal de la barra, o por cuanto ella también se realiza en estado de deformación. La diferencia sólo consiste en que, para la determinación de los parámetros iniciales de las ecuaciones generales (2.35)—(2.38) de una barra con condiciones de frontera concretas, las ecuaciones algebraicas durante la investigación de la estabilidad (de la flexión longitudinal) resultan *homogéneas*, mientras que para la flexión longitudinal-transversal ellas son *no homogéneas*. Además, la parte común de las ecuaciones, que contiene las incógnitas, será en ellas *igual*.

El estado crítico de una barra recta corresponde al determinante de las ecuaciones homogéneas, igualado a cero.

Este mismo determinante servirá para hallar las constantes de integración o los parámetros iniciales de las ecuaciones no homogéneas, el cual según las reglas de cálculo de las incógnitas por medio de determinantes se encontrará en el denominador de las incógnitas.

Mientras el determinante es distinto de cero, las constantes de integración se calculan unívocamente. Cuando este determinante durante el estado crítico de la barra se anula, las incógnitas calculadas (y luego, otras magnitudes: flexiones, momentos de flexión, etc.) habitualmente (¡pero no siempre!) se vuelven infinitas. El paso de las magnitudes al infinito resultó ser el indicio formal (a veces inseguro), que encontramos en la literatura especializada, del estado crítico de una barra recta para cualesquiera valores tan pequeños como se desee, pero finitos de los términos independientes de las ecuaciones no homogéneas. La inseguridad de este indicio consiste en que al determinar las incógnitas, además de una respuesta igual a infinito, puede encontrarse una respuesta en forma de indeterminación (0/0), que atestigua acerca del desdoblamiento de las formas de equilibrio, es decir, acerca de la pérdida de la estabilidad, por eso, el único indicio fiable del estado crítico de la barra lo constituye el determinante de las ecuaciones homogéneas, que se convierte en cero.

Veamos algunos ejemplos:

1. Barra comprimida con excentricidad (fig. 53,*a*). La ecuación diferencial (2.32) es:

$$y'' + \alpha^2 y = -\alpha^2 e; \qquad (2.61)$$
$$\alpha^2 = P/EJ.$$

Su integral

$$y(z) = A \operatorname{sen} \alpha z + B \cos \alpha z - e. \qquad (2.62)$$

Las condiciones de frontera son:

$$y(0) = 0 + B - e = 0;$$
$$y(l) = A \operatorname{sen} \alpha l + B \cos \alpha l - e = 0.$$

El determinante general resulta

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \operatorname{sen} \alpha l & \cos \alpha l \end{vmatrix} = -\operatorname{sen} \alpha l, \qquad (2.63)$$

respectivamente,

$$A = \begin{vmatrix} e & 1 \\ e & \cos \alpha l \end{vmatrix} : (-\operatorname{sen} \alpha l) = \frac{-e(\cos \alpha l - 1)}{\operatorname{sen} \alpha l} = e \operatorname{tg} \alpha \frac{l}{2};$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 & e \\ \operatorname{sen} \alpha l & e \end{vmatrix} : (-\operatorname{sen} \alpha l) = e.$$

Ahora la ecuación (2.62) será:

$$y(z) = e\left(\operatorname{tg} \alpha \frac{l}{2} \operatorname{sen} \alpha z + \cos \alpha z - 1\right). \tag{2.64}$$

Por ella obtenemos:

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = e\left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha l}{2}} - 1\right); \tag{2.65}$$

$$y'(0) = \alpha e \operatorname{tg} \alpha \frac{l}{2}; \tag{2.66}$$

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = Pe : \cos \frac{\alpha l}{2}. \tag{2.67}$$

La representación gráfica de la flexión $y\,(l/2)$ según (2.65), para distintas excentricidades, se muestra en la fig. 54. De ella se puede establecer lo siguiente:

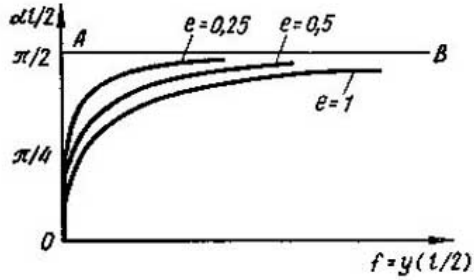


Fig. 54

1. Todas las curvas de las flexiones $y\,(l/2)$ para $\alpha l \to \pi$, es decir, cuando $D \to 0$ y cuando $P \to P_{cr} = \pi^2 EJ/l^2$, independientemente de la excentricidad e, comienzan a crecer con rapidez para pequeños incrementos de la carga y tienden luego a lo infinito.

2. Cuanto menor es la excentricidad e, tanto más y más cerca la curva raya con las rectas OA y AB, y en el límite, cuando $e \to 0$, se vuelve asintótica a ellas.

3. Para excentricidades e muy pequeñas, la fuerza P, con la cual sucederá un crecimiento sumamente rápido de las pequeñas flexiones que se tenían al principio, es muy cercana a la fuerza P_{cr}, con la que la flexión teóricamente tiende a lo infinito. Gráficos cualita-

tivamente iguales tendremos para las otras magnitudes, como, por ejemplo, para el momento de flexión (2.67) en la mitad de la barra y el ángulo de giro en el apoyo (2.66). Obtendremos resultados análogos para otros casos de flexión longitudinal-transversal.

2. Barra comprimida y flexionada con carga transversal R en su punto medio (véase la fig. 53,*b*). Para ella obtenemos:

$$y\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{R}{2\alpha^3 EJ}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2}-\frac{\alpha l}{2}\right); \tag{2.68}$$

$$y'(0)=\frac{R}{2\alpha^2 EJ}\,\frac{1-\cos\frac{\alpha l}{2}}{\cos\frac{\alpha l}{2}}; \tag{2.69}$$

$$M\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{R}{2\alpha}\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2}. \tag{2.70}$$

Y aquí, por más pequeña que sea la fuerza R, para $\alpha\, l/2 \to \pi/2$ todas las magnitudes se vuelven infinitas.

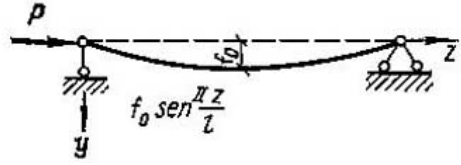


Fig. 55

3. Barra comprimida y flexionada con flexión inicial $y_0(z) = f_0 \times \operatorname{sen}\frac{\pi z}{l}$ (fig. 55). La ecuación diferencial es

$$y_1'' + \alpha^2 y_1 = -\frac{P f_0 \operatorname{sen}\frac{\pi z}{l}}{EJ}.$$

Su solución es:

$$y_1(z) = A\operatorname{sen}\alpha z + B\cos\alpha z + f_0 \operatorname{sen}\frac{\pi z}{l} : \left(\frac{\pi^2 EJ}{l^2 P} - 1\right).$$

Condiciones de frontera:
para $z = 0$, $y_1 = 0$, lo que da $B = 0$;
para $z = l$, $y_1 = 0$, lo que da $A = 0$.
Por consiguiente,

$$y_1 = f_0 \operatorname{sen}\frac{\pi z}{l} : \left(\frac{\pi^2 EJ}{l^2 P} - 1\right).$$

Para $z = l/2$

$$y_1\left(\frac{l}{2}\right) = f_0 : \left(\frac{\pi^2 EJ}{l^2 P} - 1\right). \tag{2.71}$$

Y aquí, cuando $P \to \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$, $y_2\left(\frac{l}{2}\right) \to \infty$.

De lo expresado se deduce la posibilidad de determinación de la fuerza crítica de la barra mediante su cálculo en estado de deformación. Para esto hay que aplicarle a la barra cualquier carga complementaria transversal o representar a la barra con una flexión arbitraria inicial y llevar a cabo su cálculo «deformado». Se puede considerar convencionalmente como fuerza crítica P_{cr} aquella, para la cual se anula el determinante general de las ecuaciones para el cálculo de las constantes arbitrarias o de los parámetros iniciales, compuestos

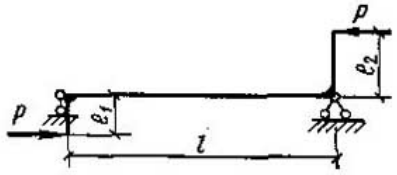


Fig. 56

según las condiciones de fijación de los extremos de la barra. Habitualmente (¡pero no siempre!) con esta fuerza y una carga transversal tan pequeña como se quiera o una flexión inicial tan pequeña como se desee de la barra, cualquier desplazamiento o momento de flexión en un corte de la barra tiende a lo infinito. Esto de ningún modo significa que la fuerza crítica se determina con un valor infinito de las magnitudes indicades, el que, por supuesto, es imposible, sino que sólo se determina una fuerza P, cercana a la P_{cr}, con la cual la curva de crecimiento de las magnitudes indicadas degenera en el límite en las dos rectas antes examinadas.

Sin embargo, cabe observar que a veces, para ciertas cargas transversales, las magnitudes (desplazamientos, momentos de flexión, etc.) tienden a lo infinito no para la primera (menor) fuerza crítica, y por eso el segundo indicio de estado crítico puede indicar cualquier fuerza critica superior. Mostremos esto en un ejemplo de flexión longitudinal de una barra con excentricidades iniciales heterovalentes (fig. 56). Para ello tenemos

$$y'(0) = \frac{\alpha (e_2 + e_1 \cos \alpha l)}{\operatorname{sen} \alpha l} - \frac{e_1 + e_2}{l}. \qquad (2.72)$$

Mientras $e_1 \neq e_2$, al igual que antes, tenemos: cuando $\alpha l \to \pi$, $P \to P_{cr} = \pi^2 EJ/l^2$; $y'(0) \to \infty$. Pero si $e_1 = e_2$, entonces,

$$y'(0) = \alpha e \frac{1 + \cos \alpha l}{\operatorname{sen} \alpha l} - \frac{2e}{l}. \qquad (2.73)$$

Aquí, cuando $\alpha l \to \pi$ el primer sumando de la ecuación (2.73) da una indeterminación, y al despejarla descubrimos que $y'(0)$ cuando $P \to P_{cr} = \pi^2 EJ/l^2$ ya no tiende como antes a infinito. Esta tendencia ahora se manifiesta cuando $\alpha l \to 2\pi$, es decir, para $P \to 4\pi^2 EJ/l^2$ es la segunda fuerza crítica. Lo expuesto fue la conse-

cuencia de que, para excentricidades heterovalentes iguales, la línea elástica de la flexión longitudinal—transversal tiene un punto nodal (nulo) que coincide con el punto nodal de la segunda forma de pérdida de estabilidad de tal barra. Llegaremos a resultados análogos, si damos cualquier carga transversal antisimétrica, que determine una línea elástica unívoca en una mitad de la barra con el punto nulo en la mitad de ésta, o una imperfección inicial en forma de

$$y_0(z) = f \operatorname{sen} \frac{2\pi z}{l}.$$

Por consiguiente, la carga transversal agregada o las imperfecciones iniciales, ante todo, no deben determinar líneas elásticas que coincidan mediante sus puntos nulos con los nudos de las formas superiores de pérdida de estabilidad. Ellas deberán dar líneas elásticas en rasgos generales, «parecidas» a la primera forma de pérdida de estabilidad de la barra y tener con ellas un mismo número de puntos de inflexión. Pero esto no siempre es evidente, lo que atestigua acerca de la debilidad de este método. Esta misma observación, en mayor medida aún se refiere a los sistemas de barras, para los cuales este método de determinación de las fuerzas críticas es aplicable en principio.

Apuntemos algunas cargas transversales para las barras y especialmente para los sistemas que pueden llevar a resultados dudosos:

1) cargas simétricas y antisimétricas en los sistemas simétricos;

2) cargas, para las cuales todos o una parte de los ángulos de giro del sistema y sus traslados se anulan.

En los casos dudosos lo mejor es efectuar los cálculos para dos cargas distintas.

El cálculo de las barras y de otros sistemas en estado de deformación tiene una significación independiente e incluso mayor que la determinación de las fuerzas críticas. Surge la cuestión acerca de si es factible y conveniente hablar aquí sobre el cálculo de la estabilidad y qué entender por fuerza crítica.

Por cuanto existe equilibrio entre las fuerzas externas e internas en el estado de deformación, entonces, naturalmente, se puede hablar de su estabilidad. Sin embargo, si la flexión tiene lugar por una curva «parecida» a la primera forma de pérdida de la estabilidad de la barra, y si el cálculo de solidez se ha efectuado en el estado elástico a la carga de cálculo (la normativa, multiplicada por el coeficiente de sobrecarga $n > 1$), entonces, no es conveniente hablar acerca de la estabilidad en el plano de flexión. La cuestión es que en semejantes casos la flexión longitudinal-transversal de la barra que comienza por una cierta línea elástica, «parecida» a la primera forma de pérdida de elasticidad, con el aumento de la carga sólo habrá de crecer cuantitativamente, por cuanto no existe fundamento para el cambio cualitativo de la línea elástica. Por eso, si la tensión máxima extrema en la fase elástica satisface la condición de solidez, entonces en estos

casos habitualmente será satisfecha la estabilidad de la barra en el plano de flexión.

Ante un aumento ulterior de la carga por encima de la de cálculo, se puede hablar de una formación de articulaciones plásticas y de la pérdida de la capacidad de resistencia de la barra, es decir, acerca de la fuerza crítica de segundo género.

Observemos que la fuerza crítica de segundo género para la barra, con frecuencia resulta menor (a veces, significativamente menor) que la fuerza crítica de primer género, calculada según el módulo inicial de elasticidad. Todo depende de la correlación entre las cargas longitudinal y transversal. Por eso, la fuerza crítica de una barra recta, calculada para la fase elástica según el módulo inicial de elasticidad, se puede considerar como el límite superior y, habitualmente, inalcanzable del valor de las fuerzas longitudinales con la presencia de cargas longitudinales en los cálculos de barras en estado de deformación.

§ 8. ESTABILIDAD DE LAS BARRAS BAJO LA ACCIÓN DE LAS FUERZAS AXIALES, APLICADAS A LO LARGO DE ELLAS

SOLUCIÓN EXACTA

A la solución exacta por el método estático la denominaremos aquí solución basada en la integración de la ecuación diferencial aproximada (lineal) (2.23) de equilibrio de la barra en estado desviado, después de la pérdida de la estabilidad.

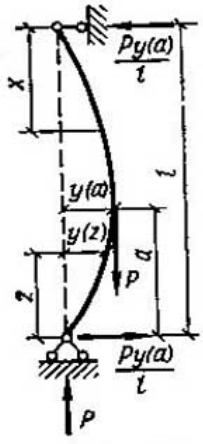


Fig. 57

Examinemos esta solución para algunos casos.

Barra sobre dos apoyos de charnela con una fuerza en la luz (fig. 57). El estado de deformación de la barra después de la pérdida de la estabilidad se muestra en la fig. 57, donde también se representan las reacciones de los apoyos. En la barra tenemos dos tramos: desde el apoyo inferior hasta la fuerza y fuera de la fuerza. Examinemos cada uno de ellos, admitiendo distintos sistemas de coordenadas.

Primer tramo: $0 \leqslant z \leqslant a$

$$M(z) = Py_1(z) - \frac{P}{l} y(a)\, z.$$

La ecuación diferencial es $y_1'' + \alpha^2 y_1 = \alpha^2 \frac{y(a)}{l} z$, donde $\alpha^2 = P/EJ$. Su integral

$$y_1(z) = A \operatorname{sen} \alpha z + B \cos \alpha z + \frac{y(a)}{l} z.$$

Según la condición de frontera, en el apoyo izquierdo (inferior), donde $y = 0$, obtenemos $B = 0$. Entonces:

$$y_1(z) = A \operatorname{sen} \alpha z + \frac{y(a)}{l} z;$$

$$y_1'(z) = \alpha A \cos \alpha z + y(a) : l.$$

Cuando $z = a$:

$$y(a) = A \operatorname{sen} \alpha a + y(a) \frac{a}{l}; \tag{2.74}$$

$$y'(a) = \alpha A \cos \alpha a + y(a) : l. \tag{2.75}$$

De (2.74) tenemos:

$$y(a) = A \operatorname{sen} \alpha a : \left(1 - \frac{a}{l}\right). \tag{2.76}$$

Entonces

$$y'(a) = \alpha A \cos \alpha a + \frac{A \operatorname{sen} \alpha a}{l - a}. \tag{2.77}$$

Segundo tramo: $0 \leqslant x \leqslant b = l - a$.

$$M(x) = \frac{P y(a) x}{l}.$$

La ecuación diferencial es:

$$y_2''(x) = -\alpha^2 \frac{y(a)}{l} x.$$

Su integral

$$y_2'(x) = -\frac{\alpha^2 y(a)}{l} \frac{x^2}{2} + C.$$

Luego

$$y_2(x) = -\frac{\alpha^2 y(a)}{l} \frac{x^3}{6} + Cx + D.$$

Según la condición de frontera en el apoyo derecho (superior) tendremos $D = 0$, entonces:

$$y_2(x) = -\frac{\alpha^2 y(a)}{l} \frac{x^3}{6} + Cx,$$

$$y_2'(x) = -\frac{\alpha^2 y(a)}{l} \frac{x^2}{2} + C.$$

Para $x = b = l - a$ tenemos:

$$y(b) = y(a) = -\frac{\alpha^2 y(a)}{l}\,\frac{b^3}{6} + Cb; \tag{2.78}$$

$$y'(b) = -\frac{\alpha^2 y(a)}{l}\,\frac{b^2}{2} + C. \tag{2.79}$$

De (2.78) obtenemos:

$$y(a) = C(l-a) : \left[1 + \frac{\alpha^2}{l}\,\frac{(l-a)^2}{6}\right]; \tag{2.80}$$

$$y'(l-a) = C - \frac{\alpha^2}{2l}\,\frac{C(l-a)^3}{1 + \frac{\alpha^2}{l}\,\frac{(l-a)^3}{6}}. \tag{2.81}$$

Las condiciones de conjugación en la frontera de dos tramos serán:

$$y(a) = y(b); \quad y'(a) = -y'(l-a).$$

A partir de estas condiciones, teniendo en cuenta (2.76), (2.77) y (2.80), (2.81), obtendremos el sistema de ecuaciones:

$$A \operatorname{sen} \alpha a \left[1 + \frac{\alpha^2}{l}\,\frac{(l-a)^3}{6}\right] - \frac{C(l-a)^2}{l} = 0; \tag{2.82}$$

$$A\left[\frac{\operatorname{sen} \alpha a}{l} + \alpha\,\frac{l-a}{l}\cos \alpha a\right] +$$

$$+ C\,\frac{l-a}{l}\left[1 - \frac{\alpha^2}{2l}\,\frac{(l-a)^3}{1 + \frac{\alpha^2}{l}\,\frac{(l-a)^3}{6}}\right] = 0. \tag{2.83}$$

En estas ecuaciones las incógnitas A y C son las constantes arbitrarias de integración. Las ecuaciones son homogéneas, igualamos a cero el determinante de ellas, y después del desarrollo del mismo y de las simplificaciones, obtenemos la ecuación de estabilidad

$$\operatorname{tg} \alpha a = \lambda \left(\frac{l-a}{l}\right)^2 : \left[\frac{\lambda^2}{3}\left(\frac{l-a}{l}\right)^3 - 1 - \frac{l-a}{l}\right], \tag{2.84}$$

donde $\lambda = \alpha l$.

Si $a = l/2$, entonces la ecuación (2.84) será

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} = \frac{6\lambda}{\lambda^2 - 36}.$$

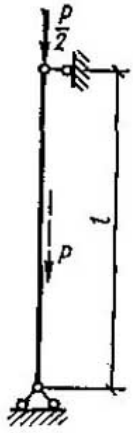


Fig. 58

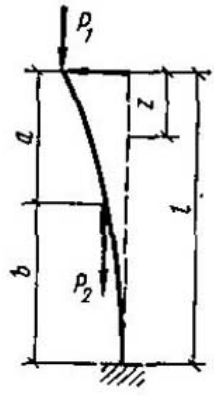


Fig. 59

Resolviéndola selectivamente, obtenemos $\lambda = \alpha l = 4{,}32$. Con esto

$$P_{cr} = \frac{18{,}66\ EJ}{l^2}.$$

Prestemos atención al hecho de que, si P en este caso se traslada a la parte superior del pilar con un coeficiente de corrección igual a la mitad (fig. 58), e igualándola luego a la fuerza de Euler, obtendremos $P_{cr} = 19{,}74\ EJ/l^2$, valor cercano a la solución exacta.

Pilar empotrado en el extremo inferior, con dos fuerzas concentradas (fig. 59). Efectuamos la solución por el método de los parámetros iniciales.

Primer tramo: $0 \leqslant z \leqslant a$. Para él

$$\alpha_1^2 = P_1 : EJ. \tag{2.85}$$

Según las expresiones (2.35) — (2.38) tenemos:

$$\left.\begin{aligned} &y_1(z) = y(0) + \frac{y'(0)}{\alpha_1}\operatorname{sen}\alpha_1 z;\\ &y_1'(z) = y'(0)\cos\alpha_1 z;\\ &M_1(z) = -EJy'' = P_1\frac{y'(0)}{\alpha_1}\operatorname{sen}\alpha_1 z = P_1[y_1(z) - y(0)];\\ &Q_1(z) = M_1'(z) - P_1 y_1'(z) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.86}$$

Segundo tramo: $0 \leqslant z \leqslant b$. Para él

$$\alpha_2^2 = \frac{P_1 + P_2}{EJ}. \tag{2.87}$$

Trasladamos el origen de las coordenadas al comienzo del segundo tramo y, según la expresión (2.86), hallamos para este tramo los

parámetros iniciales, haciendo $z = a$

$$\left.\begin{aligned} y_2(0) &= y_1(a) = y(0) + \frac{y'(0)}{\alpha_1}\operatorname{sen}\alpha_1 a; \\ y_2'(0) &= y_1'(a) = y'(0)\cos\alpha_1 a; \\ M_2(0) &= M_1(a) = P_1\frac{y'(0)}{\alpha_1}\operatorname{sen}\alpha_1 a; \\ Q_2(0) &= Q_1(a) = 0; \end{aligned}\right\} \tag{2.88}$$

$$y_2(z) = \left[y(0) + \frac{y'(0)}{\alpha_1}\operatorname{sen}\alpha_1 a\right] + \frac{y'(0)\cos\alpha_1 a}{\alpha_2}\operatorname{sen}\alpha_2 z - \\ - \frac{P_1}{P_1+P_2}\frac{y'(0)}{\alpha_1}\operatorname{sen}\alpha_1 a\,(1-\cos\alpha_2 z); \tag{2.89}$$

$$y_2'(z) = y'(0)\cos\alpha_1 a\cos\alpha_2 z - \frac{P_1}{P_1+P_2}\alpha_2\frac{y'(0)}{\alpha_1}\operatorname{sen}\alpha_1 a\operatorname{sen}\alpha_2 z. \tag{2.90}$$

Formulamos las condiciones de frontera en el extremo inferior para $z = b = l - a$:

$$y_2(b) = \left[y(0) + \frac{y'(0)}{\alpha_1}\operatorname{sen}\alpha_1 a\right] + \\ + \frac{y'(0)\cos\alpha_1 a}{\alpha_2}\operatorname{sen}\alpha_2 b - \frac{P_1}{P_1+P_2}\frac{y'(0)\operatorname{sen}\alpha_1 a}{\alpha_1}(1-\cos\alpha_2 b) = 0; \tag{2.91}$$

$$y_2'(b) = y'(0)\cos\alpha_1 a\cos\alpha_2 b - \frac{P_1\alpha_2}{P_1+P_2}\frac{y'(0)}{\alpha_1}\operatorname{sen}\alpha_1 a\operatorname{sen}\alpha_2 b = 0. \tag{2.92}$$

Las ecuaciones son homogéneas. Igualamos el determinante de ellas

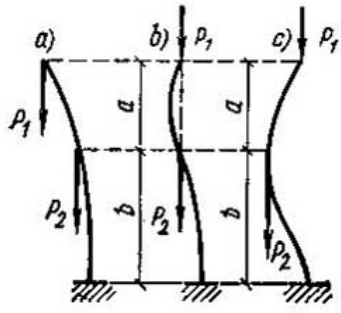


Fig. 60

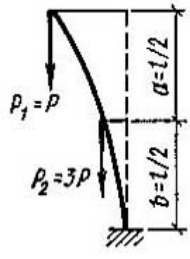


Fig. 61

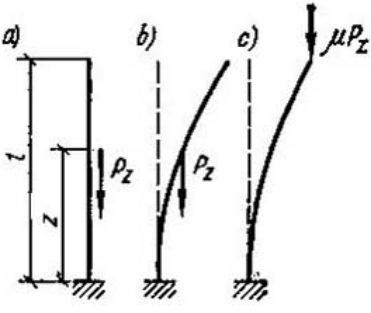


Fig. 62

a cero. Después de desarrollarlo obtenemos la ecuación de estabilidad:

$$\cos\alpha_1 a\cos\alpha_2 b\left[1 - \frac{P_1}{P_1+P_2}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\operatorname{tg}\alpha_1 a\operatorname{tg}\alpha_2 b\right] = 0. \tag{2.93}$$

De ella tenemos:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 a\operatorname{tg}\alpha_2 b = \frac{P_1+P_2}{P_1}\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \tag{2.94}$$

la pérdida de la estabilidad según la fig. 60, *a*;

$\cos \alpha_2 b = 0$, la pérdida de la estabilidad según la fig. 60,*b*; (2.95)
$\cos \alpha_1 a = 0$, la pérdida de la estabilidad, según la fig. 60,*c*. (2.96)

En adelante sólo consideraremos (2.94), puesto que la fuerza crítica según esta ecuación será la menor.

Si $a = b = l/2$, entonces (2.94) adopta la forma:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \frac{l}{2} \operatorname{tg} \alpha_2 \frac{l}{2} = \frac{P_1 + P_2}{P_1} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}. \qquad (2.97)$$

Para $P_1 = P$ y $P_2 = 3P$, cuando $\alpha_2 = 2\alpha_1$ (fig. 61), esta ecuación será:

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda_1}{2} \operatorname{tg} \lambda_1 = 2, \text{ donde } \lambda_1 = \alpha_1 l.$$

Ella se reduce fácilmente a la forma:

$$4 \operatorname{tg}^2 \frac{\lambda_1}{2} = 2; \ \operatorname{tg} \frac{\lambda_1}{2} = 0{,}707; \ \frac{\lambda_1}{2} = 0{,}6155.$$

De aquí obtenemos $\alpha_1 l = 1{,}231$; entonces, $P_{cr} = 1{,}231^2 \frac{EJ}{l^2} = 1{,}515 \frac{EJ}{l^2}$.

Convenzámonos de que las condiciones (2.95) y (2.96) determinan fuerzas críticas mayores que la obtenida:

$$\text{si } \cos \alpha_2 \frac{l}{2} = 0, \text{ entonces } \alpha_2 l = \pi; \ \frac{4P_{cr}}{EJ} = \frac{\pi^2}{l^2};$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2};$$

$$\text{si } \cos \alpha_1 \frac{l}{2} = 0, \text{ entonces, } \alpha_1 l = \pi; \ \frac{P_{cr}}{EJ} = \frac{\pi^2}{l^2}; \ P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

SOLUCIÓN APROXIMADA

Examinemos soluciones aproximadas, basadas en la idea del traslado de las fuerzas, aplicadas a lo largo del pilar, en su extremo.

Método de comparación de las fuerzas críticas. Supongamos un pilar, empotrado en su extremo inferior, con cierta fuerza crítica $P_{cr.z}$, aplicada a una distancia z del empotramiento (fig. 62,*a*). Por cuanto la parte superior del pilar no se halla cargada y durante la pérdida de estabilidad permanece igual (fig. 62,*b*), ella puede ser mentalmente desechada y escribir:

$$P_{cr.z} = \frac{\pi^2 EJ}{4z^2}. \qquad (2.98)$$

Trasladamos esta fuerza a la parte superior del pilar con el coeficiente de corrección $\mu(z)$ (fig. 62,*c*), considerándola como fuerza crítica para la nueva posición. Con estas condiciones:

$$\mu(z) P_{cr.z} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}. \qquad (2.99)$$

Sustituyendo el valor de (2.98) en (2.99), obtenemos:

$$\mu(z) = z^2/l^2. \qquad (2.100)$$

Si en el poste hay varias fuerzas concentradas y una carga distribuida $q(z)$, entonces, todas las fuerzas se deben trasladar a la parte superior del pilar y la suma de ellas, denominada fuerza reducida P_{red} se debe igualar a la fuerza de Euler del pilar empotrado en un extremo, es decir,

$$P_{red} = \sum P_i \mu(z_i) + \int q(z)\, dz \mu(z) = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}. \qquad (2.101)$$

Esta es la igualdad básica, a partir de la cual se determina el parámetro de la carga. Así, por ejemplo, para el poste en la fig. 61, tendremos:

$$P_{red} = P + 3P\frac{1}{4} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}.$$

De aquí $P = P_{cr} = 1{,}41\frac{EJ}{l^2}$. La solución exacta dio $P_{cr} = 1{,}515\frac{EJ}{l^2}$.

La divergencia es $[(1{,}515-1{,}41) : 1{,}515]\,100 = 6{,}9\%$.

Ejemplo 1. Determinar la carga uniforme crítica de un pilar (fig. 63). Según la fórmula (2.101), resulta

$$P_{red} = \int_0^l q\,dz\,\frac{z^2}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}.$$

De aquí $q_{cr}l = 7{,}4\,\frac{EJ}{l^2}$ $\left(\text{exactamente } 7{,}87\,\frac{EJ}{l^2}\right)$.

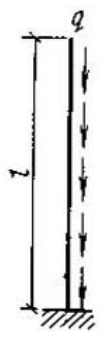


Fig. 63

Fig. 64

Fig. 65

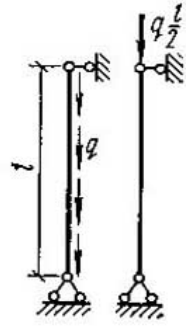


Fig. 66

Ejemplo 2. Determinar la carga crítica, distribuida en forma de triángulo (fig. 64):

$$P_{red} = \int_0^l \frac{q_{cr}}{l}\, z\,dz\,\frac{z^2}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}.$$

De aquí $\frac{ql}{2}=\frac{q_{cr}l}{2}=4{,}935\,\frac{EJ}{l^2}$ $\left(\text{exactamente, } 5{,}12\,\frac{EJ}{l^2}\right)$.

Ejemplo 3. Determinar la fuerza crítica de un pilar, teniendo en cuenta su propio peso (fig. 65):

$$P_{red}=P+\int_0^l q\,dz\,\frac{z^2}{l^2}=\frac{\pi^2EJ}{4l^2}.$$

De aquí

$$P=P_{cr}=\frac{\pi^2EJ}{4l^2}-\frac{ql}{3}. \tag{2.102}$$

El método expuesto también puede ser aplicado para los pilares con extremos articulados (fig. 66). Así, por ejemplo, al trasladar hacia arriba el propio peso del pilar, aplicado en el centro de su longitud, es necesario considerar la mitad de este peso; entonces la igualdad análoga a (2.101) será:

$$P_{red}=P+\frac{ql}{2}=\frac{\pi^2EJ}{l^2}.$$

De aquí

$$P=P_{cr}=\frac{\pi^2EJ}{l^2}-\frac{ql}{2}. \tag{2.103}$$

Método energético. En este método el coeficiente de traslado de las fuerzas μ (z) se determina por la igualdad de los trabajos de las fuerzas en el estado de desviación dado, después de que la barra ha perdido su estabilidad. La curva del estado desviado para un pilar empotrado en su extremo inferior, se da de una forma que satisfaga las condiciones de frontera:

$$y=f\left(1-\cos\frac{\pi z}{2l}\right). \tag{2.104}$$

La derivada es

$$y'=\frac{\pi}{2l}f\,\text{sen}\,\frac{\pi z}{2l}. \tag{2.105}$$

El descenso del punto del eje del pilar, que se encuentra a una distancia z, será:

$$\Delta z=\frac{1}{2}\int_0^z (y')^2\,dz=\frac{1}{2}\int_0^z \frac{\pi^2f^2}{4l^2}\,\text{sen}^2\,\frac{\pi z}{2l}\,dz=$$

$$=\frac{\pi^2f^2}{16l}\,\frac{z}{l}\left(1-\text{sen}\,\frac{\pi z}{l}:\frac{\pi z}{l}\right). \tag{2.106}$$

Respectivamente el descenso del punto superior $(z=l)$, será:

$$\Delta l=\frac{\pi^2f^2}{16l}. \tag{2.107}$$

La igualdad de los trabajos de la fuerza aplicada en presencia de la coordenada z, y de la fuerza trasladada a la parte superior

del pilar, con el coeficiente de corrección $\mu(z)$, será:

$$P\Delta z = P\mu(z)\,\Delta l_1. \tag{2.108}$$

De aquí

$$\mu(z) = \frac{\Delta z}{\Delta l} = \frac{z}{l}\left(1 - \operatorname{sen}\frac{\pi z}{l} : \frac{\pi z}{l}\right). \tag{2.109}$$

Cuando $z = 0$, $\mu(0) = 0$; para $z = l/2$, $\mu(l/2) = 0{,}182$; si $z = l$, $\mu(l) = 1$.

La igualdad básica (2.101) también se conserva para este método.

Calculamos la carga crítica para un pilar (véase la fig. 61). Según (2.101),

$$P_{red} = P + 3P0{,}182 = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}.$$

De aquí $P = P_{cr} = 1{,}596\,\frac{EJ}{l^2}$. La divergencia con el resultado exacto es $\frac{1{,}596 - 1{,}515}{1{,}515}\,100 = 5{,}4\%$.

Ejemplo 4. Determinar la carga crítica (fig. 63). Según (2.101)

$$P_{red} = q\int_0^l \frac{z}{l}\left(1 - \operatorname{sen}\frac{\pi z}{l} : \frac{\pi z}{l}\right) dz = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}.$$

De donde $ql = q_{cr}l = 8{,}13\,\frac{EJ}{l^2}$ $\left(\text{exactamente } 7{,}78\,\frac{EJ}{l^2}\right)$.

Ejemplo 5. Determinar la carga crítica (fig. 64). Según (2.101)

$$P_{red} = q\int_0^l \frac{z^2}{l^2}\left(1 - \operatorname{sen}\frac{\pi z}{l} : \frac{\pi z}{l}\right) dz = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$$

o bien,

$$ql\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\pi^2}\right) = 0{,}232\,ql = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}.$$

De aquí $q\,\frac{l}{2} = q_{cr}\,\frac{l}{2} = 5{,}32\,\frac{EJ}{l^2}$ $\left(\text{exactamente } 5{,}12\,\frac{EJ}{l^2}\right)$.

Ejemplo 6. Determinar la fuerza crítica teniendo en cuenta el propio peso (fig. 65). Según (2.101),

$$P_{red} = P + q\int_0^l \frac{z}{l}\left(1 - \operatorname{sen}\frac{\pi z}{l} : \frac{\pi z}{l}\right) dz = P + 9{,}298\,ql = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}.$$

De donde $P = P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} - 0{,}298\,ql$ [comparar con (2,102)].

§ 9. ESTABILIDAD DE LAS BARRAS SOBRE UNA BASE ELÁSTICA.

Examinemos una barra en dos apoyos articulados en

sus extremos y sobre una base elástica con dos coeficientes de lecho c_1 N/m^3 y c_2 N/m (fig. 67).

La ecuación diferencial del estado inclinado es:

$$y'' = -\frac{Py + M^*}{EJ}, \tag{2.110}$$

donde M^* es el momento de flexión debido a las fuerzas de la base elástica.

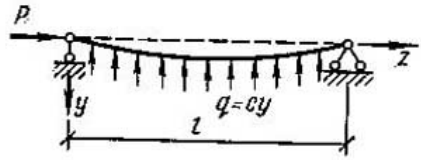


Fig. 67

Diferenciando dos veces la ecuación (2.110), obtenemos

$$y^{IV} = -\frac{Py'' + M^{*''}}{EJ}.$$

Como $M^{*''} = q = c_1 by - c_2 by''$, entonces,

$$y^{IV} + \alpha^2 y'' + \frac{c_1 b}{EJ} y = 0, \tag{2.111}$$

donde $\alpha^2 = P^* : EJ$; $P^* = P - c_2 b$; b es el ancho de la viga.

Buscaremos la solución de (2.111) en forma de

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l}. \tag{2.112}$$

Las funciones de $\operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l}$ satisfacen las condiciones de frontera de esta barra. Según (2.112) tenemos:

$$y'' = \sum_{k=1}^{\infty} -a_k \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l}; \quad y^{IV} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l}.$$

Reemplazando en (2.111), obtenemos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 - a_k \alpha^2 \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 + a_k \frac{c_1 b}{EJ}\right] \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} = 0. \tag{2.113}$$

Igualando cada sumando a cero, tendremos

$$a_k \left[\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 - \alpha^2 \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 + \frac{c_1 b}{EJ}\right] = 0$$

o bien,

$$\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 - \frac{P^*}{EJ} \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 + \frac{c_1 b}{EJ} = 0. \tag{2.114}$$

De aquí

$$P^*_{cr} = P_e\left(k^2 + \frac{\gamma}{k^2}\right), \qquad (2.115)$$

donde

$$\gamma = \frac{c_1 l^4 b}{\pi^4 EJ}\ ;\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\ P_e = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \qquad (2.116)$$

Luego hay que hallar tal valor de k, es decir, la cantidad de semiondas de la sinusoide, con la cual mediante la ecuación (2.115) obtenemos la fuerza crítica menor. Para esto suponemos temporalmente que k adopta no magnitudes discretas, sino que varía en forma continua. Entonces,

$$\frac{dP_{cr}}{dk} = P_e\left(2k - \frac{2\gamma}{k^3}\right) = 0. \qquad (2.117)$$

De aquí obtenemos $k = \sqrt[4]{\gamma}$.

Por esta fórmula, en el caso general obtendremos un número entero. Para obtener la fuerza crítica menor, se debe calcular por la fórmula (2.115) dos veces la fuerza crítica para aquellos valores de k, entre los cuales se encuentra el número determinado en base a (2.117). De estos resultados se toma el menor. Así, por ejemplo, para $\nu = 4$ según (2.117) obtenemos $k = 1{,}41$. Esto significa que la fuerza crítica, según (2.115) se debe buscar para $k = 1$ y $k = 2$, y de estos resultados tomar el menor:

$$\text{para } k = 1,\ P^*_{cr} = P_e\left(1 + \frac{4}{1}\right) = 5P_e,\ P_{cr} = 5P_e + c_2 b;$$

$$\text{para } k = 2,\ P_{cr} = P_e\left(2^2 + \frac{4}{2^2}\right) = 5P_e,\ P_{cr} = 5P_e + c_2 b.$$

A la expresión (2.114) se puede llegar de otro modo. A partir de (2.113), determinamos en forma general:

$$\alpha^2 = \frac{P^*}{EJ} = \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 + \frac{c_1 b}{EJ}a_k\right]\operatorname{sen}\frac{k\pi z}{l} :$$

$$: \sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \operatorname{sen}\frac{k\pi z}{l}. \qquad (2.118)$$

Luego formulamos la ecuación $d(\alpha^2)/da_k = 0$, que nos da (2.114). Esta misma expresión puede ser obtenida análogamente por el método energético [36], lo que resulta más complejo en el caso dado.

§ 10. INFLUENCIA DE LA FUERZA TRANSVERSAL DURANTE LA FLEXIÓN LONGITUDINAL, EN LA MAGNITUD DE LA FUERZA CRÍTICA.

Analicemos el caso básico de un pilar con dos apoyos articulados en los extremos (fig. 30).

Supongamos que la flecha durante la flexión longitudinal es

$$y = y_1 + y_2, \tag{2.119}$$

donde y_1 es la flecha provocada por la deformación de la flexión, e y_2 la flecha debida a los desplazamientos.

Respectivamente,

$$y'' = y_1'' + y_2'' = -\frac{M}{EJ} + y_2''. \tag{2.120}$$

Como es sabido, el ángulo de desplazamiento $\gamma = \eta \frac{Q}{GF}$, donde η es el coeficiente de corrección, que considera la distribución desigual de las tensiones tangentes por la sección (para el rectángulo $\eta = 1{,}2$, para las secciones de doble T $\eta \approx 2{,}5$).

Ahora podemos escribir:

$$y_2' = \gamma = \eta \frac{Q}{GF}; \quad y_2'' = \eta \frac{Q'}{GF} = \eta \frac{M''}{GF}.$$

Por cuanto $M = Py$, entonces

$$y_2'' = \eta \frac{Py''}{GF}. \tag{2.121}$$

Por consiguiente, según (2.120),

$$y'' + \alpha_1^2 y = 0, \tag{2.122}$$

donde

$$\alpha_1^2 = P : EJ \left(1 - \eta \frac{P}{GF}\right). \tag{2.123}$$

La solución de la ecuación (2.122) será

$$y = A \operatorname{sen} \alpha_1 z + B \cos \alpha_1 z.$$

Efectuando la determinación habitual de las constantes arbitrarias, tendremos:

$$B = 0; \quad \alpha_1 l = \pi; \quad P : EJ \left(1 - \eta \frac{P}{GF}\right) = (\pi^2 : l^2).$$

De aquí obtendremos:

$$P_{cr} = \frac{P_e}{1 - \eta \frac{P_e}{GF}}. \tag{2.124}$$

Para los pilares de alma llena, la fórmula (2.124) determina valores cercanos a la fuerza P_e. Así, por ejemplo, si se toma para el acero $P_e/F = 200$ MPa (aproximadamente el límite superior de σ_{cr} en la fase elástica), $\eta = 2{,}5$ para los perfiles de doble T y $G = 80\,000$ MPa, entonces en el caso más desfavorable obtenemos

$$P_{cr} = P_e : (1 + 5/800).$$

Como se ve, la corrección debida a la consideración de la fuerza transversal, incluso en este caso, es pequeña.

Si la sección del pilar es compuesta, la influencia de las fuerzas transversales es más notable. En algunos métodos de cálculo de tales pilares se toma como base la fórmula (2.124) obtenida aquí [36].

CAPÍTULO 3 * ESTABILIDAD DE LOS PILARES DE UNA LUZ DE SECCIÓN VARIABLE

§ 11. ESTABILIDAD DE LOS PILARES DE SECCIÓN ESCALONADA VARIABLE. Analicemos un pilar de sección escalonada variable sobre dos apoyos articulados en estado desviado, luego de la pérdida de la estabilidad (fig. 68) y hallemos para él la ecuación de estabilidad. Aplicamos el método de los parámetros iniciales.

Primer tramo: $0 \leqslant z \leqslant a$; $\alpha_1^2 = P_1 : EJ_1$.

Parámetros iniciales:

$$y(0) = 0; \quad y'(0) = ?; \quad M(0) = 0; \quad Q(0) = 0.$$

Según las expresiones (2.35) y (2.36) obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} y_1(z) &= y'(0)\frac{\operatorname{sen}\alpha_1 z}{\alpha_1}; \\ y_1'(z) &= y'(0)\cos\alpha_1 z; \\ M_1(z) &= EJ\alpha_1 y'(0)\operatorname{sen}\alpha_1 z = \frac{P_1}{\alpha_1}y'(0)\operatorname{sen}\alpha_1 z; \\ Q_1(z) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

Segundo tramo: $a \leqslant z \leqslant (l-a)$; $\alpha_2^2 = \frac{P_1+P_2}{EJ_2}$.

Trasladamos el origen de las coordenadas al principio del segundo tramo y, según (3.1), hallamos para este origen los parámetros iniciales cuando $z = a$:

$$y_1(a) = y_2(0) = y'(0)\frac{\operatorname{sen}\alpha_1 a}{\alpha_1};$$

$$y_1'(a) = y_2'(0) = y'(0)\cos\alpha_1 a;$$

$$M_1(a) = M_2(0) = \frac{P_1 y'(0)\operatorname{sen}\alpha_1 a}{\alpha_1};$$

$$Q_1(a) = Q_2(0) = 0.$$

Ahora, según (2.35) y (2.36) tendremos:

$$y_2(z) = y'(0)\frac{\operatorname{sen}\alpha_1 a}{\alpha_1} + y'(0)\cos\alpha_1 a\frac{\operatorname{sen}\alpha_2 z}{\alpha_2} - P_1 y'(0)\frac{\operatorname{sen}\alpha_1 a}{\alpha_1}\cdot\frac{1}{\alpha_2^2 EJ_2}(1-\cos\alpha_2 z); \qquad (3.2)$$

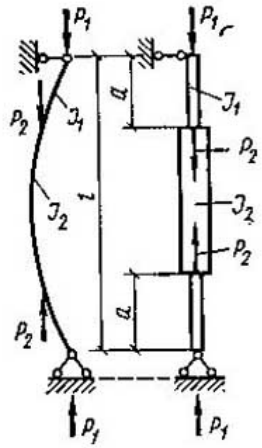


Fig. 68

$$y_2'(z) = y'(0)\cos\alpha_1 a\cos\alpha_2 z - P_1 y'(0)\frac{\operatorname{sen}\alpha_1 a}{\alpha_1}\frac{\alpha_2}{\alpha_2^2 EJ_2}\operatorname{sen}\alpha_2 z. \qquad (3.3)$$

Escribimos la condición de frontera por la simetría en el centro del pilar:

$$y_2'\left(\frac{l}{2}-a\right) = y'(0)\left[\cos\alpha_1 a\cos\alpha_2\left(\frac{l}{2}-a\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{P_1}{P_1+P_2}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\operatorname{sen}\alpha_1 a\operatorname{sen}\alpha_2\left(\frac{l}{2}-a\right)\right] = 0.$$

Después de las transformaciones obtenemos la ecuación de la estabilidad

$$\operatorname{tg}\alpha_1 a\operatorname{tg}\alpha_2\left(\frac{l}{2}-a\right) = \frac{P_1+P_2}{P_1}\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{J_2}{J_2}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}. \qquad (3.4)$$

Si $P_2 = 0$, y $P_1 = P$, entonces la ecuación de estabilidad será:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 a\operatorname{tg}\alpha_2\left(\frac{l}{2}-a\right) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \qquad (3.5)$$

donde,

$$\alpha_1^2 = \frac{P}{EJ_1} \quad \text{y} \quad \alpha_2^2 = P : EJ_2.$$

Para este caso, se ha compuesto la tabla 2 de los valores de λ^2, que

Tabla 2

$\frac{J_1}{J_2}$	λ^2 para $(l-2a):l$, igual a			
	0,2	0,4	0,6	0,8
0,01	0,15	0,27	0,60	2,26
0,1	1,47	2,40	4,50	8,59
0,2	2,80	4,22	6,69	9,33
0,4	5,09	6,68	8,51	9,67
0,6	6,98	8,19	9,24	9,78
0,8	8,55	9,18	9,63	9,84

entran en la fórmula

$$P_{cr.} = \lambda^2\frac{EJ_2}{l^2}. \qquad (3.6)$$

La ecuación de estabilidad (3.4) se adapta fácilmente a un pilar empotrado en su extremo inferior y con el extremo superior libre (fig. 69). Para él la ecuación de estabilidad es la siguiente:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 a\operatorname{tg}\alpha_2 b = \frac{P_1+P_2}{P_1}\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{J_2}{J_1}. \qquad (3.7)$$

Esta ecuación fue obtenida en el § 8, donde se examinaba un pilar empotrado en su extremo inferior [véase (2.94)]. Toda la

solución expuesta allí, es aplicable a un pilar de sección escalonada variable.

Si $\alpha_1 = 0$, la ecuación (3.7) da una indeterminación, que al desarrollarla resulta:

$$a_2 a \operatorname{tg} \alpha_2 b = \frac{P_1 + P_2}{P_1}. \tag{3.8}$$

Para un pilar asimétrico (fig. 70), cuando $P_2 = 0$, son aplicables las expresiones (3.1) — (3.3). Sólo que la condición de frontera en el segundo tramo ahora será otra, precisamente: para $z = l - a$, $y = 0$.

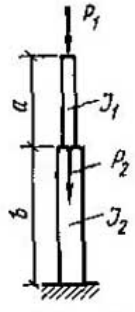


Fig. 69

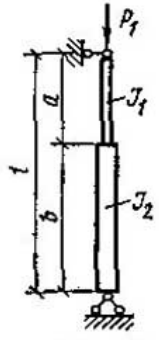


Fig. 70

Empleando (3.2), obtenemos:

$$y'(0)\left\{\frac{\operatorname{sen}\alpha_1 a}{\alpha_1} + \cos\alpha_1 a \frac{\operatorname{sen}\alpha_2 (l-a)}{\alpha_2} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{sen}\frac{\alpha_1 a}{\alpha_1}[1 - \cos\alpha_2 (l-a)]\right\} = 0.$$

De aquí obtenemos la ecuación de estabilidad

$$P_1 \cos\alpha_1 a \cos\alpha_2 (l-a)\left[\frac{\operatorname{tg}\alpha_2 (l-a)}{\alpha_2} + \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 a}{\alpha_1}\right] = 0. \tag{3.9}$$

Ejemplo 7. Determinar la fuerza crítica para un pilar (fig. 71), si $a = 0{,}2l$; $J_2 = J$; $J_1 = 0{,}4\ J$.

Para el segundo tramo adoptamos

$$\alpha_2 = \sqrt{P : EJ} = \alpha.$$

Respectivamente, para el primer tramo,

$$\alpha_1 = \sqrt{P : 0{,}4EJ} = \alpha\sqrt{2{,}5}.$$

La ecuación de estabilidad, según (3.5), es:

$$\operatorname{tg}(\alpha\sqrt{2,5}\cdot 0,2l)\operatorname{tg}(\alpha\cdot 0.3l)=\sqrt{2,5}.$$

O bien,

$$\operatorname{tg} 0,3162\,\lambda\operatorname{tg} 0,3\lambda=1,581.$$

De aquí $\lambda=\alpha l=2,971$.

La fuerza crítica $P_{cr}=8,51\frac{EJ}{l^2}$ (véase la tabla 2). Si este pilar es también comprimido en su parte central por las fuerzas $P_2=P/9$, entonces,

$$\alpha_1=\sqrt{P:0,4EJ}=\alpha;\ \alpha_2=\sqrt{\frac{P+P/9}{EJ}}=\frac{2}{3}\alpha;$$

$$P_{cr.}=\frac{\alpha^2l^2}{2,5}\frac{EJ}{l^2}.$$

La ecuación de estabilidad, según (3,4) es:

$$\operatorname{tg} 0,2\,\alpha\operatorname{tg}\frac{2}{3}\alpha 0,3l=\frac{2}{1,2}.$$

Ella también resulta

$$\operatorname{tg}^2 0,2\alpha l=1,66667.$$

De aquí, $0,2\alpha l=0,912$. Quiere decir que $\lambda=\alpha l=4,56$ y

$P_{cr}=\frac{4,56^2}{2,5}\frac{EJ}{l^2}=8,317\frac{EJ}{l}$ (antes teníamos $8,51\ EJ/l$).

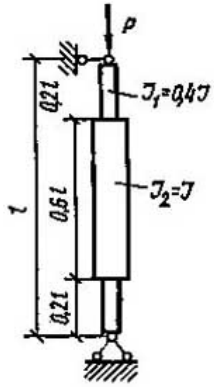


Fig. 71

Fig. 72

Ejemplo 8. Determinar la fuerza crítica para un pilar (véase la fig. 71), si:

$$a=l:6;\ J_2=J;\ J_1=J:4;$$

$$\alpha_2=\sqrt{\frac{P}{EJ}}=\alpha;\ \alpha_1=\sqrt{\frac{4P}{EJ}}=2\alpha.$$

La ecuación de estabilidad, según (3.5) es:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{3}=2.$$

De aquí $\lambda=\alpha l=2{,}865$ y $P_{cr.}=2{,}865^2\,\frac{EJ}{l^2}=8{,}208\,\frac{EJ}{l^2}$.

Ejemplo 9. Determinar la fuerza crítica para un pilar (véase la fig. 70), si,

$$a=b=l/2;\ P_1=P;\ P_2=0;\ J_1=J;\ J;\ J_2=2J_1=2J;$$

$$\alpha_1^2=\frac{P}{EJ}=\alpha^2;\ \alpha_2^2=\frac{P}{2EJ}=\frac{\alpha^2}{2}.$$

La ecuación de estabilidad, según (3.9) es:

$$\cos\alpha_1\frac{l}{2}\cos\alpha_2\frac{l}{2}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha_2\frac{l}{2}}{\alpha_2}+\frac{\operatorname{tg}\alpha_1\frac{l}{2}}{\alpha_1}\right)=0.$$

Si hacemos $\cos\alpha_1\,(l/2)=0$, entonces, conforme a (3.1), obtenemos $y_1'\,(l/2)=0$, es decir, que la forma de pérdida de la estabilidad debe ser simétrica, y esto no corresponde a la asimetría del pilar. Lo mismo es justo para $\cos\alpha_2\,(l/2)=0$. En consecuencia, la ecuación de estabilidad será:

$$\left(\operatorname{tg}\alpha_2\frac{l}{2}:\alpha_2\right)+\left(\operatorname{tg}\alpha_1\frac{l}{2}:\alpha_1\right)=0.$$

Para nuestras condiciones $\left(\operatorname{tg}0{,}707\,\frac{\alpha l}{2}:0{,}707\right)+\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2}=0$. De aquí $\lambda=\alpha l=3{,}58$ y $P_{cr.}=3{,}58^2\,EJ:l^2=12{,}816\,\frac{EJ}{l^2}$.

§ 12. ESTABILIDAD DE LOS PILARES DE SECCIÓN SUAVEMENTE VARIABLE. La solución exacta del problema sobre la estabilidad de los pilares de sección suavemente variable, consiste en la integración de la ecuación diferencial lineal de equilibrio del pilar en estado desviado después de la pérdida de estabilidad. Esta ecuación con coeficientes variables será:

$$EJ\,(z)\,y''=-M\,(z). \tag{3.10}$$

Examinemos un pilar con apoyo articulado en los extremos (fig. 72) y momentos de inercia según la ley:

$$J=J_0\,\frac{4z\,(l-z)}{l^2}.$$

La ecuación diferencial (3.10) será

$$EJ_0\,\frac{4z\,(l-z)}{l^2}\,y''=-Py. \tag{3.11}$$

Esta ecuación se satisface si hacemos

$$y=\frac{4fz\,(l-z)}{l^2}. \tag{3.12}$$

Sustituyendo su valor en (3.11), obtenemos:

$$EJ_0 \frac{4z(l-z)}{l^2}\left(-\frac{8f}{l^2}\right) = -P\frac{4fz(l-z)}{l^2}.$$

De aquí,

$$P_{cr.} = \frac{8EJ_0}{l^2} < \frac{\pi^2 EJ_0}{l^2}. \tag{3.13}$$

§ 13. MÉTODO DE BUBNOV — GALIORKIN. Veamos la ecuación diferencial de la flexión longitudinal:

$$EJ(z)\, y'' + Py = 0.$$

Esta ecuación sirve para investigar una barra en dos apoyos así como una barra empotrada en un extremo, si el desplazamiento y se cuenta a partir de la línea de acción de la fuerza P, es decir, cuando $M = Py$. Sea que la solución de esta ecuación se presenta en la forma

$$y = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(z). \tag{3.14}$$

Reemplazando la solución en la ecuación inicial, obtenemos la identidad

$$EJ(z)\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i''(z) + P\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(z) \equiv 0.$$

Esta identidad no habrá de alterarse si se multiplica por cualquier función $\varphi_k(z)$ de (3.14) y se formula la integral a todo el largo de la barra.

Sustituyendo el valor de esta identidad en (1.31), obtenemos:

$$\int_0^l \left[EJ(z)\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i''(z) + P\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(z)\right]\varphi_k(z)\,dz = 0. \tag{3.15}$$

Esta igualdad es justa para cualquier $k = 1, 2, \ldots, n$. Escribimos esta expresión en forma desarrollada:

$$\int_0^l [EJ(z)\, a_1 \varphi_1''(z) + Pa_1\varphi_1(z)]\,\varphi_k(z)\,dz +$$

$$+ \int_0^l [EJ(z)\, a_2 \varphi_2''(z) + Pa_2\varphi_2(z)]\,\varphi_k(z)\,dz +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \int_0^l [EJ(z)\, a_n \varphi_n''(z) + Pa_n\varphi_n(z)]\,\varphi_k(z)\,dz = 0. \tag{3.16}$$

Finalmente la presentamos en forma canónica

$$c_{k1}a_1 + c_{k2}a_2 + \ldots + c_{kn}a_n = 0; \tag{3.17}$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$,
donde

$$c_{ki} = \int_0^l [EJ(z)\varphi_i''(z) + P\varphi_i(z)]\varphi_k(z)\,dz. \tag{3.18}$$

En las soluciones aproximadas, las funciones $\varphi_i(z)$ en (3.15) hay que darlas, y los coeficientes a_i hay que contarlos como incógnitas, determinadas por las ecuaciones (3.17).

Todo lo expresado antes con respecto a la elección de las funciones $\varphi_i(z)$ para (3.14) y sobre la interpretación del método (véase el § 3), tiene vigencia aquí. Se puede demostrar que si las funciones $\varphi_i(z)$ satisfacen las condiciones de frontera, entonces, según (3.18) $c_{ik} = c_{ki}$.

Si en (3.17) se adopta una sola función $\varphi_1(z)$, la expresión será

$$a_1c_{11} = 0. \tag{3.19}$$

Como $a_1 \neq 0$, entonces, según (3.18), tenemos

$$c_{11} = \int_0^l [EJ(z)\varphi_1''(z) + P\varphi_1(z)]\varphi_1(z)\,dz = 0. \tag{3.20}$$

De aquí obtenemos

$$P = P_{cr.} = -\int_0^l EJ(z)\varphi_1''(z)\varphi_1(z)\,dz : \int_0^l [\varphi_1(z)]^2\,dz. \tag{3.21}$$

En el caso general, cuando en (3.15) se adoptan varias funciones, las ecuaciones (3.17) resultan homogéneas. Para obtener la ecuación de estabilidad, hay que igualar a cero su determinante:

$$D = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{bmatrix} = 0. \tag{3.22}$$

Ejemplo 10. Determinar la fuerza crítica para un pilar (véase la fig. 72), si:

$$J(z) = J_0 \frac{4z(l-z)}{l^2}.$$

Adoptamos $\varphi_1(z) = z(l - z)$; $\varphi_1''(z) = -2$.

Substituyendo su valor en la fórmula (3.21) obtenemos:

$$P_{cr} = -\frac{\int_0^l EJ_0 \frac{4z(l-z)}{l^2} z(l-z)(-2)\,dz}{\int_0^l z^2 (l-z)^2\,dz} = \frac{8EJ_0}{l^2}.$$

Obtenemos la misma respuesta que con la solución exacta [véase (3.13)].

Ejemplo 11. Determinar la fuerza crítica para la viga considerada en el ejemplo 7. Por $\varphi_1(z)$ adoptamos la parábola $\varphi(z) = z(l-z)$. Según la fórmula (3.21) tenemos:

$$P_{cr} = -\left[\int_0^{0,2l} E\,0{,}4J(-2)z(l-z)\,dz + \int_{0,2l}^{l/2} EJ(-2)z(l-z)\,dz\right] :$$

$$: \left[\int_0^{0,2l} z^2(l-z)^2\,dz + \int_{0,2l}^{l/2} z^2(l-z)^2\,dz\right] = 8{,}81\,EJ : l^2$$

$\left(\text{el valor exacto es } 8{,}51\,\frac{EJ}{l^2}\right)$.

§ 14. MÉTODO DE LAGRANGE — RITZ. Este método se basa en el mínimo de la energía total del sistema, la que, para un pilar desviado puede ser escrita así:

$$U = U_0 + \int_0^l \frac{EJ(z)(y'')^2\,dz}{2} - P\int_0^l \frac{(y')^2\,dz}{2}. \qquad (3.23)$$

Al igual que en el método de Bubnov—Galiorkin, buscaremos la solución en forma de una serie (3.14), exigiendo que sus coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, satisfagan el mínimo de la energía total del sistema. Sustituimos (3.14) en la expresión (3.23):

$$U = U_0 + \int_0^l \frac{EJ(z)\left[\sum_1^n a_i \varphi_i''(z)\right]^2 dz}{2} - P\int_0^l \frac{\left[\sum_1^n a_i \varphi_i'(z)\right]^2 dz}{2}. \qquad (3.24)$$

Formulamos la derivada parcial de (3.24) con respecto a a_k y la igualamos a cero:

$$\frac{\partial U}{\partial a_k} = \int_0^l EJ(z)\left[\sum_1^n a_i \varphi_i''(z)\right]\varphi_k''(z)\,dz -$$

$$- P\int_0^l \left[\sum_1^n a_i \varphi_i'(z)\right]\varphi_k'(z)\,dz = 0. \qquad (3.25)$$

Presentamos esta expresión en forma desarrollada:

$$a_1\left[\int_0^l EJ(z)\,\varphi_1''(z)\,\varphi_k''(z)\,dz - P\int_0^l \varphi_1'(z)\,\varphi_k'(z)\,dz\right] +$$

$$+ a_2\left[\int_0^l EJ(z)\,\varphi_2''(z)\,\varphi_k''(z)\,dz - P\int_0^l \varphi_2'(z)\,\varphi_k'(z)\,dz\right] + \ldots +$$

$$+ a_n\left[\int_0^l EJ(z)\,\varphi_n''(z)\,\varphi_k''(z)\,dz - P\int_0^l \varphi_n'(z)\,\varphi_k'(z)\,dz\right] = 0. \quad (3.26)$$

Lo obtenido lo escribimos en forma canónica:

$$c_{k1}a_1 + c_{k2}a_2 + \ldots + c_{kn}a_n = 0, \quad (3.27)$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$;

$$c_{ki} = \int_0^l EJ(z)\,\varphi_i''(z)\,\varphi_k''(z)\,dz - P\int_0^l \varphi_i'(z)\,\varphi_k'(z)\,dz = c_{ik}; \quad (3.28)$$

$$c_{ki} = c_{ik}.$$

La expresión (3.27) es la ecuación canónica del método dado. Por ella, haciendo $k = 1, 2, \ldots, n$, obtenemos n ecuaciones para la determinación de los coeficientes incógnitos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Estas ecuaciones serán homogéneas. Para obtener la ecuación de estabilidad, hay que igualar a cero el determinante de las mismas.

Si en la serie (3.14) se adopta una sola función $\varphi_1(z)$, obtenemos:

$$P = P_{cr.} = \int_0^l EJ(z)\,[\varphi_1''(z)]^2\,dz : \int_0^l [\varphi_1'(z)]^2\,dz. \quad (3.29) \quad \text{[véase (1.45)]}$$

Si para una barra con apoyo articulado se hace:

$$M = Py = -y''EJ(z),$$

lo que corresponde al equilibrio de la barra en estado encorvado, cuando el trabajo de la fuerza externa P pasa a ser energía elástica de la barra, entonces, haciendo $U_0 = 0$, según (3.23) podemos obtener:

$$U = P^2\int_0^l \frac{y^2\,dz}{2EJ(z)} - P\int_0^l \frac{(y')^2\,dz}{2} = 0. \quad (3.30)$$

Supongamos también aquí, que

$$y = \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(z) \quad \text{[véase (3.14)]}. \quad (3.31)$$

Reemplazamos (3.31) en (3.30)

$$U = P^2 \int_0^l \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i (z)\right]^2 dz}{2EJ(z)} - P \int_0^l \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i' (z)\right]^2 \frac{dz}{2} = 0.$$

Para las funciones dadas $\varphi_i (z)$ elegimos los parámetros a_i de la condición de extremo de la energía potencial en el equilibrio. Para esto formulamos las derivadas con respecto a los parámetros a_k, y las igualamos a cero:

$$\frac{\partial U}{\partial a_k} = P^2 \int_0^l \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i (z)\right] \varphi_k (z)\, dz}{EJ(z)} -$$

$$- P \int_0^l \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i' (z)\right] \varphi_k' (z)\, dz = 0. \qquad (3.32)$$

A esta misma expresión se puede llegar de un modo un tanto distinto, precisamente, determinando la fuerza P a partir de la expresión (3.30), que escribimos así:

$$PB - A = 0.$$

De aquí,

$$P_{cr.} = \frac{A}{B} = \frac{\int_0^l (y')^2\, dz}{\int_0^l y^2 \frac{dz}{EJ(z)}} = \frac{\int_0^l \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i' (z)\right]^2 dz}{\int_0^l \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i' (z)\right]^2 \frac{dz}{EJ(z)}}.$$

Hallamos el mínimo de $P_{cr.}$:

$$\frac{\partial P_{cr}}{\partial a_k} = \left(\frac{\partial A}{\partial a_k} B - \frac{\partial B}{\partial a_k} A\right) : B^2 = 0.$$

O bien,

$$\frac{\partial A}{\partial a_k} = \frac{\partial B}{\partial a_k} \frac{A}{B} = \frac{\partial A}{\partial a_k} - \frac{\partial B}{\partial a_k} P_{cr.} = 0.$$

Operando en adelante con la ecuación obtenida, tendremos (3.32) con signos inversos.

En forma desarrollada, la expresión (3.32) nos da la ecuación (3.17), pero con nuevos valores de los coeficientes:

$$c_{ik} = c_{ki} = P \int_0^l \frac{\varphi_i(z)\,\varphi_k(z)\,dz}{EJ(z)} - \int_0^l \varphi_i'(z)\,\varphi_k'(z)\,dz. \qquad (3.33)$$

Cuando $y = a_1\varphi_1(z)$; $c_{11}a_1 = 0$, tendremos:

$$c_{11} = P \int_0^l \frac{\varphi_1^2(z)\,dz}{EJ(z)} - \int_0^l [\varphi_1'(z)]^2\,dz = 0,$$

de aquí,

$$P_{cr} = \int_0^l [\varphi_1'(z)]^2\,dz : \int_0^l \frac{\varphi_1^2(z)\,dz}{EJ(z)} \text{ [véase (1.47)]}. \qquad (3.34)$$

Los cálculos efectuados muestran que la fórmula (3.34) da resultados más exactos que la fórmula (3.29). Así, por ejemplo, cuando $\varphi_1(z) = z(l - z)$ y EJ es constante, obtenemos:

por la fórmula (3.29) $P_{cr} = 12\,EJ : l^2$;

por la fórmula (3.34) $P_{cr} = 10\,EJ : l^2$ $\left(\text{exactamente, } P_{cr.} = 9{,}87\frac{EJ}{l^2}\right)$.

Ejemplo 12. Determinar la fuerza crítica del pilar considerado en el ejemplo 10. Según la fórmula (3.29), si $\varphi_1 = z(l - z)$,

$$P_{cr} = \left[\int_0^l EJ_0 \frac{4z(l-z)}{l^2}(-2)^2\,dz\right] : \left[\int_0^l (l-2z)^2\,dz\right] = \frac{8EJ_0}{l^2}.$$

Este mismo resultado lo obtenemos mediante la fórmula (3.34), coincidiendo con el logrado antes en el ejemplo 10, debido a que la curva adoptada $\varphi_1(z)$ es la expresión exacta de la flexión de la barra.

§ 15. MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS. La ecuación de este método para los pilares de sección variable será:

$$y_{i-1} + y_i(\beta_i^2 - 2) + y_{i+1} = 0, \qquad (3.35)$$

donde

$$\beta_i^2 = \frac{P\,\Delta z^2}{EJ_i}. \qquad (3.36)$$

Reducimos todos los β_i a un β_k básico, para el cual

$$\beta_k^2 = \frac{P\,\Delta z^2}{EJ_k}. \qquad (3.37)$$

Comparando entre sí (3.36) y (3.37), obtenemos:

$$\beta_i^2 = \beta_k^2 \frac{J_k}{J_i}. \tag{3.38}$$

Ahora la ecuación (3.35) será

$$y_{i-1} + y_i \left(\beta_k^2 \frac{J_k}{J_i} - 2 \right) + y_{i+1} = 0. \tag{3.39}$$

La fuerza crítica se determina a partir de (3.37), precisamente:

$$P_{cr} = \beta_k^2 E J_k : \Delta z^2. \tag{3.40}$$

En este método el pilar se divide en varios tramos de igual longitud Δz, y para cada dos tramos vecinos se formula la ecuación (3.39). Las ecuaciones deberán ser tantas, cuantas son las incógnitas y_i. Las ecuaciones obtenidas son homogéneas. Igualando el determinante de ellas a cero, obtenemos la ecuación de estabilidad.

Recordemos, que si el montante tiene empotramiento, más allá del empotramiento se debe suponer otro punto suplementario, para el cual el desplazamiento se debe considerar igual al desplazamiento en el empotramiento.

Ejemplo 13. Determinar la fuerza crítica para el montante del ejemplo 10. Dividimos el montante en cuatro partes (fig. 73). En consecuencia, $\Delta z = l/4$; $J_k = J_2 = J_0$. Componemos la ecuación (3.39) inicialmente para el primer y segundo tramos, y luego para el segundo y tercero, teniendo en cuenta que $y_3 = y_1$:

$$0 + y_1 \left(\beta_2^2 \frac{J_0}{0{,}75 J_0} - 2 \right) + y_2 = 0;$$

$$y_1 + y_2 (\beta_2^2 - 2) + y_1 = 0.$$

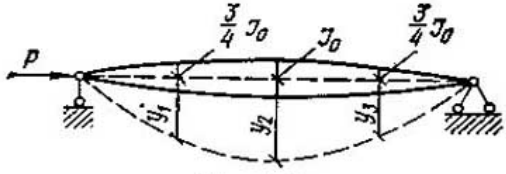


Fig. 73

Ecuación de estabilidad:

$$D = \begin{vmatrix} \left(\beta_2^2 \frac{4}{3} - 2 \right) & 1 \\ 2 & (\beta_2^2 - 1) \end{vmatrix} = \beta_2^4 - \frac{14}{4} \beta_2^2 + \frac{6}{4} = 0.$$

De aquí $\beta_2^2 = 0{,}5$. Según la fórmula (3.40)

$$P_{cr} = \frac{1}{2} \frac{E J_0}{(l/4)^2} = 8 E J_0 : l^2.$$

CAPÍTULO 4 * ESTABILIDAD DE LOS PÓRTICOS PLANOS

§ 16. OBSERVACIONES PREVIAS. En este capítulo se examinan los pórticos con elementos comprimidos y, en algunos casos, con elementos comprimidos y extendidos con una carga nodal (fig. 74).

Si no tomamos en cuenta los acortamientos de los elementos comprimidos y los alargamientos de los elementos extendidos del pórtico, así como el peso propio de los dinteles, entonces, estos

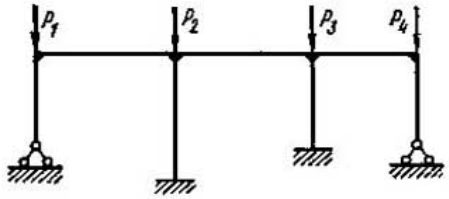


Fig. 74

pórticos no tendrán flexión hasta que no pierdan la estabilidad y en consecuencia para ellos es posible un planteamiento habitual acerca de la estabilidad.

Como regla, las fuerzas longitudinales en los elementos del pórtico hasta la pérdida de la estabilidad en condiciones de la carga nodal, se determinan fácilmente.

Especialmente se debe señalar que la investigación de la estabilidad de los pórticos considerando los elementos del pórtico sólo comprimidos o extendidos es bastante aproximada, ya que aún, con las cargas nodales (que se encuentran raramente) el propio peso de los dinteles por ínfimo que sea, crea al inicio de la carga el estado de deformación del pórtico con la flexión de los elementos.

Aún en mayor grado, esta observación se relaciona con los pórticos que llevan la carga en los dinteles, porque semejantes pórticos se investigan con respecto a la estabilidad mediante el cambio de la carga dada por una carga nodal. En estos casos la carga nodal se elige de manera tal que las fuerzas longitudinales de ella, en los elementos del pórtico hasta la pérdida de la estabilidad, sean iguales a las fuerzas longitudinales de la carga dada en forma general y determinadas según el cálculo del sistema del estado no deformado. Aproximadamente, la carga nodal se obtiene cambiando la carga dada según la regla de la palanca.

Tal cálculo aproximado de la estabilidad de los pórticos en condiciones de las cargas nodales sólo indica los significados máximos, y por lo general inaccesibles, de las fuerzas longitudinales en los elementos del pórtico en los cuales transcurre la pérdida de su

estabilidad en un estado elástico. El problema reside en que con la existencia de la flexión de los elementos del pórtico desde el inicio de la carga, las tensiones del momento de flexión, en estado de deformación, crecen muy rápidamente y las tensiones de los extremos llegan frecuentemente al límite de fluidez antes que comience el estado crítico, determinado según el estado elástico con las cargas nodales. Por eso, si se trata de los pórticos de la construcción se menciona frecuentemente la capacidad portadora límite, es decir, la carga crítica de segundo género que en muchos casos es inferior (¡y considerablemente!) a la carga crítica en estado elástico calculada en condiciones de la carga nodal.

Todo depende de la correlación entre las tensiones debidas a las fuerzas longitudinales y los momentos de flexión.

Más adelante examinaremos el método de las fuerzas y el de los traslados para investigar la estabilidad de los pórticos con cargas nodales en estado elástico.

Aquí no se realiza un análisis más profundo del problema de la investigación de la estabilidad del estado de deformación, compresión y acombado de los pórticos. Así como no se considera la capacidad de resistencia de los mismos.

Para concluir señalemos que no deben olvidarse los límites de la aplicación de las fuerzas críticas obtenidas en el estado elástico.

§ 17. FÓRMULA DE LOS DESPLAZAMIENTOS DE LOS SISTEMAS DE BARRAS CON ELEMENTOS COMPRIMIDOS Y ENCORVADOS, Y EXTENDIDOS Y ENCORVADOS.

Primeramente examinaremos la barra comprimida y encorvada con una carga transversal arbitraria (fig. 75, *a*). Supongamos que los momentos de

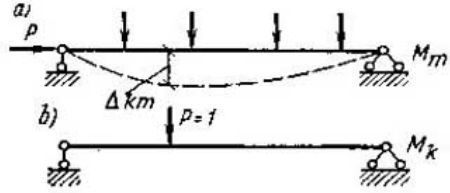


Fig. 75

flexión de la barra son M_m. Para determinar el traslado Δ_{km} en un punto cualquiera k de la barra aplicamos a ésta, sin la fuerza longitudinal P la fuerza $P = 1$ en dirección al traslado determinado (fig. 75, *b*). Los momentos de flexión provocados por esta fuerza unitaria los señalamos con $\overline{M}_k$. Examinaremos la barra con una fuerza unitaria según el principio de los posibles desplazamientos, tomando en calidad de éstos los desplazamientos reales debidos a la carga dada (fig. 75, *a*). El trabajo de las fuerzas externas e internas

será

$$1\Delta_{km} = \sum \int \overline{M}_k \frac{M_m}{EJ} ds. \tag{4.1}$$

Esta es la fórmula de los traslados para la barra comprimida y encorvada. Para facilitar nuestra tarea los sumandos con N y Q se excluyen.

Los momentos de flexión M_m se determinan según las expresiones generales (2.37) y (2.41) y $\overline{M}_k$ para las barras rectas (o sus tramos) de longitud l representa una línea recta

$$\overline{M}_k = a + \frac{b-a}{l} z. \tag{4.2}$$

La aplicación de la fórmula de traslados (4.1) está relacionada con las siguientes integrales:

$$\int_0^l \operatorname{sen} \alpha z \, dz = \left[-\frac{\cos \alpha z}{\alpha} \right]_0^l = \frac{1-\cos \alpha l}{\alpha}; \tag{4.3}$$

$$\int_0^l \cos \alpha z \, dz = \left[\frac{\operatorname{sen} \alpha z}{\alpha} \right]_0^l = \frac{\operatorname{sen} \alpha l}{\alpha}; \tag{4.4}$$

$$\int_0^l z \operatorname{sen} \alpha z \, dz = \left[\frac{\operatorname{sen} \alpha z - \alpha z \cos \alpha z}{\alpha^2} \right]_0^l = \frac{\operatorname{sen} \alpha l - \alpha l \cos \alpha l}{\alpha^2}; \tag{4.5}$$

$$\int_0^l z \cos \alpha z \, dz = \left[\frac{\cos \alpha z + \alpha z \operatorname{sen} \alpha z}{\alpha^2} \right]_0^l = \frac{(\cos \alpha l - 1) + \alpha l \operatorname{sen} \alpha l}{\alpha^2}. \tag{4.6}$$

Basándose en la fórmula (4.1) componemos la fórmula general para una barra de rigidez permanente. Para ello aplicamos las ecuaciones (2.37) y (4.2).

Supongamos que para la barra de longitud l (o su tramo), los momentos de flexión provocados por la carga según (2.37) se determinan según la expresión

$$M_m(z) = A \operatorname{sen} \alpha z + M(0) \cos \alpha z, \tag{4.7}$$

donde

$$A = \alpha E J y'(0) + \frac{Q(0)}{\alpha}. \tag{4.8}$$

Sustituyendo los valores de (4.2) y (4.7) en la fórmula (4.1), hallamos

$$\Delta_{km} = \int_0^l \left(a + \frac{b-a}{l} z \right) (A \operatorname{sen} \alpha z + M(0) \cos \alpha z) \frac{dz}{EJ}.$$

Luego de la integración obtendremos la expresión general:

$$EJ\,\Delta_{km} = a\left[\frac{A}{\alpha\lambda}(\lambda - \operatorname{sen}\lambda) + \frac{M(0)}{\alpha\lambda}(1-\cos\lambda)\right] +$$

$$+ b\left[\frac{A}{\alpha\lambda}(\operatorname{sen}\lambda - \lambda\cos\lambda) + \frac{M(0)'}{\alpha\lambda}(\cos\lambda - 1 + \lambda\operatorname{sen}\lambda)\right], \qquad (4.9)$$

donde $\lambda = al$.

Para las barras extendidas y encorvadas es necesario, en todas las expresiones que se encuentran cambiar α por β lo que dará como resultado:

$$\beta = \sqrt{\frac{P_p}{EJ}};$$

$$\alpha = i\beta; \quad \alpha^2 = -\beta^2; \quad \operatorname{sen} i\beta = i\operatorname{sh}\beta;$$

$$\cos i\beta = \operatorname{ch}\beta.$$

Ejemplo 14. Determinar la flexión producida bajo la fuerza R (fig. 76). La ecuación de los momentos M_m la escribimos de acuerdo con (2.37) y (2.41):

$$M_m(z) = EJ\alpha y'(0)\operatorname{sen}\alpha z + \frac{R}{2\alpha}\operatorname{sen}\alpha z\Big|_0^{l/2} - \frac{R}{\alpha}\operatorname{sen}\alpha\left(z - \frac{l}{2}\right)\Big|_{l/2}^{l}.$$

Según la condición de frontera en el extremo derecho, donde $M_m(l) = 0$,

$$M_m(l) = EJ\alpha y'(0)\operatorname{sen}\alpha l + \frac{R}{2\alpha}\operatorname{sen}\alpha l - \frac{R}{\alpha}\operatorname{sen}\alpha\frac{l}{2} = 0.$$

Como consecuencia obtenemos

$$EJ\alpha y'(0) = \frac{R}{2\alpha}\,\frac{1-\cos\alpha\frac{l}{2}}{\cos\alpha\frac{l}{2}}.$$

Por lo tanto, la ecuación de los momentos $M_m(z)$ en el primer tramo será:

$$M_m(z) = R\operatorname{sen}\alpha z : 2\alpha\cos\alpha\frac{l}{2}.$$

El traslado según (4.1) es,

$$EJ\Delta_{km} = 2\int_0^{l/2}\frac{z}{2}\,\frac{R\operatorname{sen}\alpha z}{2\alpha\cos\alpha\frac{l}{2}}\,dz = \frac{R}{2\alpha\cos\alpha\frac{l}{2}}\,\frac{\operatorname{sen}\alpha\frac{l}{2} - \frac{\alpha l}{2}\cos\frac{\alpha l}{2}}{\alpha^2}.$$

Luego de simplificar, obtenemos

$$EJ\Delta_{km} = \frac{Rl^3}{2(\alpha l)^3}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2} - \frac{\alpha l}{2}\right).$$

Esta misma expresión puede obtenerse de acuerdo a la fórmula general (4.9). Para ello hay que tener en cuenta que en la viga hay dos tramos, con una longitud de $l/2$ cada uno y que $a = 0$ y $b = l/4$.

De acuerdo con (4.8), y teniendo en cuenta la expresión (a) obtendremos:

$$A = \left[\frac{R}{2\alpha}\left(1 - \cos\frac{\alpha l}{2}\right) : \cos\alpha\frac{l}{2}\right] + \frac{R}{2a} = R : 2\alpha\cos\frac{\alpha l}{2}.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (4.9), hallamos

$$EJ\Delta_{km} = 2\frac{l}{4}\left[\frac{R}{\frac{\alpha l}{2}\alpha 2\alpha\cos\frac{\alpha l}{2}}\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha l}{2} - \frac{\alpha l}{2}\cos\frac{\alpha l}{2}\right)\right].$$

Ejemplo 15. Determinar la flexión del extremo izquierdo de la viga (fig. 77). Parámetros: iniciales $y(0) = ?$; $y'(0) = 0$; $M(0) = ?$; $Q(0) = -R$. Las condiciones de frontera en el extremo derecho son las siguientes: $y(l) = 0$;

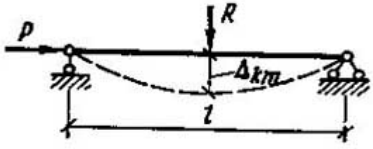


Fig. 76

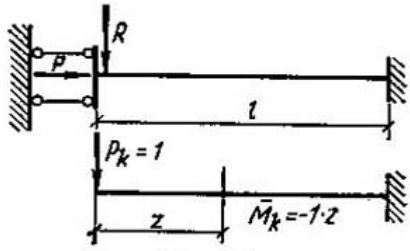


Fig. 77

$y'(l) = 0$. Según las expresiones (2.35) y (2.36), tenemos

$$y(l) = y(0) - \frac{M(0)}{\alpha^2 EJ}(1-\cos\lambda) + \frac{R}{\alpha^2 EJ}(\lambda - \operatorname{sen}\lambda) = 0; \qquad (a)$$

$$y'(l) = -\frac{M(0)}{\alpha EJ}\operatorname{sen}\lambda + \frac{R}{\alpha^2 EJ}(1-\cos\lambda) = 0. \qquad (b)$$

De aquí obtenemos:

$$M(0) = \frac{R}{\alpha}\frac{1-\cos\lambda}{\operatorname{sen}\lambda}; \qquad (c)$$

$$y(0) = \frac{R}{\alpha^2 EJ\operatorname{sen}\lambda}[2(1-\cos\lambda) - \lambda\operatorname{sen}\lambda. \qquad (d)$$

Ahora determinamos $y(0)$ según la fórmula (4.1):

$$\overline{M}_k = -z;\ M_p(z) = M(0)\cos\alpha z - \frac{R}{\alpha}\operatorname{sen}\alpha z;$$

$$\Delta_{km} = y(0) = \int_0^l -\frac{z}{EJ}\left(\frac{R}{\alpha}\frac{1-\cos\lambda}{\operatorname{sen}\lambda}\cos\alpha z - \frac{R}{\alpha}\operatorname{sen}\alpha z\right)dz =$$

$$= \frac{R}{\alpha^3 EJ\operatorname{sen}\lambda}[2(1-\cos\lambda) - \lambda\operatorname{sen}\lambda],$$

lo que coincide con (d).

§ 18. ESTABILIDAD DE LOS PÓRTICOS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADOS SEGÚN EL MÉTODO DE FUERZAS.

Examinemos los pórticos con elementos comprimidos y, en algunos casos, con comprimidos y extendidos (fig. 78, *a*). Si prescindimos de los acortamientos de los elementos comprimidos y los alargamientos de los extendidos, entonces tales pórticos no sufrirán, hasta

la pérdida de su estabilidad, la flexión. Las fuerzas longitudinales en sus elementos, como regla, se determinan sin dificultades.

En el momento de la pérdida de la estabilidad, cuando tienen lugar flexiones laterales insignificantes de las barras el pórtico de comprimido y extendido se convierte en comprimido, extendido y encorvado. Las pequeñas reacciones de enlaces complementarias, surgidas con esto y eliminadas al pasar al sistema principal, las tomamos por incógnitas $X_1, X_2, \ldots, X_n$, que aplicamos al sistema básico (fig. 78, *b*) y las reacciones debidas a la carga las relacionamos con ésta. En tales condiciones el sistema básico debido a la carga dada tiene sólo elementos comprimidos y extendidos que antes existían en el sistema dado. Por eso si despreciamos los acortamientos y alargamientos de las barras producidos por la carga en el sistema básico, es fácil determinar que todos los traslados de la carga Δ_{kp} en dirección a las incógnitas $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son iguales a 0. Los elementos comprimidos y extendidos debido a la carga del sistema básico con las incógnitas $X_1, X_2, \ldots, X_n$ trabajarán en condiciones de flexión complicada, es decir, longitudinal y transversal

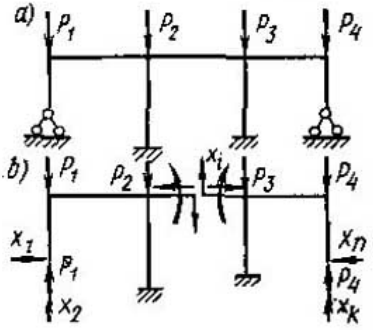


Fig. 78

Suponiendo que en el momento del inicio de la pérdida de la estabilidad, las fuerzas longitudinales de los elementos comprimidos y extendidos son constantes, escribimos, basándose en el principio de independencia de la acción de las fuerzas, aplicado en este caso a las incógnitas $X_1, X_2, \ldots, X_n$, las ecuaciones canónicas de la siguiente manera:

$$\delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \ldots + \delta_{kn}X_n = 0 \qquad (4.10)$$

$$\text{cuando } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Las ecuaciones obtenidas según la (4.10) son homogéneas.

La ecuación de la estabilidad la obtenemos igualando el determinante de las ecuaciones canónicas a cero, es decir:

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \ldots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \ldots & \delta_{2n} \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \ldots & \delta_{nn} \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.11)$$

Las ecuaciones canónicas (4.10) en forma de matriz son:

$$\mathbf{DX} = 0, \qquad (4.12)$$

donde

$$D = \| \delta_{hm} \| = \begin{Vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{Vmatrix} = \overline{M}' \cdot A \cdot \overline{M} =$$

$$= \underset{\substack{n\text{: filas} \\ t\text{: columnas}}}{\begin{Vmatrix} \overline{M}'_{11} & \overline{M}'_{21} & \dots & \overline{M}'_{t1} \\ \overline{M}'_{12} & \overline{M}'_{22} & \dots & \overline{M}'_{t2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{M}'_{1n} & \overline{M}'_{2n} & \dots & \overline{M}'_{tn} \end{Vmatrix}} \cdot \underset{\substack{t\text{: filas} \\ t\text{: columnas}}}{\begin{Vmatrix} A_1 & O & O & \dots & O \\ O & A_2 & O & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & O & \dots & A_t \end{Vmatrix}} \cdot \underset{\substack{t\text{: filas} \\ n\text{: columnas}}}{\begin{Vmatrix} \overline{M}_{11} & \overline{M}_{12} & \dots & \overline{M}_{1n} \\ \overline{M}_{21} & \overline{M}_{22} & \dots & \overline{M}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{M}_{t1} & \overline{M}_{t2} & \dots & \overline{M}_{tn} \end{Vmatrix}}$$

$$\overline{M}'_{ik} = \| \overline{M}^{\text{izq}}_{ik} \overline{M}^{\text{med}}_{ik} M^{\text{der}}_{ik} \| \qquad (4.13)$$

(véase la fig. 162 de la dinámica)
es la columna transpuesta de los momentos unitarios M_{ik} de $X_k = 1$ en el i-ésimo tramo sin tener en cuenta las fuerzas longitudinales debidas a la carga en el sistema básico.

$$\mathbf{A}_i = \frac{d_i}{6EJ_0} \begin{Vmatrix} a_i^{\text{izq}} & 0 & 0 \\ 0 & 4a_i^{\text{med}} & 0 \\ 0 & 0 & a_i^{\text{der}} \end{Vmatrix} \qquad (4.14)$$

es la matriz de flexibilidad en el i-ésimo tramo; $a_i = EJ_0 : E_i J_i$; J_0, es el momento arbitrario de la inercia igual para todo el sistema;

$$\overline{\mathbf{M}}_{ik} = \vec{\overline{\mathbf{M}}}_{ik} = \begin{Vmatrix} \overline{M}^{\text{izq}}_{ik} \\ \overline{M}^{\text{med}}_{ik} \\ \overline{M}^{\text{der}}_{ik} \end{Vmatrix} = | \{ \overline{M}^{\text{izq}}_{ik} \overline{M}^{\text{med}}_{ik} \overline{M}^{\text{der}}_{ik} \} | \qquad (4.15)$$

es la matriz-columna de los momentos unitarios M_{ik} de $X_k = 1$ en el i-ésimo tramo del sistema básico teniendo en cuenta la influencia sobre el momento de las fuerzas longitudinales debidas a la carga, escrito en tres variantes.

Respecto a la ecuación (4.11)

$$D = | \mathbf{DX} | = 0.$$

Señalemos que tanto en la teoría de las oscilaciones, como aquí en algunos casos particulares no se puede excluir la solución trivial de las ecuaciones (4.10), cuando $X_1 = \dots = X_n = 0$, es decir, cuando algunas formas de la pérdida de la estabilidad del sistema básico, con los traslados nulos en ella en dirección a las incógnitas, van a coincidir con las formas de la pérdida de la estabilidad del sistema dado. Tales formas de pérdida de la estabilidad del sistema básico, si son posibles físicamente, deben ser investigadas en forma especial.

Al determinar los coeficientes de las ecuaciones canónicas δ_{km} frecuentemente se ve uno obligado a tratar con elementos en forma de barras comprimidas (o extendidas) empotradas en un extremo y cargadas en el otro y en forma de barras con dos apoyos y cargas en los extremos.

Examinemos primero una barra con apoyos articulados en sus extremos y los momentos en los extremos (fig. 79). Según la ecuación

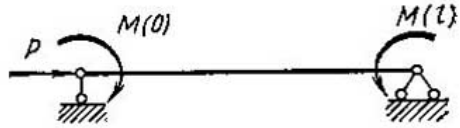


Fig. 79

(2.37) obtenemos

$$M(z) = A \operatorname{sen} az + M(0) \cos az;$$

donde

$$A = EJ\alpha y'(0) + \frac{M(l) - M(0)}{\alpha l}.$$

La condición de frontera en el extremo derecho es,

$$M(l) = A \operatorname{sen} \alpha l + M(0) \cos \alpha l.$$

Como consecuencia

$$A = \frac{M(l) - M(0) \cos \alpha l}{\operatorname{sen} \alpha l}.$$

Ahora la ecuación de los momentos de flexión es

$$M(z) = M(0)\left(\cos \alpha z - \frac{\cos \alpha l}{\operatorname{sen} \alpha \lambda} \operatorname{sen} \alpha z\right) + M(l) \frac{\operatorname{sen} \alpha z}{\operatorname{sen} \alpha l}. \quad (4.16)$$

Sustituimos el valor obtenido A en la expresión general (4.9)

$$EJ\Delta_{km} = a\left[\frac{M(l) - M(0)\cos \lambda}{\alpha \lambda \operatorname{sen} \lambda}(\lambda - \operatorname{sen} \lambda) + \frac{M(0)}{\alpha \lambda}(1 - \cos \lambda)\right] +$$

$$+ b\left[\frac{M(l) - M(0)\cos \lambda}{\alpha \lambda \operatorname{sen} \lambda}(\operatorname{sen} \lambda - \lambda \cos \lambda) + \frac{M(0)}{\alpha \lambda}(\cos \lambda - 1 + \lambda \operatorname{sen} \lambda)\right],$$

donde $\lambda = al$.

Después de realizar las transformaciones obtenemos la fórmula general Δ_{km} que en esencia es el resultado de la «multiplicación» de los diagramas (M) y $(\overline{M}_k)$ (fig. 80):

$$EJ\Delta_{km} = \frac{l}{6}[2aM(0) f_1^*(\lambda) + 2bM(l) f_1^*(\lambda) +$$

$$+ aM(l) f_2^*(\lambda) + bM(0) f_2^*(\lambda)], \quad (4.17)$$

donde

$$f_1^*(\lambda) = \frac{3}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\operatorname{tg} \lambda}\right); \quad (4.18)$$

$$f_2^*(\lambda) = \frac{6}{\lambda}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} \lambda} - \frac{1}{\lambda}\right). \quad (4.19)$$

Señalemos que con la ausencia de la fuerza longitudinal, cuando $\lambda = 0$, $f_1^*(0) = f_2^*(0) = 1$, la fórmula general (4.17) pasará a la conocida fórmula de «multiplicación» de dos trapecios.

Según la fórmula (4.17) obtenemos (fig. 81):

1) cuando $a = 1$, $b = 0$, $M(0) = 1$ y $M(l) = 0$

$$\bar{\alpha} = \frac{l}{3EJ} f_1^*(\lambda); \tag{4.20}$$

2) cuando $a = 0$, $b = 1$, $M(0) = 1$ y $M(l) = 0$

$$\bar{\beta} = \frac{l}{6EJ} f_2^*(\lambda). \tag{4.21}$$

Analógicamente (fig. 82):

$$\bar{\alpha} = \frac{l}{6EJ} f_2^*(\lambda); \tag{4.22}$$

$$\bar{\beta} = \frac{l}{3EJ} f_1^*(\lambda). \tag{4.23}$$

Ahora examinemos una barra empotrada en el extremo derecho

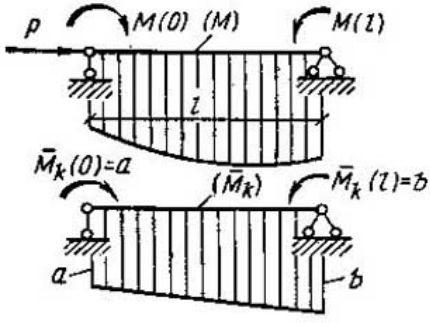


Fig. 80

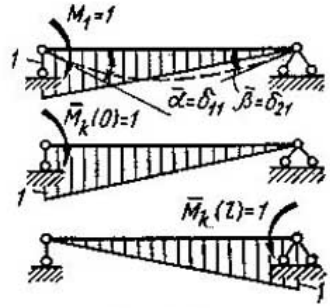


Fig. 81

y con una carga en el izquierdo (fig. 83). Según las expresiones (2.35) y (2.36) tenemos:

$$y(z) = y(0) + \frac{y'(0)}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha z - \frac{M(0)}{\alpha^2 EJ}(1 - \cos \alpha z) - \frac{Q(0)}{\alpha^3 EJ}(\alpha z - \operatorname{sen} \alpha z);$$

$$y'(z) = y'(0) \cos \alpha z - \frac{M(0)}{\alpha EJ} \operatorname{sen} \alpha z - \frac{Q(0)}{\alpha^2 EJ}(1 - \cos \alpha z).$$

Las condiciones de frontera en el extremo derecho son:

$$y(l) = y(0) + \frac{y'(0)}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha l - \frac{M(0)}{\alpha^2 EJ}(1 - \cos \alpha l) - \frac{Q(0)}{\alpha^3 EJ}(\alpha l - \operatorname{sen} \alpha l) = 0;$$

$$y'(l) = y'(0) \cos \alpha l \frac{M(0)}{\alpha EJ} \operatorname{sen} \alpha l - \frac{Q(0)}{\alpha^2 EJ}(1 - \cos \alpha l) = 0.$$

Solucionando estas ecuaciones obtenemos:

$$y(0) = \frac{M(0)}{\alpha^2 EJ}\left(1 - \frac{1}{\cos \alpha l}\right) + \frac{Q(0)}{\alpha^3 EJ}(\alpha l - \operatorname{tg} \alpha l); \qquad (4.24)$$

$$y'(0) = \frac{M(0)}{\alpha EJ} \operatorname{tg} \alpha l + \frac{Q(0)}{\alpha^2 EJ}\left(\frac{1}{\cos \alpha l} - 1\right). \qquad (4.25)$$

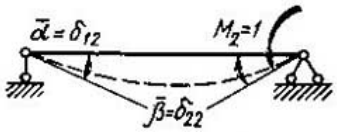


Fig. 82

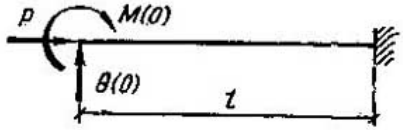


Fig. 83

La ecuación de los momentos de flexión según la ecuación (2.37) es

$$M(z) = M(0)(\operatorname{tg} \alpha l \operatorname{sen} \alpha z + \cos \alpha z) + \frac{Q(0)}{\alpha \cos \alpha l} \operatorname{sen} \alpha z. \qquad (4.26)$$

De la (4.25) obtenemos:

$$y'(0) + \frac{Q(0)}{\alpha^2 EJ} = \frac{M(0)}{\alpha EJ} \operatorname{tg} \lambda + \frac{Q(0)}{\alpha^2 EJ \cos \lambda}.$$

Por consiguiente, según la ecuación (4.8), tenemos

$$A = M(0) \operatorname{tg} \lambda + \frac{Q(0)}{\alpha \cos \lambda}.$$

Sustituyendo A en la expresión principal (4.9), obtenemos:

$$EJ\Delta_{km} = \frac{a}{\alpha\lambda}\left[\left(M(0) \operatorname{tg} \lambda + \frac{Q(0)}{\alpha \cos \lambda}\right)(\lambda - \operatorname{sen} \lambda) + M(0)(1 - \cos \lambda)\right] +$$
$$+ \frac{b}{\alpha\lambda}\left[\left(M(0) \operatorname{tg} \lambda + \frac{Q(0)}{\alpha \cos \lambda}\right)(\operatorname{sen} \lambda - \lambda \cos \lambda) +\right.$$
$$\left. + M(0)(\cos \lambda - 1 + \lambda \operatorname{sen} \lambda)\right].$$

Al simplificar tenemos:

$$EJ\Delta_{km} = \frac{l}{6}[2aM(0) f_3^*(\lambda) + 2bM(l) f_4^*(\lambda) +$$
$$+ aM(l) f_5^*(\lambda) + bM(0) f_6^*(\lambda)], \qquad (4.27)$$

donde $M(l) = M(0) + Q(0)\, l$ (sin tener en cuenta el momento de la fuerza longitudinal);

$$f_3^*(\lambda) = \frac{3}{\lambda^2}\left(\lambda \operatorname{tg} \lambda - \frac{2}{\cos \lambda} + 1 + \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\lambda}\right); \qquad (4.28)$$

$$f_4^*(\lambda) = \frac{3}{\lambda^2}\left(\frac{\operatorname{tg} \lambda}{\lambda} - 1\right); \qquad (4.29)$$

$$f_5^*(\lambda) = \frac{6}{\lambda^2}\left(\frac{1}{\cos \lambda} - \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\lambda}\right). \qquad (4.30)$$

La fórmula (4.27) también es el resultado de la multiplicación de los diagramas (M) y $(\overline{M}_k)$ (fig. 84). Según ésta podemos escribir (fig. 85):

1) para obtener δ_{11} hay que suponer que $a = 0$; $b = l$; $M(0) = 0$; $M(l) = l$:

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ} f_4^*(\lambda) = \frac{l^3}{3EJ} \frac{3}{\lambda^2} \left(\frac{\operatorname{tg} \lambda}{\lambda} - 1 \right); \qquad (4.31)$$

2) para obtener δ_{21} hay que suponer que $a = 1$; $b = 1$; $M(0) = 0$; $M(l) = l$:

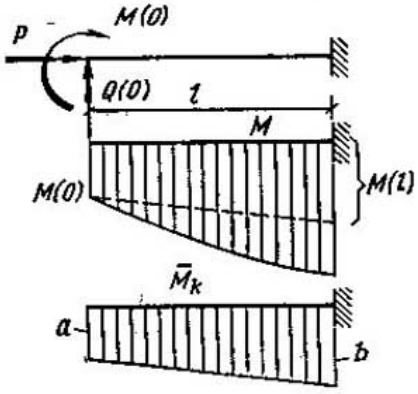


Fig. 84

$$\delta_{21} = \frac{l}{6EJ} [2lf_4^*(\lambda) + lf_5^*(\lambda)] =$$

$$= \frac{l^3}{6EJ} \frac{6}{\lambda^3} \left(\frac{1}{\cos \lambda} - 1 \right); \qquad (4.32)$$

3) para obtener δ_{22} hay que suponer que $a = 1$; $b = 1$; $M(0) = 1$; $M(l) = 1$:

$$\delta_{22} = \frac{l}{6EJ} [2f_3^*(\lambda) + 2f_4^*(\lambda) + 2f_5^*(\lambda)] =$$

$$= \frac{l}{6EJ} \frac{6}{\lambda} \operatorname{tg} \lambda; \qquad (4.33)$$

4) para obtener δ_{12} hay que suponer que $a = 0$; $b = l$; $M(0) = 1$; $M(l) = 1$:

$$\delta_{12} = \frac{l}{6EJ} [2lf_4^*(\lambda) + lf_5^*(\lambda)] = \frac{l^3}{6EJ} \frac{6}{\lambda^2} \left(\frac{1}{\cos \lambda} - 1 \right). \text{ (véase 4.32)}$$

De acuerdo con las fórmulas (4.20) — (4.23) los ángulos de giro

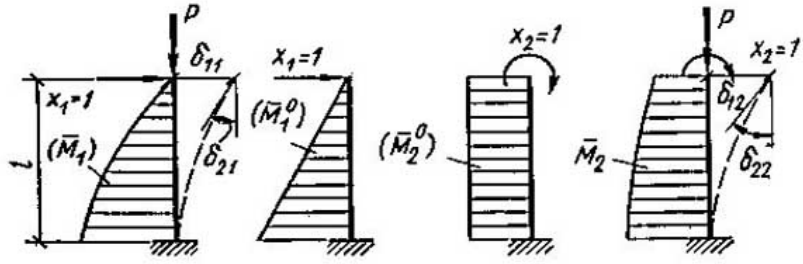


Fig. 85

de la viga (fig. 79) producidos por los momentos de apoyo son:

a) en el apoyo izquierdo en sentido de las agujas del reloj

$$y'(0) = \frac{M(0)\, l}{3EJ} f_1^*(\lambda) + \frac{M(l)\, l}{6EJ} f_2^*(\lambda); \qquad (4.34)$$

b) en el apoyo derecho en sentido contrario de las agujas del reloj

$$y'(l) = \frac{M(0)\,l}{6EJ} f_2^*(\lambda) + \frac{M(l)\,l}{3EJ} f_1^*(\lambda). \qquad (4.35)$$

Los valores numéricos $f_1^*(\lambda), \ldots, f_5^*(\lambda)$ se dan en el anexo 3 [29].

Para determinar los traslados del tipo δ_{km} en la fórmula (4.1) por M_m hay que tomar los momentos de $X_k = 1$ ó $X_m = 1$ en el sistema básico teniendo en cuenta la compresión de los elementos debida a la carga, y por $\overline{M}_k$ hay que tomar respectivamente, de $X_m = 1$ ó $X_k = 1$ sin tener en cuenta la carga.

Como conclusión señalemos que el método de las fuerzas en la estabilidad, al igual que en la dinámica frecuentemente (pero no siempre) cede al método de desplazamientos que examinaremos más adelante.

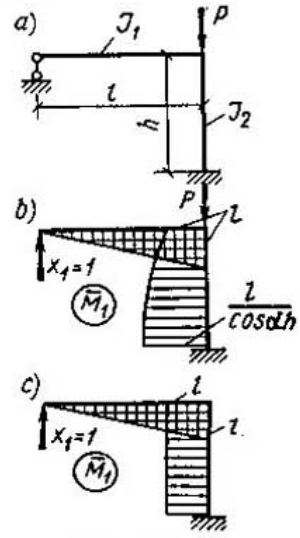


Fig. 86

Ejemplo 16. Determinar la fuerza crítica para el pórtico (fig. 86, *a*). El sistema básico y el diagrama de los momentos de $X_1 = 1$ considerando la compresión del pilar se demuestran en la fig. 86, *b*, y el diagrama unitario de $X_1 = 1$ sin tener en cuenta la compresión del pilar se indica en la fig. 86,*c*. La ecuación canónica es $\delta_{11} X_1 = 0$.

Según la fórmula (4.26) obtenemos la ecuación de los momentos en el pilar debido a $X_1 = 1$, considerando z desde la parte superior del pilar:

$$\overline{M}_1 = l\,(\operatorname{tg} \alpha h \operatorname{sen} \alpha z + \cos \alpha z).$$

Según la fórmula (4.1) hallamos:

$$\delta_{11} = \frac{ll}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{l}{EJ_1} + \frac{1}{EJ_2} \int_0^h ll\,(\operatorname{tg} \alpha h \operatorname{sen} \alpha z + \cos \alpha z)\,dz.$$

Luego de la transformación obtenemos

$$\delta_{11} = \frac{l}{3J_1} + \frac{h}{J_2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha h}{\alpha h} = 0;$$

si $J_1 = \infty$, entonces $\operatorname{tg} \alpha h = 0$; $\alpha h = \pi$; $P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EJ}{h^2}$;

si $J_1 = 0$, entonces $\operatorname{tg} \alpha h = \infty$; $\alpha h = \dfrac{\pi}{2}$; $P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EJ}{4h^2}$.

§ 19. ESTABILIDAD DE LOS PÓRTICOS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADOS SEGÚN EL MÉTODO DE DESPLAZAMIENTOS. El sistema básico es igual que el cálculo ordinario de

los pórticos según el método de desplazamientos (fig. 87). Las ecuaciones canónicas son:

$$r_{k1}Z_1 + r_{k2}Z_2 + \ldots + r_{kn}Z_n = 0 \qquad (4.36)$$
$$(\text{cuando } k = 1, 2, \ldots, n).$$

Los miembros libres de las ecuaciones canónicas (4.36) son iguales a cero ya que la carga dada es *nodal*, con la cual cada elemento libre del sistema dado, es decir, que tiene desplazamientos lineales de los extremos, obligatoriamente está cargado con dos fuerzas

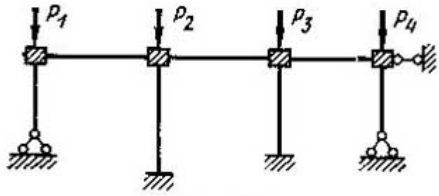


Fig. 87

iguales en los extremos dirigidas a diferentes lados, a lo largo de la barra cuya suma de los momentos, con respecto a los puntos representativos de aplicación de estas fuerzas será igual a cero.

Al perder la estabilidad en el caso general $Z_1, \ldots, Z_n$ no son iguales a cero, por lo tanto para obtener las ecuaciones de la estabilidad hay que igualar a cero el determinante de las ecuaciones canónicas:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \ldots & r_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{n1} & r_{n2} & \ldots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.37)$$

Las ecuaciones (4.36) en forma de matriz son:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{Z} = 0, \qquad (4.38)$$

donde

$$\mathbf{R} = \| r_{km} \| = \begin{Vmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \ldots & r_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{n1} & r_{n2} & \ldots & r_{nn} \end{Vmatrix} \qquad (4.39)$$

es la matriz de los coeficientes de las ecuaciones canónicas;

$$\mathbf{Z} = | \{Z_1 Z_2 \ldots Z_n\} |; \qquad (4.40)$$

es la matriz-columna (vector) de las incógnitas.

Conforme a la ecuación (4.37), tenemos

$$D = | \mathbf{R} \cdot \mathbf{Z} | = 0. \qquad (4.41)$$

En los casos cuando con $Z_1 = \ldots = Z_n = 0$ la pérdida de la estabilidad es físicamente posible, es decir, cuando estos datos posibilitan la coincidencia de algunas de las formas de pérdida de la esta-

bilidad del sistema básico y del dado, ésta también debe ser examinada.

Para calcular los coeficientes de las ecuaciones canónicas es necesario investigar anticipadamente la flexión longitudinal de los elementos estándares del sistema básico en condiciones de los desplazamientos de sus extremos, lo que haremos posteriormente.

BARRA EMPOTRADA EN SUS DOS EXTREMOS (FIG. 88)

Examinamos el caso general de los desplazamientos de los extremos de la barra. Todas las magnitudes en el plano son positivas. Los parámetros iniciales son: $y\ (0) = 0$; $y'\ (0) = \varphi_a$; $M\ (0) = M_{ab}$;

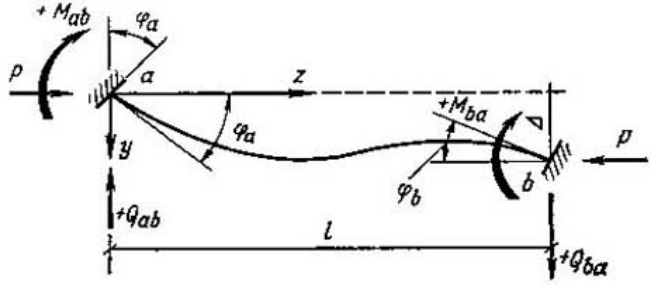


Fig. 88

$Q\ (0) = Q_{ab}$. Según la condición del equilibrio tenemos:

$$Q_{ab} = Q_{ba} = -\frac{M_{ab} + M_{ba}}{l} - \alpha^2 EJ\,\frac{\Delta}{l}. \qquad (4.42)$$

De acuerdo a las ecuaciones generales (2.35) y (2.36) obtenemos:

$$y(z) = \frac{\varphi_a}{\alpha}\operatorname{sen}\alpha z - \frac{M_{ab}}{\alpha^2 EJ}(1-\cos\alpha z) + \frac{\frac{M_{ab}+M_{ba}}{l} + \alpha^2 EJ\,\frac{\Delta}{l}}{\alpha^3 EJ}(\alpha z - \operatorname{sen}\alpha z);$$

$$y'(z) = \varphi_a\cos\alpha z - \frac{M_{ab}}{\alpha EJ}\operatorname{sen}\alpha z + \left(\frac{M_{ab}+M_{ba}}{l\alpha^2 EJ} + \frac{\Delta}{l}\right)(1-\cos\alpha z).$$

Componemos las condiciones de frontera en el extremo derecho cuando $z = l$:

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= \frac{\varphi_a}{\alpha}\operatorname{sen}\lambda - \frac{M_{ab}}{\alpha^2 EJ}(1-\cos\lambda) + \\ &+ \left(\frac{M_{ab}+M_{ba}}{\lambda\alpha^2 EJ} + \frac{\Delta}{l}\right)(\lambda - \operatorname{sen}\lambda); \\ \varphi_b &= \varphi_a\cos\lambda - \frac{M_{ab}}{\alpha EJ}\operatorname{sen}\lambda + \\ &+ \left(\frac{M_{ab}+M_{ba}}{\lambda\alpha EJ} + \frac{\Delta}{l}\right)(1-\cos\lambda), \end{aligned}\right\} \qquad (4.43)$$

donde

$$\lambda = \alpha l.$$

Al transformar obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} &M_{ab}\left(\cos\lambda - \frac{\operatorname{sen}\lambda}{\lambda}\right) + M_{ba}\left(1 - \frac{\operatorname{sen}\lambda}{\lambda}\right) + \\ &\quad + \alpha^2 EJ\left(\frac{\varphi_a}{\alpha}\operatorname{sen}\lambda - \Delta\frac{\operatorname{sen}\lambda}{\lambda}\right) = 0; \\ &\frac{M_{ab}}{l}(1 - \cos\lambda - \lambda\operatorname{sen}\lambda) + \frac{M_{ba}}{l}(1 - \cos\lambda) + \\ &\quad + \alpha^2 EJ\left[\varphi_a\cos\lambda - \varphi_b + \frac{\Delta}{l}(1 - \cos\lambda)\right] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (4.44)$$

Resolviendo estas ecuaciones con respecto a φ_a y φ_b tenemos:

$$\varphi_a = \frac{M_{ab}}{\alpha^2 EJl}\left(1 - \frac{\lambda}{\operatorname{tg}\lambda}\right) + \frac{M_{ba}}{\alpha^2 EJl}\left(1 - \frac{\lambda}{\operatorname{sen}\lambda}\right) + \frac{\Delta}{l}; \quad (4.45)$$

$$\varphi_b = \frac{M_{ab}}{\alpha^2 EJl}\left(1 - \frac{\lambda}{\operatorname{sen}\lambda}\right) + \frac{M_{ba}}{\alpha^2 EJl}\left(1 - \frac{\lambda}{\operatorname{tg}\lambda}\right) + \frac{\Delta}{l}. \quad (4.46)$$

Resolviendo con relación a M_{ab} y M_{ba} obtenemos:

$$M_{ab} = 4i\mu_1^*(\lambda)\varphi_a + 2i\mu_2^*(\lambda)\varphi_b - \frac{6i}{l}\mu_3^*(\lambda)\Delta; \quad (4.47)$$

$$M_{ba} = 2i\mu_2^*(\lambda)\varphi_a + 4i\mu_1^*(\lambda)\varphi_b - \frac{6i}{l}\mu_3^*(\lambda)\Delta \quad (4.48)$$

donde

$$i = EJ : l; \quad \lambda = \alpha l;$$

$$\mu_1^*(\lambda) = \frac{\lambda(\operatorname{sen}\lambda - \lambda\cos\lambda)}{4(2 - 2\cos\lambda - \lambda\operatorname{sen}\lambda)} = \frac{\lambda}{8\operatorname{tg}\lambda}\,\frac{\operatorname{tg}\lambda - \lambda}{\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}}; \quad (4.50)$$

$$\mu_2^*(\lambda) = \frac{\lambda(\lambda - \operatorname{sen}\lambda)}{2(2 - 2\cos\lambda - \lambda\operatorname{sen}\lambda)} = \frac{\lambda}{4\operatorname{sen}\lambda}\,\frac{\lambda - \operatorname{sen}\lambda}{\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}}; \quad (4.51)$$

$$\mu_3^*(\lambda) = \frac{\lambda^2(1 - \cos\lambda)}{6(2 - 2\cos\lambda - \lambda\operatorname{sen}\lambda)} = \frac{1}{12}\,\frac{\lambda^2\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}}; \quad (4.52)$$

$$\mu_3^*(\lambda) = \mu_7^*\left(\frac{\lambda}{2}\right) \text{ [véase (4.62)]};$$

$$\mu_3^*(\lambda) = \frac{4\mu_1^*(\lambda) + 2\mu_2^*(\lambda)}{6}. \quad (4.53)$$

Componemos la suma de los momentos:

$$M_{ab} + M_{ba} = 6i\mu_3^*(\lambda)\varphi_a + 6i\mu_3^*(\lambda)\varphi_b - \frac{12i}{l}\mu_3^*(\lambda)\Delta. \quad (4.54)$$

Según la ecuación (4.42)

$$Q_{ab} = Q_{ba} = -\frac{6i}{l}\mu_3^*(\lambda)\varphi_a - \frac{6i}{l}\mu_3^*(\lambda)\varphi_b + \frac{12i}{l^2}\mu_4^*(\lambda)\Delta, \quad (4.55)$$

donde

$$\mu_4^*(\lambda) = \mu_3^*(\lambda) - \frac{\lambda^2}{12} = \frac{\lambda^3 \operatorname{sen}\lambda}{12(2-2\cos\lambda-\lambda\operatorname{sen}\lambda)} = \frac{\lambda^3}{24\left(\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2}\right)}; \quad (4.56)$$

$$\mu_4^*(\lambda) = \mu_8^*\left(\frac{\lambda}{2}\right).$$

Hallamos el desplazamiento de los extremos Δ^* cuando $Q_{ab} = Q_{ba} = 0$:

$$-\frac{6i}{l}\mu_3^*(\lambda)\varphi_a - \frac{6i}{l}\mu_3^*(\lambda)\varphi_b + \frac{12i}{l^2}\mu_4^*(\lambda)\Delta^* = 0.$$

De aquí resulta

$$\Delta^* = \frac{\mu_3^*(\lambda)}{\mu_4^*(\lambda)}(\varphi_a+\varphi_b)\frac{l}{2} = \frac{1-\cos\lambda}{\lambda\operatorname{sen}\lambda}(\varphi_a+\varphi_b)\,l.$$

Sustituyendo estos valores en las fórmulas (4.47) y (4.48) obtenemos:

$$M_{ab} = i\mu_5^*(\lambda)\varphi_a + i\mu_6^*(\lambda)\varphi_b; \quad (4.57)$$

$$M_{ba} = i\mu_6^*(\lambda)\varphi_a + i\mu_5^*(\lambda)\varphi_b, \quad (4.58)$$

donde

$$\mu_5^*(\lambda) = \frac{\lambda}{\operatorname{tg}\lambda}; \quad (4.59)$$

$$\mu_6^*(\lambda) = -\frac{\lambda}{\operatorname{sen}\lambda}. \quad (4.60)$$

Los valores numéricos de las funciones $\mu_1^*(\lambda), \ldots, \mu_4^*(\lambda)$ tomados de [29] están representados en el anexo 4.

BARRA EMPOTRADA POR UN EXTREMO (IZQUIERDO), CON APOYO ARTICULADO EN EL DERECHO (FIG. 89)

En este caso $M_{ba} = 0$. Según la expresión (4.48) tenemos:

$$2i\mu_2^*(\lambda)\varphi_a + 4i\mu_1^*(\lambda)\varphi_b - \frac{6i}{l}\mu_3^*(\lambda)\Delta = 0.$$

De aquí

$$\varphi_b = -\frac{\mu_2^*(\lambda)}{2\mu_1^*(\lambda)}\varphi_a + \frac{3}{2l}\frac{\mu_3^*(\lambda)}{\mu_1^*(\lambda)}\Delta.$$

Sustituyendo el valor de esta expresión en la fórmula (4.47) obtendremos:

$$M_{ab} = 4i\mu_1^*(\lambda)\,\varphi_a + 2i\mu_2^*(\lambda)\left[-\frac{\mu_3^*(\lambda)}{2\mu_1^*(\lambda)}\,\varphi_a + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{2l}\,\frac{\mu_3^*(\lambda)}{\mu_1^*(\lambda)}\,\Delta\right] - \frac{6i}{l}\,\mu_3^*(\lambda)\,\Delta.$$

Después de realizar las transformaciones obtenemos en forma definitiva

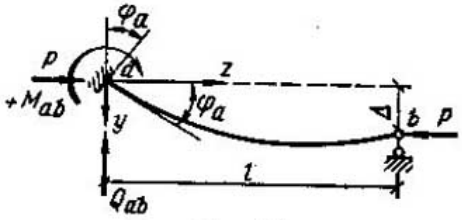


Fig. 89

$$M_{ab} = 3i\mu_7^*(\lambda)\,\varphi_a - \frac{3i}{l}\,\mu_7^*(\lambda)\,\Delta, \qquad (4.61)$$

donde

$$\mu_7^*(\lambda) = \frac{\lambda^2 \operatorname{sen}\lambda}{3(\operatorname{sen}\lambda - \lambda\cos\lambda)} = \frac{\lambda^2 \operatorname{tg}\lambda}{3(\operatorname{tg}\lambda - \lambda)}. \qquad (4.62)$$

Las fuerzas transversales las hallamos según la condición de equilibrio

$$Q_{ab} = Q_{ba} = -\frac{M_{ab}}{l} - \alpha^2 EJ\,\frac{\Delta}{l}.$$

Teniendo en cuenta la fórmula (4.61) obtenemos

$$Q_{ab} = -\frac{3i}{l}\,\mu_7^*(\lambda)\,\varphi_a + \frac{3i}{l^2}\,\mu_8^*(\lambda)\,\Delta, \qquad (4.63)$$

donde

$$\mu_8^*(\lambda) = \mu_7^*(\lambda) - \frac{\lambda^2}{3} = \frac{\lambda^3\cos\lambda}{3(\operatorname{sen}\lambda - \lambda\cos\lambda)} = \frac{\lambda^3}{3(\operatorname{tg}\lambda - \lambda)} \qquad (4.64)$$

Hallamos Δ^* con el cual $Q_{ab} = Q_{ba} = 0$, es decir

$$-\frac{3i}{l}\,\mu_7^*(\lambda)\,\varphi_a + \frac{3i}{l^2}\,\mu_8^*(\lambda)\,\Delta^* = 0$$

Expresamos Δ^* por medio de φ_a:

$$\Delta^* = l\,\frac{\mu_7^*(\lambda)}{\mu_8^*(\lambda)}\,\varphi_a.$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula (4.61) tenemos:

$$M_{ab} = i\mu_9^*(\lambda)\,\varphi_a, \qquad (4.65)$$

donde

$$\mu_6^*(\lambda) = -\lambda \operatorname{tg} \lambda. \tag{4.66}$$

Señalemos que la expresión (4.61) se puede obtener también según la ecuación (2.35).

Escribimos la condición de frontera en el extremo derecho (fig. 89):

$$y(l) = \frac{\varphi_a}{\alpha} \operatorname{sen} \lambda - \frac{M(0)}{\alpha^2 EJ}(1 - \cos \lambda) - \frac{Q(0)}{\alpha^3 EJ}(\lambda - \operatorname{sen} \lambda) = \Delta. \quad \text{(a)}$$

Según la condición de equilibrio tenemos:

$$P\Delta + Q(0)\, l + M(0) = 0.$$

De aquí $Q(0) = -\frac{M(0) + P\Delta}{l}$

Sustituyendo el valor de esta expresión en (a) obtenemos (4.61).

Los valores numéricos $\mu_7^*(\lambda) - \mu_8^*(\lambda)$ están representados en el anexo 4 (véase [29]).

BARRA CON EMPOTRAMIENTOS DESLIZABLES

1er caso (fig. 90): giro del extremo izquierdo en una unidad. Según las fórmulas (2.35) y (2.36) escribimos las condiciones de frontera en el extremo derecho:

$$y(l) = \Delta^* = \frac{1}{\alpha} \operatorname{sen} \lambda - \frac{M(0)}{\alpha^2 EJ}(1 - \cos \lambda); \tag{b}$$

$$y'(l) = \cos \lambda - \frac{M(0)}{\alpha EJ} \operatorname{sen} \lambda = 0, \tag{c}$$

donde

$$\lambda = \alpha l.$$

De la última ecuación obtenemos:

$$M(0) = \frac{EJ}{l} \frac{\lambda}{\operatorname{tg} \lambda} = i \frac{\lambda}{\operatorname{tg} \lambda}. \tag{4.67}$$

Según la condición de equilibrio

$$P\,\Delta^* + M(0) + M(l) = 0.$$

De aquí $M(l) = -M(0) - P\,\Delta^*$.

Teniendo en cuenta (b) y (4.67) tenemos:

$$M(l) = -\frac{EJ}{l} \frac{\lambda}{\operatorname{sen} \lambda} = -i \frac{\lambda}{\operatorname{sen} \lambda}. \tag{4.68}$$

Obtenemos los mismos resultados si el empotramiento deslizable se encuentra en el extremo derecho (fig. 91).

2º caso: giro del extremo derecho en una unidad con el empotramiento deslizable izquierdo (fig. 92, *a*). Según las fórmulas (2.35)

y (2.36) escribimos las condiciones de contorno en el extremo derecho:

$$y(l) = y(0) - \frac{M(0)}{\alpha^2 EJ}(1 - \cos\lambda) = 0; \qquad \text{(d)}$$

$$y'(l) = -\frac{M(0)}{\alpha EJ}\operatorname{sen}\lambda = 1. \qquad \text{(e)}$$

De la ecuación (e) tenemos:

$$M(0) = -\frac{EJ}{l}\frac{\lambda}{\operatorname{sen}\lambda} = -i\frac{\lambda}{\operatorname{sen}\lambda}. \qquad (4.69)$$

Según la condición de equilibrio: $M(l) = -M(0) + Py(0)$. Te-

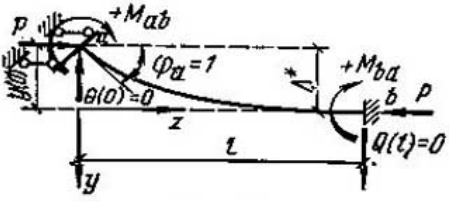


Fig. 90

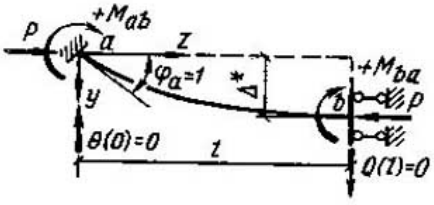


Fig. 91

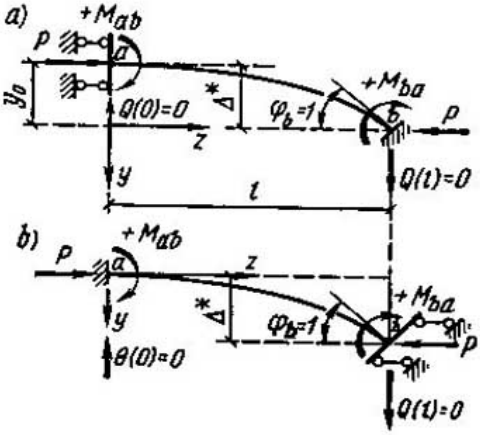


Fig. 92

niendo en cuenta (d) y (4.69):

$$M(l) = \frac{EJ}{l}\frac{\lambda}{\operatorname{tg}\lambda} = i\frac{\lambda}{\operatorname{tg}\lambda}. \qquad (4.70)$$

Los mismos resultados obtenemos con el empotramiento deslizable del extremo derecho (fig. 92, *b*).

3er caso: giro del extremo izquierdo en una unidad con el empotramiento deslizable izquierdo (fig. 93) y el apoyo articulado derecho. Según la fórmula (2.35) escribimos la condición de frontera en el extremo derecho:

$$y(l) = y(0) + \frac{\operatorname{sen}\lambda}{\alpha} - \frac{M(0)}{\alpha^2 EJ}(1 - \cos\lambda) = 0. \qquad \text{(f)}$$

Según la condición de equilibrio

$$M(0) - Py(0) = 0.$$

De ello

$$y(0) = \frac{M(0)}{P} = \frac{M(0)}{\alpha^2 EJ}.$$

Ahora la ecuación (f) es la siguiente:

$$\frac{M(0)}{\alpha^2 EJ} + \frac{\operatorname{sen}\lambda}{\alpha} - \frac{M(0)}{\alpha^2 EJ}(1 - \cos\lambda) = 0.$$

De ella obtenemos

$$M(0) = -\frac{EJ}{l}\lambda \operatorname{tg}\lambda = -i\lambda \operatorname{tg}\lambda. \qquad (4.71)$$

En la tabla 3 están representados los valores de los momentos y las fuerzas transversales en los extremos de la barra con los dife-

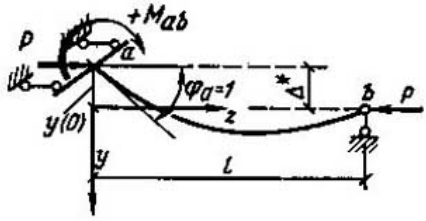


Fig. 93

rentes desplazamientos obtenidos según las expresiones (4.47) — (4.71). Los valores numéricos de las funciones de esta tabla están representados en [29].

Hay que señalar que cuando el pórtico posea varias barras comprimidas, para ellas habrán diferentes $\lambda = \alpha l$. Por eso, al componer el determinante (4.37) hay que reducir todas las λ_i a algún valor, por ejemplo $\lambda_k = \alpha_k l_k$. Esto se hace basándose en tales razonamientos:

$$\lambda_k = \alpha_k l_k = \sqrt{N_k : E_k J_k}\; l_k;$$

$$\lambda_i = \alpha_i l_i = \sqrt{N_i : E_i J_i}\; l_i.$$

Comparando entre sí estas expresiones obtenemos:

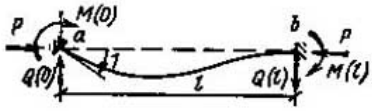
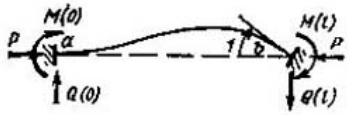
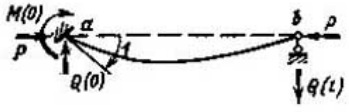
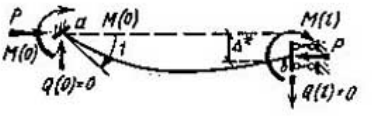
$$\lambda_i = \lambda_k \frac{l_i}{l_k} \sqrt{\frac{N_i E_k J_k}{N_k E_i J_i}}. \qquad (4.72)$$

Después de determinar partiendo de (4.37) el valor de λ_k la fuerza longitudinal crítica en la k-ésima barra N_k se determina según la fórmula

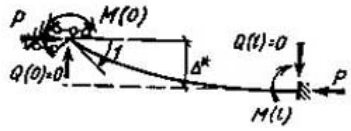
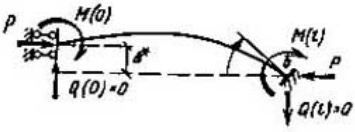
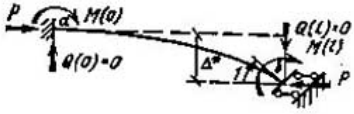
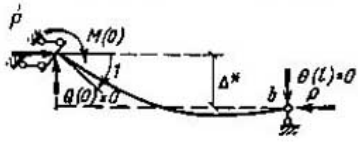
$$N_{k,\,cr} = \frac{\lambda_k^2}{l_k^2} E_k J_k. \qquad (4.73)$$

Si el marco es simétrico deben aplicarse los traslados pares en grupo y estudiar por separado las formas antisimétricas y simétricas de la pérdida de la estabilidad.

Tabla 3. $\lambda = \alpha l = \sqrt{P : EJ}\, l$

Nº de orden	Tipo de desplazamiento	$M(0) = M_{ab}$	$M(l) = M_{ba}$	$Q(0) = Q(l)$
1		$4i\mu_1^*(\lambda)$ $\mu_1^*(\lambda)$ según (4.50)	$2i\mu_2^*(\lambda)$ $\mu_2^*(\lambda)$ según (4.51)	$-\frac{6i}{l}\mu_3^*(\lambda)$ $\mu_3^*(\lambda)$ según (4.52)
2		$2i\,\mu_2^*(\lambda)$	$4i\,\mu_1^*(\lambda)$	$-\frac{6i}{l}\mu_3^*(\lambda)$
3		$-\frac{6i}{l}\mu_3^*(\lambda)$	$-\frac{6i}{l}\mu_3^*(\lambda)$	$\frac{12i}{l^2}\mu_4^*(\lambda)$ $\mu_4^*(\lambda)$ según (4.56)
4		$3i\,\mu_7^*(\lambda)$ $\mu_7^*(\lambda)$ según (4.62)	0	$-\frac{3i}{l}\mu_7^*(\lambda)$
5		$-\frac{3i}{l}\mu_7^*(\lambda)$	0	$\frac{3i}{l^2}\mu_8^*(\lambda)$ $\mu_8^*\lambda$ según (4.64)
6		$l\frac{\lambda}{\operatorname{tg}\lambda}$ según (4.67)	$l\frac{\lambda}{\operatorname{sen}\lambda}$ según (4.68)	0

Continuación de la tabla 3

N° de orden	Tipo de desplazamiento	$M(0) = M_{ab}$	$M(l) = M_{ba}$	$Q(0) = Q(l)$
7		$i\dfrac{\lambda}{\operatorname{tg}\lambda}$	$-i\dfrac{\lambda}{\operatorname{sen}\lambda}$	0
8		$-i\dfrac{\lambda}{\operatorname{sen}\lambda}$ según (4.69)	$i\dfrac{\lambda}{\operatorname{tg}\lambda}$ (según 4.70)	0
9		$-i\dfrac{\lambda}{\operatorname{sen}\lambda}$	$i\dfrac{\lambda}{\operatorname{tg}\lambda}$	0
10		$-i\lambda\operatorname{tg}\lambda$ según (4.71)	0	0

En conclusión señalemos, que el sistema básico con un número incompleto de los enlaces es posible (fig. 94), pero requiere un estudio anticipado del elemento complicado en forma de pórtico.

Ejemplo 17. Determinar exacta y aproximadamente la fuerza crítica para el pórtico (fig. 95, *a*).

1. SOLUCIÓN EXACTA

La solución exacta la realizamos de acuerdo al método de desplazamientos. Ya que el pórtico tiene un solo pilar comprimido, entonces para obtener el sistema base, puede introducirse sólo un enlace del momento (fig. 95, *b*).

La ecuación canónica es $r_{11}Z_1 = 0$.

El estado del pórtico con el giro unitario del enlace de momento está representado en la fig. 95, *c* y el diagrama de los momentos de flexión que le corresponde, en la fig. 95, *d*, trazado teniendo en cuenta el décimo caso de la tabla 3 para el pilar comprimido. Del equilibrio del nudo recortado del pórtico en estado deformado (véase la fig. 95, d) determinamos que

$$r_{11} = -\frac{EJ}{l}\lambda\operatorname{tg}\lambda + \frac{3kEJ}{l} = 0.$$

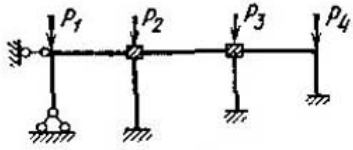


Fig. 94

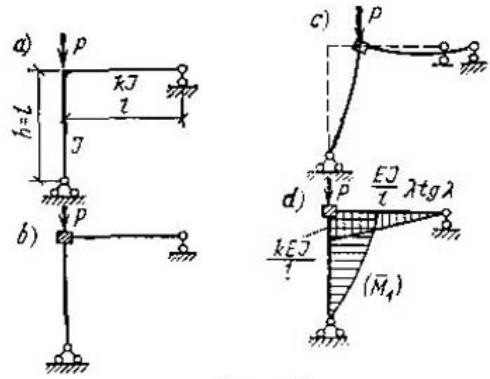


Fig. 95

Ahora la ecuación canónica será:

$$\left(-\frac{EJ}{l}\lambda \operatorname{tg}\lambda+\frac{3kEJ}{l}\right)Z_1=0.$$

La solución trivial cuando $Z_1 = 0$, es posible solamente cuando $k = \infty$. Por consiguiente la ecuación de la estabilidad es:

$$r_{11}=-\frac{EJ}{l}\lambda \operatorname{tg}\lambda+\frac{3kEJ}{l}=0.$$

De aquí

$$\lambda \operatorname{tg}\lambda = 3k. \qquad \text{(a)}$$

Esta ecuación se soluciona combinando λ.
Examinemos varios casos:
1) $k = 1$; $\lambda \operatorname{tg}\lambda = 3$; esta combinación determina que $\lambda = 1{,}193$:

$$P_{cr}=\frac{\lambda^2 EJ}{l^2}=\frac{1{,}193^2 EJ}{l^2}=1{,}423\frac{EJ}{l^2};$$

2) $k = 10$; $\lambda \operatorname{tg}\lambda = 30$; esta combinación determina que $\lambda = 1{,}521$:

$$P_{cr}=1{,}521^2\frac{EJ}{l^2}=2{,}313\frac{EJ}{l^2};$$

3) $k=\infty$; $\lambda \operatorname{tg}\lambda=\infty$; $\lambda=\frac{\pi}{2}=1{,}57$;

$$P_{cr}=1{,}57^2\frac{EJ}{l^2}=2{,}465\frac{EJ}{l^2},$$

que corresponde al segundo caso (véase la fig. 41) o al sexto (fig. 46).

2. SOLUCIÓN APROXIMADA

El pórtico es estáticamente determinado y en él se puede fácilmente construir un diagrama aproximado de los momentos de flexión en estado de deformación, en dependencia del desplazamiento supuesto y los parámetros que los determinan (fig. 96).

Examinemos el desplazamiento del pórtico determinado primeramente con un solo parámetro, que es el traslado horizontal del nudo del pórtico Δ_1 (fig. 96, *a*). Hallamos este desplazamiento,

de acuerdo a las reglas ordinarias. Con este fin aplicamos la fuerza horizontal $P = 1$ al nudo y a partir de ella construimos el diagrama de los momentos $(\overline{M}_1)$ (fig. 96, *c*). Cambiando el diagrama curvilíneo

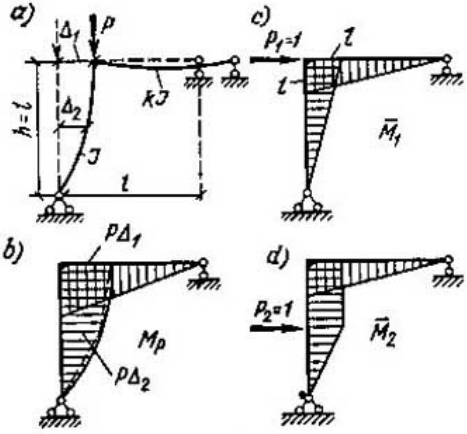


Fig. 96

en el pilar (M_p) (fig. 96, *b*) por uno aproximadamente triangular podemos escribir:

$$\Delta_1 = (M_p)(\overline{M}_1) = \frac{P\Delta_1 l}{2}\frac{2}{3}\frac{l}{EJ}\frac{P\Delta_1 l}{2}\frac{2}{3}\frac{l}{kEJ}.$$

De aquí

$$P_{cr} = \frac{3}{\left(1+\frac{1}{k}\right)}\frac{EJ}{l^2}; \qquad \text{(b)}$$

1) $k = 1$; $P_{cr} = 1{,}5\ EJ : l^2$ (el valor exacto de $P_{cr} = 1{,}42\ EJ : l^2$);
2) $k = 10$; $P_{cr} = 2{,}73\ EJ : l^2$ (el valor exacto de $P_{cr} = 2{,}313\ EJ : l^2$);
3) $k = \infty$; $P_{cr} = 3{,}00\ EJ : l^2$ (el valor exacto de $P_{cr} = 2{,}465\ EJ : l^2$).

Si el diagrama en el pilar se toma por la mitad del segmento parabólico obtenemos:

$$\Delta_1 = \frac{2}{3}P\Delta_1 l_1 \frac{5}{8}\frac{l}{EJ} + \frac{P\Delta_1 l}{2}\frac{2}{3}\frac{l}{kEJ}. \qquad \text{(c)}$$

De ello se desprende,

$$P_{cr} = \frac{24k}{10k+8}\frac{EJ}{l^2}; \qquad \text{(d)}$$

1) $k = 1$; $P_{cr} = 1{,}333\ EJ : l^2$;
2) $k = 10$; $P_{cr} = 2{,}222\ EJ : l^2$;
3) $k = \infty$; $P_{cr} = 2{,}400\ EJ : l^2$.

Precisemos la solución suponiendo que el desplazamiento del pórtico se determina con dos parámetros: con el desplazamiento

horizontal del nudo Δ_1 y el horizontal del medio del pilar Δ_2 (fig. 96, *a*).

Ahora determinamos dos desplazamientos, tomando el diagrama M_p entre ellos, según las líneas rectas (en la fig. 96, *b* es lo punteado):

$$\Delta_1 = (M_p)(\overline{M}_1) = \left[\frac{P\Delta_1 l}{4}\frac{2}{3}\frac{l}{2} + \frac{P\Delta_2 l}{4} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{2}{3}\frac{l}{2} + \frac{l}{3}\right) + \frac{P\Delta_1 l}{4}\left(\frac{1}{3}\frac{l}{2} + \frac{2}{3}l\right)\right]\frac{1}{EJ} + \frac{P\Delta_1 l}{2}\frac{2}{3}l\frac{1}{kEJ};$$

$$\Delta_2 = (M_p)(\overline{M}_2) = \left[\frac{P\Delta_2 l}{4}\frac{2}{3}\frac{l}{2} + \frac{P\Delta_2 + P\Delta_1}{2} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{l}{2}\frac{l}{2}\right]\frac{1}{EJ} + \frac{P\Delta_1 l}{2}\frac{2}{3}\frac{l}{2}\frac{1}{kEJ}.$$

Al transformar obtenemos:

$$[(5 + 8/k)\,x - 24]\,\Delta_1 + 6x\,\Delta_2 = 0;$$

$$(3 + 4/k)\,x\,\Delta_1 + (5x - 24)\,\Delta_2 = 0, \qquad \text{(e)}$$

donde $x = Pl^2 : EJ$;

1) $k = 1$; $(13x - 24)\,\Delta_1 + 6x\,\Delta_2 = 0$; $7x\,\Delta_1 + (5x - 24)\,\Delta_2 = 0$; la ecuación de la estabilidad es:

$$D = \begin{vmatrix} (13x-24) & 6x \\ 7x & (5x-24) \end{vmatrix} = 23x^2 - 432x + 576 = 0.$$

De aquí obtenemos: $x = 1{,}45$; $P_{cr} = 1{,}45\,EJ : l^2$ (el valor exacto de $P = 1{,}42\,EJ : l^2$); análogamente:

2) $k = 10$; $x = 2{,}42$; $P_{cr} = 2{,}42\,EJ : l^2$ (el valor exacto de $P = 2{,}31\,EJ : l^2$);

3) $k = \infty$; $x = 2{,}598$; $P_{cr} = 2{,}598\,EJ : l^2$ (el valor exacto de $P = 2{,}465\,EJ : l^2$).

Ejemplo 18. Determinar la fuerza crítica para el pórtico examinado en el ejemplo 16 de acuerdo al método de desplazamientos. La solución la realizamos en dos variantes.

I^a variante. El sistema básico y los diagramas de los momentos de los desplazamientos unitarios construidos teniendo en cuenta la tabla 3, están representados en la fig. 97.

Las ecuaciones canónicas son:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 = 0; \quad r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 = 0.$$

La ecuación de la estabilidad (4.37) es:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = r_{11}r_{22} - r_{12}^2 = 0. \qquad \text{(a)}$$

Del equilibrio del nudo recortado del pórtico con su giro unitario (*fig.* 97, *b*), según la fig. 97, *d* obtenemos:

$$r_{11} = \frac{3EJ_1}{l} + \frac{4EJ^2}{h}\mu_1^*(\lambda) = \frac{3EJ_1}{l} + \frac{EJ_2}{h} \times$$

$$\times \frac{\lambda(\operatorname{sen}\lambda - \lambda\operatorname{sen}\lambda)}{(2 - 2\cos\lambda - \lambda\operatorname{sen}\lambda)}.$$

Del equilibrio del dintel recortado allí mismo (fig. 97, *b*) según la fig. 97, *e* tenemos:

$$r_{21} = Q(0) = -\frac{6EJ_2}{h^2}\mu_3^*(\lambda) =$$

$$= -\frac{EJ_2}{h^2}\frac{\lambda^2(1-\cos\lambda)}{(2-2\cos\lambda-\lambda\operatorname{sen}\lambda)},$$

$$\lambda = \alpha h.$$

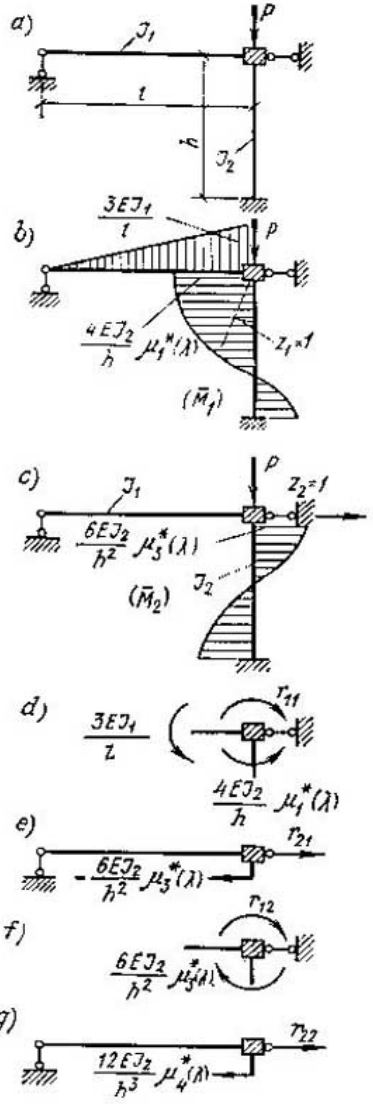


Fig. 97

De la igualdad del nudo recortado en el pórtico con su desplazamiento unitario (fig. 97, *c*) según la fig. 97, *f* obtenemos:

$$r_{12} = -\frac{6EJ_2}{h^2}\mu_{3=}^*(\lambda) = r_{21}.$$

Del equilibrio del dintel recortado allí mismo (fig. 97, *c*) según la fig. 97, *g* obtenemos:

$$r_{22} = \frac{12EJ_2}{h^3}\mu_4^*(\lambda) =$$

$$= \frac{EJ_2}{h^3}\frac{\lambda^3\operatorname{sen}\lambda}{(2-2\cos\lambda-\lambda\operatorname{sen}\lambda)}.$$

La ecuación de la estabilidad (a) es:

$$\left[\frac{3EJ_1}{l}+\frac{EJ_2}{h}\frac{\lambda(\operatorname{sen}\lambda-\lambda\cos\lambda)}{(2-2\cos\lambda-\lambda\operatorname{sen}\lambda)}\right]\times$$

$$\times\frac{EJ_2}{h^3}\frac{\lambda^3\operatorname{sen}\lambda}{(2-2\cos\lambda-\lambda\operatorname{sen}\lambda)} -$$

$$-\frac{(EJ_2)^2}{h^4}\frac{\lambda^4(1-\cos\lambda)^2}{(2-2\cos\lambda-\lambda\operatorname{sen}\lambda)^2}=0.$$

Al simplificar obtenemos

$$\frac{l}{3J_1}+\frac{h}{J_2}\frac{\operatorname{tg}\lambda}{\lambda}=0$$ (véase el ejemplo 16).

2ª variante. Tomamos como sistema básico el que tiene un enlace de momentos (fig. 98, *a*). La ecuación canónica es: $r_{11}Z_1 = 0$.

En la fig. 98, *b* está representado el diagrama unitario construido teniendo en cuenta el punto 7 de la tabla 3. De él obtenemos:

$$\delta \qquad r_{11} = \frac{3EJ_1}{l}+\frac{EJ_2}{h}\frac{\lambda}{\operatorname{tg}\lambda}=0.$$

$$\frac{h}{J_2}\frac{\operatorname{tg}\lambda}{\lambda}+\frac{l}{3J_1}=0.$$

Como se puede apreciar la segunda variante es mucho más simple que la primera.

Ejemplo 19. Determinar la fuerza crítica para el pórtico (fig. 99, *a*). En la fig. 99, *b* está representado el sistema básico con un solo enlace introducido (en el sistema con un número de enlaces incompleto).

La ecuación canónica es: $r_{11}Z_1 = 0$. La ecuación de la estabilidad es: $r_{11} = 0$.

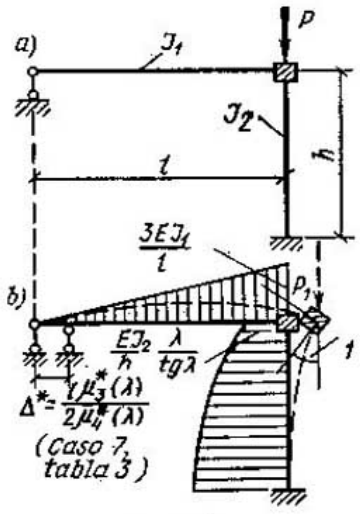


Fig. 98

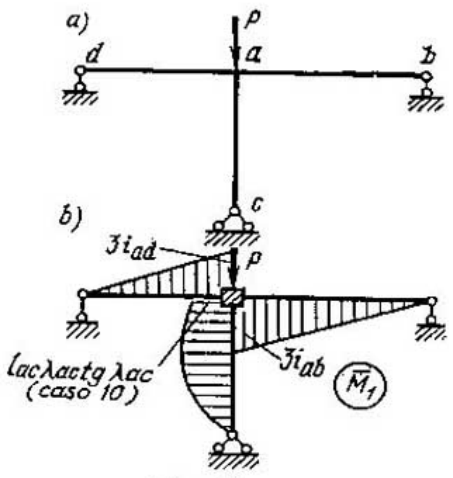


Fig. 99

Junto con el giro unitario del nudo con el enlace superpuesto transcurre también su desplazamiento lineal en la magnitud Δ^*, cuando la fuerza transversal del pilar es igual a 0 (véase el punto 10 de la tabla 3).

Del equilibrio del nudo (fig. 99, *b*) tenemos:

$$r_{11} = M_{ad} + M_{ab} + M_{ac} = 3i_{ab} + 3i_{ad} - i_{ac}\lambda_{ac}\,\mathrm{tg}\,\lambda_{ac} = 0.$$

Luego de determinar λ_{ac} obtenemos la fuerza crítica según (4.73):

$$P_{cr} = \frac{\lambda_{ac}^2}{l_{ac}^2} EJ_{ac}.$$

Ejemplo 20. Determinar la fuerza crítica del sistema (según la fig. 100, *a*). En la fig. 100, *b* está representado el sistema básico y en la fig. 101, *a*, está representado el diagrama ($\overline{M}_1$) de desplazamiento unitario. Las ecuaciones canónicas y de estabilidad (4.37) son:

$$r_{11}Z_1 = 0; \quad r_{11} = 0.$$

Del equilibrio del dintel recortado (fig. 101, *b*) obtenemos:

$$r_{11} = \frac{3i_{ab}}{l_{ab}^2} + \frac{3i_{cd}}{l_{cd}^2}\mu_8^*(\lambda_{cd}) = 0. \tag{4.74}$$

De aquí teniendo en cuenta (4.64) obtenemos

$$\mu_8^*(\lambda_{cd}) = -\frac{i_{ab} : l_{ab}^2}{i_{cd} : l_{cd}^2} = \frac{\lambda_{cd}^3}{3(\mathrm{tg}\,\lambda_{cd} - \lambda_{cd})}. \tag{4.75}$$

Cuando $i_{ab} = i_{cd}$ y $l_{ab} = l_{cd}$, entonces $\mu_8^*(\lambda_{cd}) = -1$, lo que corresponde a $\lambda_{cd} = 2{,}205$ y $P_{cr} = 2{,}205^2\ EJ_{cd} : l_{cd}^2$.

Para el pilar empotrado con un extremo inferior:

$$P_{cr} = \pi^2 EJ : 4l^2.$$

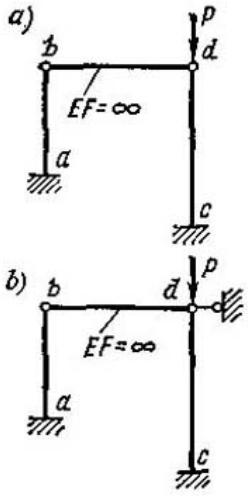


Fig. 100

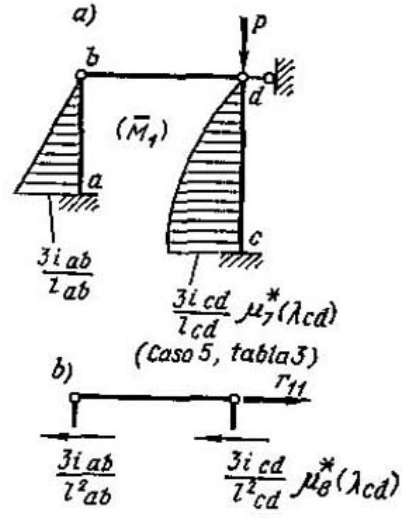


Fig. 101

Cuando $i_{ab} = \infty$ entonces

$$\mu_8^*(\lambda_{cd}) = \frac{\lambda_{cd}^3}{3(\operatorname{tg}\lambda_{cd} - \lambda_{cd})} = -\infty.$$

Como consecuencia, $\operatorname{tg}\lambda_{cd} - \lambda_{cd} = 0$ y $\lambda_{cd} = 4{,}494$. Este es el caso del pilar, con el extremo inferior empotrado y el superior con apoyo articulado. Cuando $i_{ab} = 0$,

$$\mu_8^*(\lambda_{cd}) = 0,$$

que corresponde a

$$\lambda_{cd} = \pi/2,\ \operatorname{tg}\lambda_{cd} = \infty \text{ y } P_{cr} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{EJ_{cd}}{l_{cd}^2},$$

es decir, se relaciona con el pilar con el extremo inferior empotrado y el superior libre.

Ejemplo 21. Escribir la ecuación de la estabilidad para el pórtico (fig. 102), teniendo en cuenta sólo las formas antisimétricas de la pérdida de la estabilidad. La ecuación de la estabilidad (4.37) en el sistema básico según la fig. 103 y los desplazamientos pares será:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Con el giro simultáneo de los nudos de un piso, en los extremos del dintel surgirán los momentos iguales a $6i_{v1g}$. De la tabla 3 (puntos 6—9) obtenemos los momentos en los extremos de los pilares. Como resultado podemos escribir:

$$\frac{r_{11}}{2} = i_{a1}\frac{\lambda_{a1}}{\operatorname{tg}\lambda_{a1}} + i_{12}\frac{\lambda_{12}}{\operatorname{tg}\lambda_{12}} + 6i_{v1g};$$

$$\frac{r_{12}}{2} = -i_{12}\lambda_{12} : \operatorname{sen}\lambda_{12};\ r_{13} = 0;$$

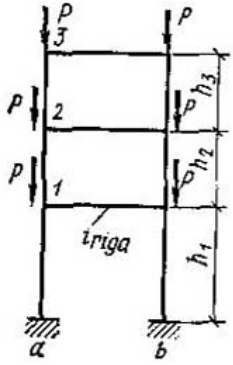


Fig. 102

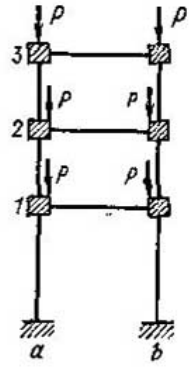


Fig. 103

$$\frac{r_{22}}{2} = i_{12}\lambda_{12} : \operatorname{tg}\lambda_{12} + i_{23}\lambda_{23} : \operatorname{tg}\lambda_{23} + 6i_{v1g};$$

$$\frac{r_{23}}{2} = -i_{23}\lambda_{23} : \operatorname{sen}\lambda_{23}; \quad \frac{r_{33}}{2} = i_{23}\lambda_{23} : \operatorname{tg}\lambda_{23} + 6i_{v1g}.$$

Al mismo tiempo:

$$\lambda_{a1} = h_{a1}\sqrt{\frac{P+P+P}{EJ_{a1}}};$$

$$\lambda_{12} = h_{12}\sqrt{\frac{P+P}{EJ_{12}}}; \quad \lambda_{23} = h_{23}\sqrt{\frac{P}{EJ}}.$$

§ 20. NOCIONES SOBRE EL CÁLCULO DE PÓRTICOS EN ESTADO DE DEFORMACIÓN. Los pórticos de las estructuras de construcción en las condiciones reales siempre son comprimidos y encorvados. Por eso, como se ha dicho antes, al plantear el problema se debería realizar una rigurosa investigación de la estabilidad del estado encorvado de deformación. Pero, para el control de la estabilidad en el plano del pórtico esto no es necesario siempre que realizamos el cálculo del pórtico en estado de deformación.

Pero si este cálculo se realiza para la carga calculada (normativa, multiplicada por el coeficiente de sobrecarga $n > 1$), frecuentemente, a excepción de algunos raros y dudosos casos, es suficiente cumplir la condición de solidez que al mismo tiempo garantizará la estabilidad del pórtico en el plano de flexión.

A tales casos dudosos en primer término se le atribuyen: 1) los sistemas simétricos con carga simétrica y a veces antisimétrica que al perder la estabilidad pueden cambiar su forma inicial de deformación (fig. 104, *a*);

2) los pórticos con carga en la cual todos los desplazamientos, o una parte de los desplazamientos angulares y linealeso sólo una parte de los desplazaamientos lineales de los nudos del pórtico, son iguales a cero.

Por ejemplo, el pórtico simétrico (véase la fig. 104, *a*) con carga simétrica puede perder la estabilidad de su forma simétrica inicial de deformación y desplazarse hacia el costado (en la figura se señala con un punteado). Lo mismo puede desplazarse hacia el costado el pórtico (fig. 104, *b*) con la fuerza P que está situada de tal manera que cuando se calcula, para el estado de deformación, él no tiene

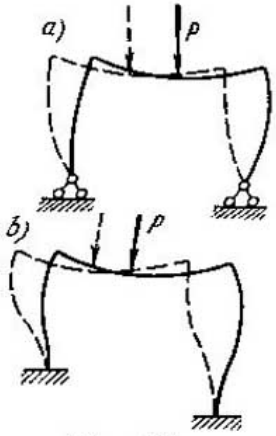


Fig. 104

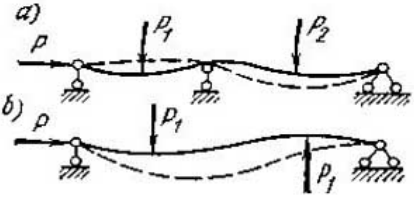


Fig. 105

los desplazamientos horizontales de los nudos. La viga continua (fig. 105, *a*) que no tiene, para el cálculo de deformación el ángulo de giro en el apoyo mediano, puede perder la estabilidad y empezar a encorvarse al tener el ángulo de giro. La viga simple (fig. 105, *b*) con la carga antisimétrica, en la cual la línea elástica en el estado de deformación tiene el punto cero en el medio de la barra, puede perder la estabilidad con el desplazamiento del punto cero hacia el costado.

En la estabilidad en el plano del pórtico, quizás no hemos señalado todos los casos dudosos posibles que deben investigarse especialmente.

Las ecuaciones canónicas, tanto del método de fuerzas como del de desplazamientos, en el cálculo para el estado de deformación, tienen miembros libres y valores numéricos de los coeficientes. Para determinar los miembros libres, hay que estudiar anticipadamente los elementos del sistema básico con la carga para poder luego revelar los datos necesarios. El aparato de cálculo para ello, está preparado en los § 17—19.

Cabe destacar que el método de desplazamientos, como regla, tiene sus ventajas con respecto al método de fuerzas en el cálculo de los pórticos, para el estado de deformación.

Sin duda, los razonamientos expuestos aquí no anulan la cuestión sobre el control de la estabilidad del pórtico de su plano.

En términos generales, aproximadamente, y con algún aumento, el límite superior, que habitualmente es inaccesible a las cargas

peligrosas de los pórticos comprimidos y encorvados en el estadio elástico, puede ser determinado en base a tales consideraciones.

Esribimos, por ejemplo, las ecuaciones canónicas del método de desplazamientos obligatoriamente con el número completo de incógnitas:

$$r_{k1}Z_1 + r_{k2}Z_2 + \ldots + r_{kn}Z_n + R_{kp} = 0; \qquad (4.76)$$

cuando $k = 1, 2, \ldots, n$.

Todos los coeficientes r_{ki} de la ecuación (4.76) se calculan teniendo en cuenta las fuerzas longitudinales de la carga.

Cuando el determinante D del sistema de ecuaciones (4.76) no es igual a cero, tiene lugar la dependencia unívoca de las incógnitas Z_i del parámetro de las cargas P, es decir:

$$Z_i = f_i(P). \qquad (4.77)$$

Pero si el determinante $D = 0$, los valores de Z_i, o no están determinados, cuando transcurre la ramificación de las curvas (4.77), o bien éstas se van hacia el infinito. En el primer caso, se pierde la estabilidad del estado de deformación (bifurcación) y en el segundo, los desplazamientos aumentan ilimitadamente. Ambos casos son peligrosos. Por eso el hecho de ser el determinante igual a cero, sirve de ecuación aproximada del estado peligroso de los pórticos comprimidos y encorvados. Esto es igual al control de la estabilidad del pórtico al cambiar la carga actuante por la nodal, como se expone en el § 16. Nuestros razonamientos, en base a las ecuaciones lineales (4.76) no son irreprochables, aunque nos brindan algunos fundamentos para este método.

CAPÍTULO 5 * ESTABILIDAD DE LAS VIGAS CONTINUAS, ARCOS Y ARMADURAS

§ 21. ESTABILIDAD DE LAS VIGAS CONTINUAS SEGÚN EL MÉTODO DE LOS PARÁMETROS INICIALES. La viga continua se convierte en el sistema fundamental, es decir, en una viga de una luz con apoyos en los extremos, si no tiene simultáneamente un voladizo en un extremo y un empotramiento en el otro (fig. 106, *a*), y en una viga empotrada en un extremo, en caso de que se tengan el voladizo y el empotramiento (fig. 106, *b*).

A los parámetros iniciales desconocidos se le agregan las reacciones incógnitas de los enlaces de apoyo eliminados. Para determinarlos, se escriben las ecuaciones complementarias de los desplazamientos dirigidas hacia los enlaces excluidos, los cuales cuando tienen apoyos rígidos, son iguales a cero y, en el caso de los elásticos, se expresan a través de reacciones desconocidas.

Si la viga es estáticamente determinada su reacción izquierda puede hallarse por medio de la ecuación de equilibrio.

Todas las ecuaciones, para determinar los parámetros iniciales y las reacciones desconocidas resultan homogéneas. Para obtener una solución no trivial su determinante debe igualarse a cero.

Si en un caso particular, por ejemplo, en una viga de dos luces iguales, la pérdida de la estabilidad también es posible con reac-

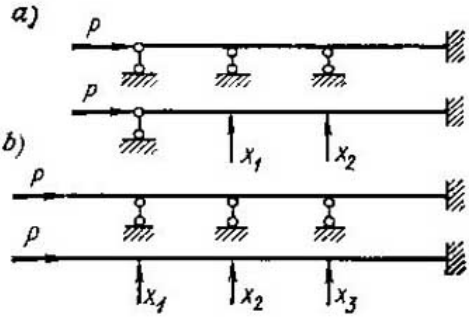


Fig. 106

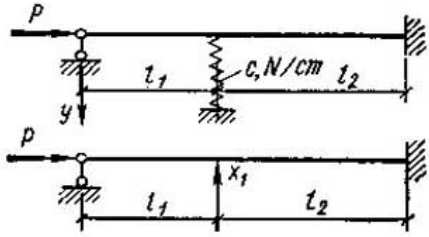


Fig. 107

ciones nulas, entonces ellas no deben ser examinadas si se conservan las condiciones de frontera del problema.

Demostraremos lo expuesto en un ejemplo concreto (fig. 107). Los parámetros iniciales son: $y(0) = 0$; $y'(0) = ?$; $M(0) = 0$; $Q(0) =$ Según las expresiones (2.35), (2.36), (2.39) y (2.40) tenemos:

$$y(z) = \frac{y'(0)}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha z - \frac{Q(0)}{\alpha^3 EJ} (\alpha z - \operatorname{sen} \alpha z) \Big|_0^{l_1} -$$

$$- \frac{X_1}{\alpha^3 EJ} [\alpha (z - l_1) - \operatorname{sen} \alpha (z - l_1)] \Big|_{l_1}^{l_1 + l_2};$$

$$y'(z) = y'(0) \cos \alpha z - \frac{Q(0)}{\alpha^2 EJ} (1 - \cos \alpha z) \Big|_0^{l_1} -$$

$$- \frac{X_1}{\alpha^2 EJ} [1 - \cos \alpha (z - l_1)] \Big|_0^{l_1 + l_2}.$$

Según las condiciones de frontera en el extremo derecho de la viga obtenemos:

$$y(l_1 + l_2) = \frac{y'(0)}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha (l_1 + l_2) - \frac{Q(0)}{\alpha^3 EJ} [\alpha (l_1 + l_2) -$$

$$- \operatorname{sen} (l_1 + l_2)] - \frac{X_1}{\alpha^3 EJ} (\alpha l_2 - \operatorname{sen} \alpha l_2) = 0;$$

$$y'(l_1 + l_2) = y'(0) \cos \alpha (l_1 + l_2) - \frac{Q(0)}{\alpha^2 EJ} [1 - \cos \alpha (l_1 + l_2)] -$$

$$- \frac{X_1}{\alpha^2 EJ} (1 - \cos \alpha l_2) = 0.$$

La condición de desplazamiento en el apoyo intermedio es la siguiente:

$$y(l_1) = \frac{y'(0)}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha l_1 - \frac{Q(0)}{\alpha^3 EJ} (\alpha l_1 - \operatorname{sen} \alpha l_1) = + \frac{X_1}{c}.$$

Luego el determinante de las ecuaciones obtenidas hay que igualar a cero y de esta ecuación encontrar α.

El método de los parámetros iniciales es cómodo solamente cuando la sección de la viga y la fuerza longitudinal son constantes. Pero si las secciones de la viga en algunas luces son escalonadas variables en los apoyos, o las fuerzas longitudinales son diferentes, por las luces, la aplicación de la ecuación general de flexión longitudinal (2.35) relacionada con el traslado del origen de las coordenadas es difícil. En tales casos así como también en el cálculo de los pórticos resulta mejor aplicar el método de fuerzas o el de desplazamientos en la forma canónica.

El método de los parámetros iniciales merece atención cuando la viga tiene o un voladizo, o bien empotramientos deslizables en los extremos o articulaciones en las luces.

§ 22. ESTABILIDAD DE LAS VIGAS CONTINUAS SEGÚN EL MÉTODO DE FUERZAS. Supongamos que las secciones de la viga en los límites de cada luz son constantes, pero a su vez diferentes en las distintas luces, es decir, examinamos una viga de sección escalonada variable. Las cargas en forma de fuerzas concentradas

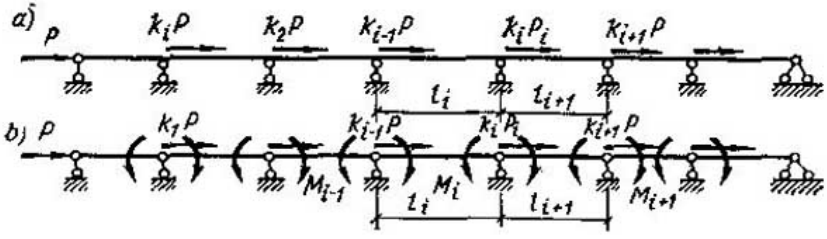


Fig. 108

están aplicadas sobre los apoyos y actúan a lo largo del eje de la viga (fig. 108, *a*). Todas las fuerzas concentradas deben ser expresadas con un parámetro cuyo valor crítico determinaremos. El sistema fundamental está representado en la fig. 108, *b*.

Esribimos la ecuación canónica *i*-ésima:

$$\delta_{i(i-1)} M_{i-1} + \delta_{ii} M_i + \delta_{i(i+1)} M_{i+1} = 0. \qquad (5.1)$$

Esta es la ecuación de los tres momentos. En ella los coeficientes $\delta_{i(i-1)}$, δ_{ii} y $\delta_{i(i+1)}$ se determinan por los estados unitarios representados en la fig. 109. Semejantes cargas de la viga simple fueron examinadas anteriormente y se obtuvieron las fórmulas (4.34) y (4.35) para los ángulos de giro. En base a ellas fue hecha la tabla 4.

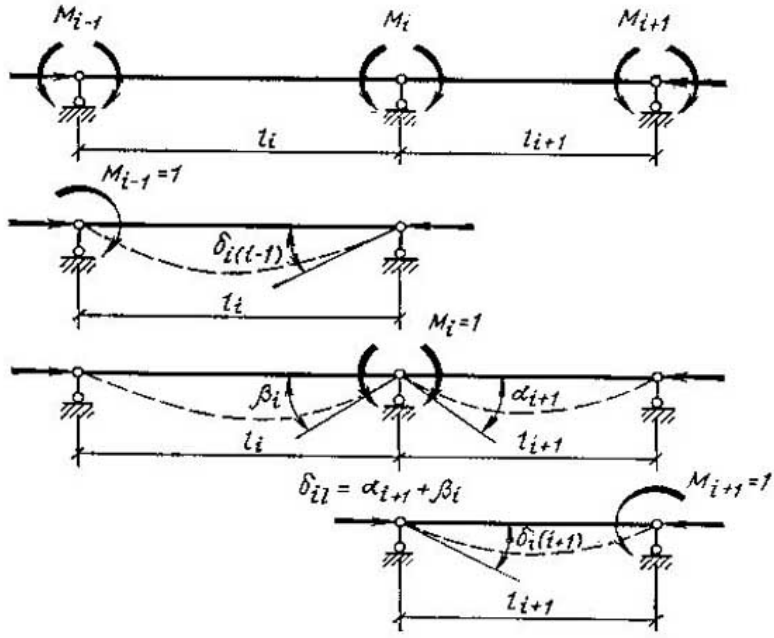


Fig. 109

De ésta obtenemos:

$$\delta_{i(i-1)}=\frac{l_i}{6EJ_i}f_2^*(\lambda_i); \tag{5.2}$$

$$\delta_{ii}=\frac{l_i}{3EJ_i}f_1^*(\lambda_i)+\frac{l_{i+1}}{3EJ_{i+1}}f_1^*(\lambda_{i+1}); \tag{5.3}$$

$$\delta_{i(i+1)}=\frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}}f_2^*(\lambda_{i+1}). \tag{5.4}$$

Ahora la ecuación de los tres momentos en forma desarrollada será la siguiente:

$$\frac{l_i}{J_i}f_2^*(\lambda_i)M_{i-1}+2\left[\frac{l_i}{J_i}f_1^*(\lambda_i)+\frac{l_{i+1}}{J_{i+1}}f_1^*(\lambda_{i+1})\right]\times$$
$$\times M_i+\frac{l_{i+1}}{J_{i+1}}f_2^*(\lambda_{i+1})M_{i+1}=0. \tag{5.5}$$

Según el tipo de la ecuación (5.5) se componen tantas ecuaciones cuantos momentos de apoyo desconocidos hay. Todas las ecuaciones serán homogéneas. Para obtener la ecuación de la estabilidad es necesario igualar su determinante a cero como hemos hecho en la fórmula (4.11). Al mismo tiempo todos los λ_i se reducen a λ_k según la fórmula (4.72) y la fuerza crítica $N_{k,\,cr}$ se determina de acuerdo a (4.73). Si la pérdida de la estabilidad cuando $M_1=\ldots=M_n=0$ es físicamente posible, entonces ella debe ser examinada.

Si la viga continua, en uno o en ambos extremos, tiene empotramientos (fig. 110, *a*), entonces para simplificar el cálculo es necesario

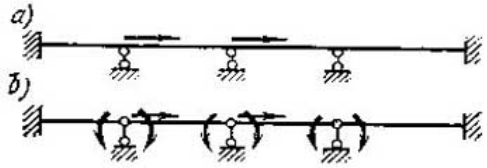


Fig. 110

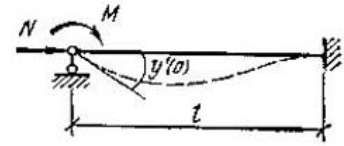


Fig. 111

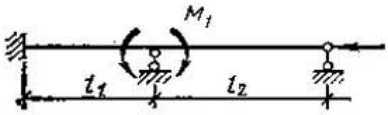


Fig. 112

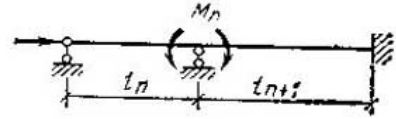


Fig. 113

admitir en calidad de sistema fundamental, el estáticamente indeterminado (fig. 110, *b*). Esto exigirá la investigación del elemento representado en la fig. 111. Para ella según las fórmulas (2.35) y (2.36) escribimos las condiciones de frontera en el extremo derecho:

$$y(l) = \frac{y'(0)}{\alpha}\operatorname{sen}\lambda - \frac{M}{\alpha^2 EJ}(1-\cos\lambda) - \frac{Q(0)}{\alpha^3 EJ}(\lambda - \operatorname{sen}\lambda) = 0; \quad \text{(a)}$$

$$y'(l) = y'(0)\cos\lambda - \frac{M}{\alpha EJ}\operatorname{sen}\lambda - \frac{Q(0)}{\alpha^2 EJ}(1-\cos\lambda) = 0. \quad \text{(b)}$$

Resolviendo estas ecuaciones obtenemos:

$$y'(0) = \frac{Ml}{4EJ\mu_1^*(\lambda)} = \frac{Mlf_3^*(\lambda)}{4EJ}, \qquad (5.6)$$

donde

$$f_3^*(\lambda) = \frac{4(2-2\cos\lambda-\lambda\operatorname{sen}\lambda)}{\lambda(\operatorname{sen}\lambda-\lambda\cos\lambda)} = \frac{8\operatorname{tg}\lambda}{\lambda}\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2}}{\operatorname{tg}\lambda-\lambda} = \frac{1}{\mu_1^*(\lambda)}.$$

En presencia del empotramiento izquierdo (fig. 112) resulta

$$\delta_{11} = \frac{l_1}{4EJ_1} f_3^*(\lambda_1) + \frac{l_2}{3EJ_2} f_1^*(\lambda_2). \qquad (5.7)$$

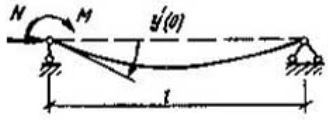
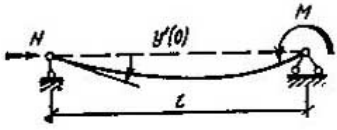
Y respectivamente la primera ecuación de los tres momentos en vez de (5.5) es:

$$\left[\frac{6l_1}{4J_1} f_3^*(\lambda_1) + \frac{2l_2}{J_2} f_1^*(\lambda_2)\right] M_1 + \frac{l_2}{J_2} f_2^*(\lambda_2) M_2 = 0. \qquad (5.8)$$

Un resultado análogo obtenemos en el caso de empotramiento derecho (fig. 113).

$$\delta_{nn} = \frac{l_n}{3EJ_n} f_1^*(\lambda_n) + \frac{l_{n+1}}{4EJ_{n+1}} f_3^*(\lambda_n + 1). \qquad (5.9)$$

Tabla 4. $\lambda = \alpha l$; $\alpha^2 = N : EJ$

Esquema de la carga de la viga	$y'(0)$	$f^*(\lambda)$
	$\frac{Ml}{3EJ} f_1^*(\lambda)$	$f_1^*(\lambda) = \frac{3}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\operatorname{tg}\lambda}\right) = \frac{1}{\mu_1^*(\lambda)}$
	$\frac{Ml}{6EJ} f_2^*(\lambda)$	$f_2^*(\lambda) = \frac{6}{\lambda}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\lambda} - \frac{1}{\lambda}\right) = \mu^*(\lambda) : \mu_4^*(\lambda)$

La última ecuación de los tres momentos a diferencia de (5.5) es la siguiente:

$$\frac{l_n}{J_n} f_3^*(\lambda_n) M_{n-1} + \left[\frac{2l_n}{J_n} f_1^*(\lambda_n) + \frac{6l_{n+1}}{4J_{n+1}} f_3^*(\lambda_{n+1})\right] M_n = 0. \qquad (5.10)$$

Las demás ecuaciones intermedias se escriben según (5.5).

Las ecuaciones (5.1) y (5.5) en forma matricial se escriben análogicamente a las ecuaciones canónicas al calcular los pórticos [véase (4.12)].

Ejemplo 22. Determinar la fuerza crítica de la viga continua de dos luces iguales cuando $J_1 = J_2 = J$ (fig. 114).

Según (5.5)

$$2\left[\frac{l}{J} f_3^*(\lambda) + \frac{l}{J} f_1^*(\lambda)\right] M_1 = 0.$$

Cuando $M_1 \neq 0$ $f_1^*(\lambda) = \frac{3}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\operatorname{tg}\lambda}\right) = 0$; $\operatorname{tg}\lambda = \lambda$; $\lambda_1 = 4{,}4934$.

Aquí hemos obtenido las formas simétricas de la pérdida de la estabilidad.

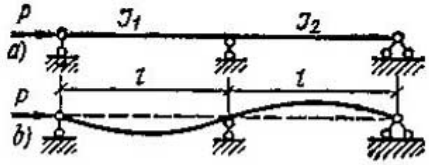


Fig. 114

Cuando $M_1 = 0$ la pérdida de la estabilidad también es físicamente posible, ella corresponde a las formas antisimétricas de la pérdida de la estabilidad. Para ella $\lambda = k\pi$.

Ejemplo 23. Determinar la fuerza crítica para la viga continua de tres luces iguales cuando $J_1 = J_2 = J_3 = J$ (fig. 115, *a*).

Según (5.5):

$$2\left[\frac{l}{J} f_1^*(\lambda)+\frac{l}{J} f_1^*(\lambda)\right] M_1+\frac{l}{J} f_2^*(\lambda) M_2=0;$$

$$\frac{l}{J} f_2^*(\lambda) M_1+2\left[\frac{l}{J} f_1^*(\lambda)+\frac{l}{J} f_1^*(\lambda)\right] M_2=0,$$

ó

$$4f_1^*(\lambda) M_1+f_2^*(\lambda) M_2=0; \quad f_2^*(\lambda) M_1+4f_1^*(\lambda) M_2=0.$$

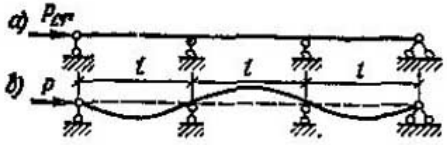


Fig. 115

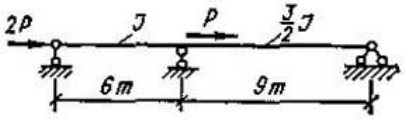


Fig. 116

Cuando M_1 y M_2 no son iguales a cero tenemos:

$$D=\begin{vmatrix} 4f_1^*(\lambda) & f_2^*(\lambda) \\ f_2^*(\lambda) & 4f_1^*(\lambda) \end{vmatrix}=[4f_1^*(\lambda)]^2-[f_2^*(\lambda)]^2=0,$$

ó

$$[4f_1^*(\lambda)+f_2^*(\lambda)]\,[4f_1^*(\lambda)-f_2^*(\lambda)]=0;$$

$$4f_1^*(\lambda)+f_2^*(\lambda)=0 \text{ (las formas simétricas).}$$

La raíz más pequeña $\lambda=5{,}14$; $P_{cr}=\frac{\lambda^2}{l^2} EJ=\frac{5{,}14^2}{l^2} EJ$.

$$4f_1^*(\lambda)-f_2^*(\lambda)=0 \text{ (las formas antisimétricas).}$$

La raíz más pequeña $\lambda=3{,}88$; $P_{cr}=\frac{3{,}88^2}{l^2} EJ$.

Cuando $M_1=M_2=0$ la forma simétrica de la pérdida de la estabilidad es físicamente posible (fig. 115, *b*):

$$\lambda=\pi, \quad P_{cr}=\pi^2 EJ : l^2.$$

El significado de esta forma es real, ya que $\pi<3{,}88<5{,}14$.

Ejemplo 24. Determinar el parámetro de las fuerzas críticas de una viga continua de dos luces (fig. 116) para los siguientes datos:

$$l_1=6\text{m}; \quad l_2=9\text{m}; \quad J_1=J; \quad J_2=1{,}5J.$$

De acuerdo a la ecuación de tres momentos (5.5) tenemos

$$2\left[\frac{l_1}{J_1} f_1^*(\lambda_1)+\frac{l_2}{J_2} f_1^*(\lambda_2)\right] M_1=0.$$

Si $M_1 \neq 0$, entonces

$$\frac{l_1}{J_1} f_1^*(\lambda_1)+\frac{l_1}{J_2} f_1^*(\lambda_2)=0. \qquad (a)$$

Las fuerzas longitudinales en las luces son las siguientes: $N_1=2P$; $N_2=3P$.

En calidad de básica tomamos λ_1. Entonces de acuerdo con (4.72) obtenemos:

$$\lambda_2=\lambda_1 \frac{9}{6} \sqrt{\frac{3PJ}{2P1{,}5J}}=1{,}5\lambda_1.$$

Ahora la ecuación (a) será:

$$f_1^*(\lambda_1) + f_1^*(1{,}5\lambda_1) = 0. \qquad \text{(b)}$$

Para $\lambda_1 = 2{,}34$, $f_1^*(2{,}34) = 1{,}7891$; para $1{,}5\,\lambda_1 = 3{,}51$, $f_1^*(3{,}51) = -1{,}9724$.

Según la ecuación (b) $1{,}7891 - 1{,}9724 = -0{,}1833 < 0$. (c)

Para $\lambda_1 = 2{,}36$, $f_1^*(2{,}36) = 1{,}8195$; para $1{,}5\,\lambda_1 = 3{,}54$, $f_1^*(3{,}54) = -1{,}7737$.

Según la ecuación (b) $1{,}8195 - 1{,}7737 = 0{,}0458 > 0$. (d)

Entonces, $2{,}34 < \lambda_1 < 2{,}36$.

Ya que (d) está más cerca a la igualdad, tomamos $\lambda_1 = 2{,}355$.

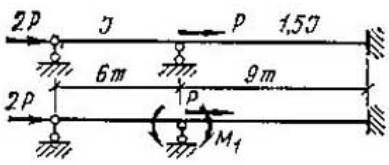


Fig. 117

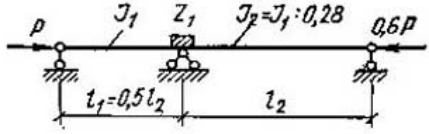


Fig. 118

De acuerdo a la fórmula (4.73) determinamos el parámetro de la carga:

$$N_{1,\,cr} = 2P_{cr} = 2{,}355^2 \frac{EJ}{6^2}.$$

Ejemplo 25. Determinar el parámetro P de la carga crítica para la viga (fig. 117). Según (5.10) tenemos:

$$\left[\frac{2l_1}{J_1} f_1^*(\lambda_1) + \frac{6l_2}{J_2} f_3^*(\lambda_2)\right] M_1 = \left[\frac{2\cdot 6}{J} f_1^*(\lambda_1) + \frac{6\cdot 9}{1{,}5J} f_3^*(\lambda_2)\right] M_1 = 0.$$

Si $M_1 \neq 0$, entonces

$$6f_1^*(\lambda_1) + 18f_3^*(\lambda_2) = 6f_1^*(\lambda_1) + \frac{4{,}5}{\mu_1^*(\lambda_2)} = 0.$$

O en tal forma teniendo en cuenta que $\lambda_2 = 1{,}5\lambda_1$:

$$6f_1^*(\lambda_1) + 4{,}5 : \mu_1^*(1{,}5\lambda_1) = 0. \qquad \text{(a)}$$

Cuando $\lambda_1 = 3{,}05$ según (a) $6\cdot 11{,}157 + 4{,}50: -0{,}0611 < 0$.
Cuando $\lambda_1 = 3{,}06$ según (a) $6\cdot 12{,}310 + 4{,}50: -0{,}0729 > 0$.
Entonces $3{,}05 < \lambda_1 < 3{,}06$.

Suponemos que $\lambda_1 = 3{,}054$. El parámetro crítico según (4.73) $P_{cr} = 3{,}054^2 \frac{EJ_1}{6^2}$.

Ejemplo 26. Determinar la carga crítica para la viga (fig. 118). En calidad de principal tomamos λ_1. Según la fórmula (4.72) obtenemos:

$$\lambda_2 = \lambda_1 \frac{l_2}{0{,}5l_2} \sqrt{\frac{0{,}6PJ_1}{PJ_1 : 0{,}28}} = 0{,}82\lambda_1.$$

La ecuación (5.5) es la siguiente:

$$2\left[\frac{l_1}{J_1} f_1^*(\lambda_1) + \frac{l_2}{J_2} f_1^*(0{,}82\lambda_1)\right] M_1 = 0.$$

Cuando $M_1 \neq 0$

$$\frac{l_1}{J_1} f_1^*(\lambda_1) + \frac{l_2}{J_2} f_1^*(0{,}82\lambda_1) = 0$$

ó

$$\frac{J_2 l_1}{J_1 l_2} f_1^*(\lambda_1) + f_1^*(0{,}82\lambda_1) = 1{,}785 f_1^*(\lambda_1) + f_1^*(0{,}82\lambda_1) = 0.$$

Cuando $\lambda_1 = 3{,}46$ según la ecuación (a) tenemos:

$$1{,}785\ (-2{,}3798) + 3{,}7676 = -4{,}25 + 3{,}77 = -0{,}48 < 0.$$

Cuando $\lambda_1 = 3{,}48$ según la ecuación (a) tenemos:

$$1{,}785\ (-2{,}2017) + 3{,}9928 = -3{,}95 + 3{,}99 = 0{,}04 > 0.$$

En consecuencia $3{,}46 < \lambda_1 < 3{,}48$. Admitimos que $\lambda_1 = 3{,}48$;

$$P_{cr} = 3{,}48^2 \frac{EJ_1}{l_1^2}.$$

§ 23. ESTABILIDAD DE LAS VIGAS CONTINUAS SEGÚN EL MÉTODO DE DESPLAZAMIENTOS. El sistema fundamental está representado en la fig. 119. La ecuación canónica general (4.36)

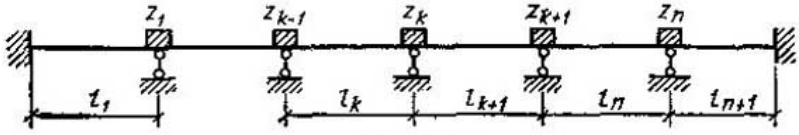


Fig. 119

aplicada a la viga continua será:

$$r_{k(k-1)}Z_{k-1} + r_{kk}Z_k + r_{k(k+1)}Z_{k+1} = 0. \qquad (5.11)$$

Esta es la ecuación de tres ángulos de giro.

En todos los casos cuando $k > 1$ y $k < n$, donde n es el número de enlaces del sistema fundamental se puede escribir:

$$r_{k(k-1)} = \frac{2EJ_k}{l_k}\mu_2^*(\lambda_k); \qquad (5.12)$$

$$r_{kk} = \frac{4EJ_k}{l_k}\mu_1^*(\lambda_k) + \frac{4EJ_{k+1}}{l_{k+1}}\mu_1^*(\lambda_{k+1}); \qquad (5.13)$$

$$r_{k(k+1)} = \frac{2EJ_{k+1}}{l_{k+1}}\mu_2^*(\lambda_{k+1}). \qquad (5.14)$$

Cuando $k = 1$ y $k = n$ la expresión r_{kk} dependerá de cómo son los apoyos extremos.

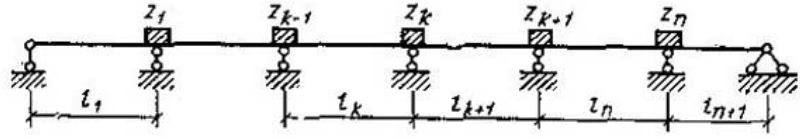


Fig. 120

Si el apoyo extremo está en forma de empotramiento (fig. 119) la fórmula (5.13) es aplicable para calcular r_{11} ó r_{nn}. Pero si el apoyo extremo izquierdo o el derecho son articulados (fig. 120), entonces

en vez de (5.13) debe aplicarse:

$$r_{11} = \frac{3EJ_1}{l_1}\mu_7^*(\lambda_1) + \frac{4EJ_2}{l_2}\mu_1^*(\lambda_2); \qquad (5.15)$$

$$r_{nn} = \frac{4EJ_n}{l_n}\mu_1^*(\lambda_n) + \frac{3EJ_{n+1}}{l_{n+1}}\mu_7^*(\lambda_{n+1}). \qquad (5.16)$$

La ecuación de la estabilidad se formula basándose en (4.37).

La ecuación (5.11) en forma matricial es igual que para el cálculo de los pórticos [véase (4.38)].

Con el método de desplazamientos se revelan las fuerzas críticas de tales formas de pérdida de la estabilidad, con las cuales las incógnitas $Z_1, \ldots, Z_n$ son distintas de cero. Pero si la pérdida de la estabilidad es posible con algunos Z_k iguales a cero, entonces, tal forma de pérdida de la estabilidad debe ser investigada complementariamente. Así por ejemplo, la ecuación canónica para la viga de dos luces iguales (véase la fig. 114) escrita de la siguiente manera:

$$\left[\frac{3EJ}{l}\mu_7^*(\lambda) + \frac{3EJ}{l}\mu_7^*(\lambda)\right] Z_1 = 0,$$

puede ser satisfecha cuando $Z_1 = 0$, a lo que corresponde la forma simétrica probable de pérdida de la estabilidad y cuando $\mu_7^*(\lambda) = \lambda^2 \operatorname{tg}\lambda : 3(\operatorname{tg}\lambda - \lambda) = 0$, a lo que corresponde la forma antisimétrica de pérdida de la estabilidad. Con ella

$$\operatorname{tg}\lambda = 0; \quad \lambda = \pi; \quad P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}.$$

Ejemplo 27. Según el método de desplazamientos, determinar el parámetro crítico de la carga de la viga examinada en el ejemplo 24 (véase la fig. 116).

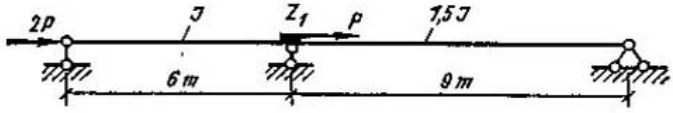


Fig. 121

Tomemos λ_1 como básica. Entonces $\lambda_2 = 1{,}5\lambda_1$. El sistema fundamental está representado en la fig. 121.

La ecuación canónica es: $r_{11}Z_1 = 0$. Cuando $Z_1 \neq 0$, $r_{11} = 0$.

De acuerdo a (5.15) y (5.16) tenemos:

$$r_{11} = \frac{3EJ_1}{l_1}\mu_7^*(\lambda_1) + \frac{3EJ_2}{l_2}\mu_7^*(\lambda_2) = 0,$$

ó

$$\mu_7^*(\lambda_1) + \mu_7^*(1{,}5\lambda_1) = 0. \qquad (a)$$

Cuando $\lambda_1 = 2{,}34$, $\mu_7^*(2{,}34) = 0{,}5589$ (véase [29]); cuando $1{,}5\lambda_1 = 3{,}51$, $\mu_7^*(3{,}51) = -0{,}5075$.

Según la ecuación (a) $0{,}5589 - 0{,}5075 = 0{,}0514 > 0$.

Cuando $\lambda_1 = 2{,}36$, $\mu_7^*(2{,}36) = 0{,}5496$; cuando $1{,}5\lambda_1 = 3{,}54$, $\mu_7^*(3{,}54) = -0{,}5638$.

Según la ecuación (a) $0{,}5496 - 0{,}5638 = -0{,}0142 < 0$.

Igual que en el ejemplo 24, $2{,}34 < \lambda_1 < 2{,}36$.

Ejemplo 28. Determinar el parámetro P de la carga crítica de una barra examinada en el ejemplo 25. El sistema fundamental está representado en la fig. 122. La ecuación canónica es: $r_{11}Z_1 = 0$.

Cuando $Z_1 \neq 0$, $r_{11} = 0$. De acuerdo a la fórmula (5.15) para $\lambda_2 = 1{,}5\lambda_1$ tenemos:

$$r_{11} = \frac{3EJ_1}{l_1}\mu_7^*(\lambda_1) + \frac{4EJ_2}{l_2}\mu_1^*(1{,}5\lambda_1) = 0.$$

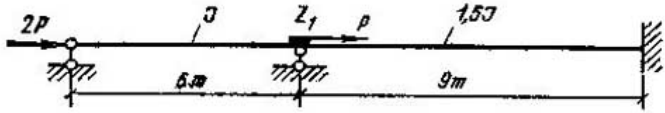


Fig. 122

Al simplificar y substituir los números, obtenemos:

$$\frac{3}{4}\frac{l_2}{l_1}\frac{J_1}{J_2}\mu_7^*(\lambda_1) + \mu_1^*(1{,}5\lambda_1) = \frac{3}{4}\frac{6}{9}\frac{J}{1{,}5J}\mu_7^*(\lambda_1) + \mu_1^*(1{,}5\lambda_1) = 0.$$

En forma acabada

$$\frac{3}{4}\mu_7^*(\lambda_1) + \mu_1^*(1{,}5\lambda_2) = 0. \qquad \text{(a)}$$

Cuando $\lambda_1 = 3{,}05$, $\mu_7^*(3{,}05) = 0{,}0906$; cuando $1{,}5\lambda_1 = 4{,}575$, $\mu_7^*(4{,}575) = -0{,}0611$.

Según la ecuación (a) $\frac{3}{4}0{,}0906 - 0{,}0611 = 0{,}0068 > 0$.

Cuando $\lambda_1 = 3{,}06$, $\mu_7^*(3{,}06) = 0{,}0812$; cuando $1{,}5\lambda_1 = 4{,}59$, $\mu_7^*(4{,}59) = -0{,}0729$.

De acuerdo a la ecuación (a) $\frac{3}{4}0{,}0812 - 0{,}0729 = -0{,}012 < 0$.

Entonces, igual que en el ejemplo 25, $3{,}05 < \lambda_1 < 3{,}06$.

Ejemplo 29. Según el método de desplazamientos, determinar la carga crítica para la viga examinada en el ejemplo 26. El sistema fundamental está representado en la fig. 123. La ecuación canónica es: $r_{11}Z_1 = 0$.

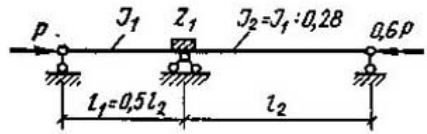


Fig. 123

Admitimos λ_1 en calidad de básica. Entonces $\lambda_2 = 0{,}82\lambda_1$. Según las fórmulas (5.15) y (5.16) tenemos:

$$r_{11} = \frac{3EJ_1}{l_1}\mu_7^*(\lambda_1) + \frac{3EJ_2}{l_2}\mu_7^*(\lambda_2) = 0,$$

ó

$$\frac{l_2}{l_1}\frac{J_1}{J_2}\mu_7^*(\lambda_1) + \mu_7^*(0{,}82\lambda_1) = 0{,}56\mu_7^*(\lambda_1) + \mu_7^*(0{,}82\lambda_1) = 0. \qquad \text{(a)}$$

Cuando $\lambda_1 = 3{,}46$, $\mu_7^*(3{,}46) = -0{,}4202$; cuando $0{,}82\lambda_1 = 2{,}84$, $\mu_7^*(2{,}84) = 0{,}2654$.

Según la ecuación (a) $-0{,}56 \cdot 0{,}4202 + 0{,}2654 = 0{,}029 > 0$.

Cuando $\lambda_1 = 3{,}48$, $\mu_7^*(3{,}48) = -0{,}4542$; cuando $0{,}82\lambda_1 = 2{,}86$, $\mu_7^*(2{,}86) = 0{,}2505$.

Según la ecuación (a) $-0{,}56 \cdot 0{,}4542 + 0{,}2505 = 0{,}001 < 0$.

Igual que en el ejemplo 26, $\lambda_1 \approx 3{,}48$.

§ 24. ESTABILIDAD DE LOS ARCOS CIRCULARES Y DE LOS ANILLOS DE SECCIÓN CONSTANTE CON CARGA HIDROSTÁTICA PERMANENTE

ECUACIONES DIFERENCIALES A SUS SOLUCIONES GENERALES

Examinemos el elemento infinitesimal de la barra curva cb con un ángulo central $d\varphi$ y un radio ρ (fig. 124). Supongamos que el desplazamiento del punto a por la tangente en este punto es u, y por la normal es v. Respectivamente los desplazamientos del punto b por la tangente en este punto son $u + du$ y por la normal $v + dv$. Después del traslado, el elemento ocupará una nueva posición a_1b_1. El tendrá un nuevo ángulo central $d\varphi_1$ y un nuevo radio ρ_1.

Sea que la tangente en el punto a_1 forma con la tangente en el punto a de la posición inicial (con el eje x) el angulo θ, y la tangente en el punto b_1 con la tangente del punto b, el angulo $\theta_1 = \theta + d\varphi_1 - d\varphi$. En consecuencia, $d\theta = \theta_1 - \theta = d\varphi_1 - d\varphi$. Teniendo en cuenta que $ds = \rho\, d\varphi$ y $ds_1 = \rho_1\, d\varphi_1$, obtenemos:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EJ}. \tag{5.17}$$

Tracemos ahora la proyección de la línea cerrada $abcb_1a_1da$ en los ejes de coordenadas:

$$\Sigma X = ds \cos\frac{d\varphi}{2} + (u + du)\cos d\varphi - (v + dv)\operatorname{sen} d\varphi - \\ - ds_1 \cos\left(\theta + \frac{d\varphi_1}{2}\right) - u = 0;$$

$$\Sigma Y = ds \operatorname{sen}\frac{d\varphi}{2} + (u + du)\operatorname{sen} d\varphi + (v + dv)\cos d\varphi - \\ - ds_1 \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{d\varphi_1}{2}\right) - v = 0.$$

Teniendo en cuenta los infinitésimos de primer orden tendremos:

$$ds + du - vd\varphi = ds_1 \cos\theta; \tag{5.18}$$

$$ud\varphi + dv = ds_1 \operatorname{sen}\theta. \tag{5.19}$$

Despreciamos los acortamientos del elemento debidos a las fuerzas longitudinales, es decir, adoptamos $ds_1 = ds$. En virtud de la peque-

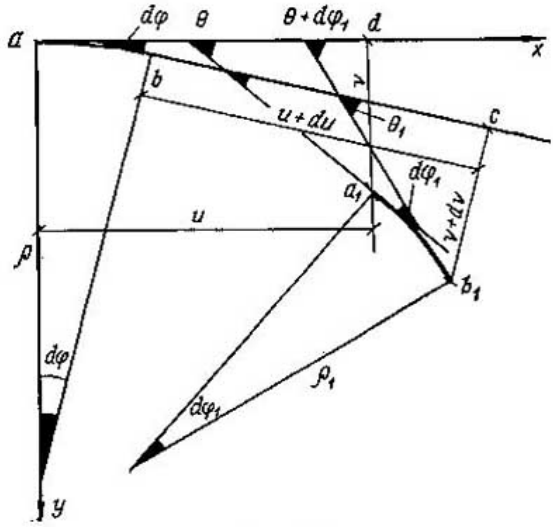


Fig. 124

ñez de los ángulos θ, obtenemos:

$$\frac{du}{ds} - \frac{v}{\rho} = 0; \tag{5.20}$$

$$\frac{u}{\rho} + \frac{dv}{ds} = \theta. \tag{5.21}$$

Para la barra circular del radio r, la ecuación (5.17), teniendo en cuenta (5.21) y (5.20) resulta:

$$\frac{d^2v}{ds^2} + \frac{v}{r^2} = -\frac{M}{EJ};$$

$$\frac{d^2v}{d\varphi^2} + v = -\frac{Mr^2}{EJ}. \tag{5.22}$$

Esta es la ecuación diferencial de los desplazamientos radiales.

La ecuación diferencial de los desplazamientos por la tangente (5.20) es,

$$\frac{du}{ds} - \frac{v}{r} = 0. \tag{5.23}$$

Para determinar los momentos de flexión en la barra circular después de perder la estabilidad, examinemos una parte de la barra bajo la carga hidrostática (fig. 125). Se sabe que, en la sección del medio, la fuerza longitudinal N hasta la pérdida de la estabilidad, durante la configuración circular de los arcos, sin tener en cuenta la reducción de su espesor, es igual a qr [36].

Supongamos que al comienzo de la pérdida de la estabilidad, el punto a se trasladó a a_1 y el punto b a b_1. La proyección horizontal

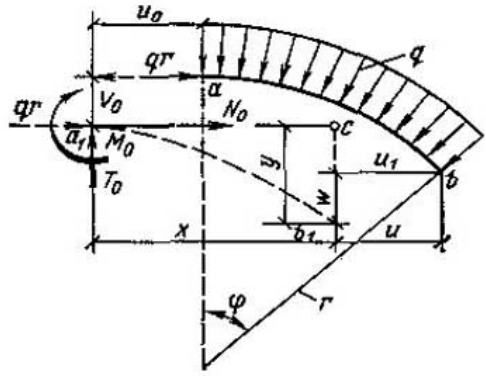


Fig. 125

de la parte de la barra a_1b_1 en el estado de deformación la designamos a través de x; la vertical, a través de y; y los desplazamientos de los puntos a y b por la horizontal y vertical respectivamente a través de u_0, v_0 y u_1, w.

Al perder la estabilidad en el punto a_1 (cuando $\varphi = 0$) surgen, en el caso general, las fuerzas y los momentos N_0, T_0 y M_0 que son sumamente pequeños.

El momento de flexión en la sección b_1 del estado de deformación es el siguiente:

$$M = M_0 + T_0 x + N_0 y + qry - \frac{q}{2}(x^2 + y^2). \qquad (5.24)$$

El último sumando está escrito en base a las propiedades de la carga hidrostática, según las cuales, una placa plana de cualquier forma que flota sobre el de agua, y que soporta igual carga en sus extremos, debe permanecer en equilibrio. Por eso, la curva a_1b_1 puede ser cambiada por una quebrada a_1cb_1 (fig. 125) con la misma carga q. Evidentemente:

$$x = r \operatorname{sen} \varphi - u_1 + u_0;$$
$$y = r - r \cos \varphi + \omega - v_0.$$

Substituyendo estas expresiones a (5.24) obtenemos

$$M = M_0 + T_0 (r \operatorname{sen} \varphi - u_1 + u_0) + N_0 (r - r \cos \varphi + w - v_0) +$$
$$+ qr (r - r \cos \varphi + w - v_0) - \frac{q}{2} [r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - 2r \operatorname{sen} \varphi (u_1 - u_0) +$$
$$+ (u_1 - u_0)^2 + r^2 - 2r^2 \cos \varphi + r^2 \cos^2 \varphi +$$
$$+ 2r (1 - \cos \varphi) (w - v_0) + (w - v_0)^2].$$

Despreciando cantidades pequeñas de órdenes superiores, la expresión de los momentos de flexión la escribimos de la siguiente forma:

$$M = A + B \operatorname{sen} \varphi + C \cos \varphi + qrv, \qquad (5.25)$$

donde

$$A = M_0 + N_0 r;$$

$$B = T_0 r - q r u_0;$$

$$C = -(N_0 r + q r v_0).$$

La expresión de las fuerzas transversales es:

$$Q = \frac{dM}{ds} = \frac{B}{r}\cos\varphi - \frac{C}{r}\operatorname{sen}\varphi + qr\frac{dv}{ds}. \qquad (5.26)$$

Para la forma simétrica las pérdidas de la estabilidad son $T_0 = 0$ y $u_0 = 0$; entonces, $B = 0$. En la forma antisimétrica las pérdidas de la estabilidad son $M_0 = 0$; $N_0 = 0$; $v_0 = 0$ y en consecuencia, $A = 0$ y $C = 0$.

Formulemos ahora las expresiones de los desplazamientos radiales y tangenciales en forma general. Primero substituyamos la expresión (5.25) en la ecuación (5.22):

$$\frac{d^2v}{d\varphi^2} + v = -\frac{r^2}{EJ}(A + B\operatorname{sen}\varphi + C\cos\varphi + qrv).$$

Escribámosla de la siguiente forma:

$$\frac{d^2v}{d\varphi^2} + k^2 v = -\frac{r^2}{EJ}(A + B\operatorname{sen}\varphi + C\cos\varphi), \qquad (5.27)$$

donde

$$k^2 = \frac{qr^2}{EJ} + 1; \quad q_{cr} = \frac{EJ}{r^3}(k^2 - 1).$$

La integral de la ecuación (5.27) será:

$$v = D_1\operatorname{sen} k\varphi + D_2\cos k\varphi - \frac{Ar^2}{k^2 EJ} + \frac{Br^2\operatorname{sen}\varphi}{EJ(1-k^2)} + \frac{Cr^2\cos\varphi}{EJ(1-k^2)}. \qquad (5.28)$$

Después de esta ecuación, la (5.23) la presentamos así:

$$u = \int v\,d\varphi = \int \left[D_1\operatorname{sen} k\varphi + D_2\cos k\varphi - \frac{Ar^2}{k^2 EJ} + \right.$$

$$\left. + \frac{Br^2\operatorname{sen}\varphi}{EJ(1-k^2)} + \frac{Cr^2\cos\varphi}{EJ(1-k^2)} \right] d\varphi.$$

Al integrar, obtenemos:

$$u = -\frac{D_1\cos k\varphi}{k} + \frac{D_2\operatorname{sen} k\varphi}{k} - \frac{Ar^2}{k^2 EJ}\varphi -$$

$$- \frac{Br^2\cos\varphi}{EJ(1-k^2)} + \frac{Cr^2\operatorname{sen}\varphi}{EJ(1-k^2)} + E.$$

Determinamos la constante arbitraria E para $\varphi = 0$, $u = u_0$:

$$E = u_0 + \frac{D_1}{k} + \frac{Br^2}{EJ(1-k^2)};$$

$$u = u_0 + \frac{D_1}{k}(1 - \cos k\varphi) + D_2 \frac{\operatorname{sen} k\varphi}{k} - \frac{Ar^2}{k^2 EJ}\varphi -$$

$$- \frac{Br^2(\cos\varphi - 1)}{EJ(1-k^2)} + \frac{Cr^2 \operatorname{sen}\varphi}{EJ(1-k^2)}. \qquad (5.29)$$

ESTABILIDAD DE LOS ARCOS CON DOS ARTICULACIONES

Si despreciamos los acortamientos de la longitud del arco desde el eje longitudinal, entonces el eje del arco circular coincidirá con la curva funicular provocada por la carga hidrostática y, como es sabido, el arco con tal carga estará solamente comprimido.

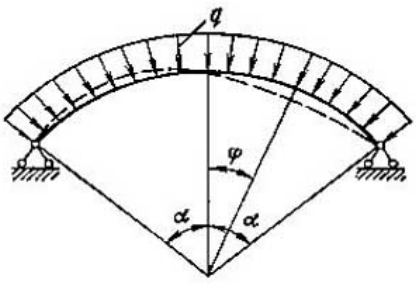


Fig. 126

Forma antisimétrica de la pérdida de la estabilidad (fig. 126). Para la forma antisimétrica de la pérdida de la estabilidad las expresiones (5.25) y (5.28) serán:

$$M = B \operatorname{sen}\varphi + qrv; \qquad (5.30)$$

$$v = D_1 \operatorname{sen} k\varphi + D_2 \cos k\varphi + \frac{Br^2 \operatorname{sen}\varphi}{EJ(1-k^2)}. \qquad (5.31)$$

La condición de frontera en el eje de simetría, para $\varphi = 0$, donde $v = 0$, resulta $D_2 = 0$. Las condiciones de frontera en el arranque del arco, cuando $\varphi = \alpha$, resultan $M = 0$; $v = 0$. Según (5.30) obtenemos $B \operatorname{sen}\alpha = 0$, entonces, $B = 0$. Ahora la expresión (5.31) será:

$$v = D_1 \operatorname{sen} k\varphi. \qquad (5.32)$$

La flexión lateral del arco transcurre en dos semiondas de la sinusoide. La condición de frontera en el arranque del arco es,

$$D_1 \operatorname{sen} k\alpha = 0; \text{ por lo tanto, } k\alpha = \pi; \; k^2 = \frac{\pi^2}{\alpha^2} =$$

$$= \left(\frac{qr^3}{EJ} + 1\right); \qquad (5.33)$$

$$q_{cr} = \frac{EJ}{r^3}\left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1\right).$$

La fuerza longitudinal crítica es la siguiente:

$$N_{cr} = q_{cr} r = \frac{EJ}{r^2}\left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1\right). \qquad (5.34)$$

En aquellos arcos en que $\alpha \leqslant \pi/4$, puede despreciarse la unidad en (5.34) y escribir esta expresión de la siguiente forma:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{\left(\frac{s}{2}\right)^2}, \qquad (5.35)$$

donde $s/2$ es la mitad de la longitud del arco, lo que corresponde a la barra, con apoyos articulados, los cuales tienen una longitud

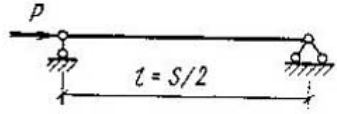


Fig. 127

de $l = s/2$ (fig. 127).

Debemos señalar que la forma antisimétrica de la pérdida de la estabilidad nos brinda valores más pequeños de las fuerzas críticas que la simétrica, por eso, a esta última no la examinamos.

ESTABILIDAD DE LOS ARCOS SIN ARTICULACIÓN

Forma antisimétrica de la pérdida de la estabilidad. La expresión de los desplazamientos radiales es:

$$v = D_1 \operatorname{sen} k\varphi + D_2 \cos k\varphi + \frac{Br^2 \operatorname{sen} \varphi}{EJ(1-k^2)} \text{ [véase (5.31)]};$$

$$\frac{dv}{d\varphi} = kD_1 \cos k\varphi - kD_2 \operatorname{sen} k\varphi + \frac{Br^2 \cos \varphi}{EJ(1-k^2)}.$$

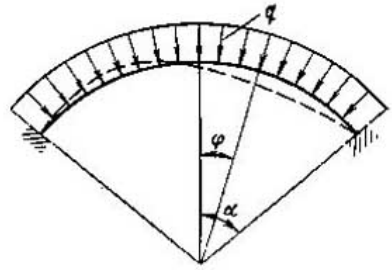


Fig. 128

En el eje de simetría cuando $\varphi = 0$, $v = 0$, lo que determina que $D_2 = 0$. En el arranque del arco, cuando $\varphi = \alpha$, $v = 0$ y $\frac{dv}{d\varphi} = 0$. Escribimos estas condiciones:

$$D_1 \operatorname{sen} k\alpha + \frac{Br^2 \operatorname{sen} \alpha}{EJ(1-k^2)} = 0;$$

$$kD_1 \cos k\alpha + \frac{Br^2 \operatorname{sen} \alpha}{EJ(1-k^2)} = 0.$$

La ecuación de la estabilidad es:

$$D = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} k\alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ k \cos k\alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = 0. \qquad (5.36)$$

En consecuencia

$$\operatorname{tg} k\alpha = k \operatorname{tg} \alpha.$$

En la tabla 5 se dan los valores de k para diferentes α. Si en este caso, la mitad del arco aproximadamente la igualamos a una barra empotrada por un extremo y con un apoyo articulado en el otro (fig. 129), entonces los coeficientes k_1 serán algo distintos a los exactos (véase la tabla 5).

Tabla 5.

α	30°	60°	90°	120°	150°	180°
k	8,621	4,375	3	2,364	2,066	2
k_1	8,65	4,41	3,03	2,37	1,99	1,75

Si el arco tiene en los arranques emportamientos elásticos al giro, que se caracterizan por la igualdad $v' = cM$, entonces al componer las ecuaciones de la estabilidad en la segunda condición

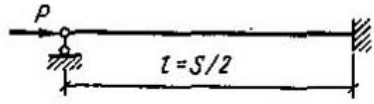


Fig. 129

de frontera, hay que introducir la corrección a la compresibilidad del apoyo y escribir las condiciones de frontera de la siguiente manera:

$$D_1 \operatorname{sen} k\alpha + \frac{Br^2 \operatorname{sen} \alpha}{EJ(1-k^2)} = 0;$$

$$kD_1 \cos k\alpha + \frac{Br^2 \cos \alpha}{EJ(1-k^2)} = cB \operatorname{sen} \alpha.$$

La ecuación de la estabilidad será:

$$\operatorname{ctg} \alpha - k \operatorname{ctg} k\alpha = \frac{cEJ(1-k^2)}{r^2}. \qquad (5.37)$$

Las cargas críticas en los apoyos elásticos son más pequeñas que en los rígidos. Al igual que en los arcos de dos articulaciones, la forma antisimétrica de la pérdida de la estabilidad, da valores menores de las fuerzas críticas, que la simétrica.

La forma antisimétrica de la pérdida de la estabilidad (veáse la fig. 126) de los arcos de tres articulaciones no se diferencia en realidad de la forma análoga de la pérdida de la estabilidad de los arcos de dos articulaciones; por eso, las cargas críticas se determinan por la fórmula (5.34). Pero ellas son más grandes que las cargas críticas para formas simétricas de la pérdida de la estabilidad examinadas más adelante.

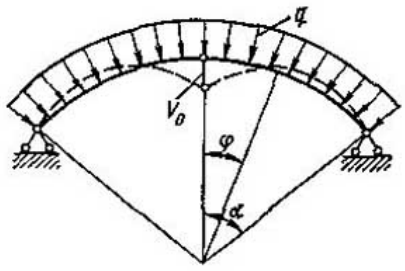


Fig. 130

La forma simétrica de la pérdida de la estabilidad (fig. 130) es,

$$M = A + C\cos\varphi + qrv.$$

Cuando $\varphi = 0$, $A + C + qrv_0 = 0$; si $\varphi = \alpha$, $A + C\cos\alpha = 0$. De estas dos ecuaciones obtenemos:

$$A = -qrv_0\cos\alpha : (\cos\alpha - 1);\quad C = qrv_0 : (\cos\alpha - 1). \tag{5.38}$$

La ecuación de los desplazamientos radiales es:

$$v = D_1\operatorname{sen} k\varphi + D_2\cos k\varphi - \frac{Ar^2}{k^2EJ} + \frac{Cr^2\cos\varphi}{EJ(1-k^2)}. \tag{5.39}$$

$$\text{Cuando } \varphi = 0\quad v_0 = D_2 - \frac{Ar^2}{k^2EJ} + \frac{Cr^2}{EJ(1-k^2)}.$$

De aquí, teniendo en cuenta (5.38) obtenemos:

$$D_2 = v_0\left[1 - \frac{qr\cos\alpha}{\cos\alpha - 1}\,\frac{r^2}{k^2EJ} - \frac{qr}{\cos\alpha - 1}\,\frac{r^2}{EJ(1-k^2)}\right].$$

Ahora la ecuación (5.39) resulta:

$$v = D_1\operatorname{sen} k\varphi + v_0\left[1 - \frac{qr\cos\alpha}{\cos\alpha - 1}\,\frac{r^2}{k^2EJ} - \right.$$
$$\left. - \frac{qr}{(\cos\alpha - 1)}\,\frac{r^2}{EJ(1-k^2)}\right]\cos k\varphi +$$
$$+ v_0\,\frac{qr\cos\alpha}{\cos\alpha - 1}\,\frac{r^2}{k^2EJ} + v_0\,\frac{qr}{\cos\alpha - 1}\,\frac{r^2\cos\varphi}{EJ(1-k^2)}. \tag{5.40}$$

La ecuación de los desplazamientos tangenciales es:

$$u = D_1\,\frac{(1-\cos k\varphi)}{k} + \frac{\operatorname{sen} k\varphi}{k}\,v_0\left[1 - \frac{qr\cos\alpha}{(\cos\alpha - 1)}\times\right.$$
$$\left.\times\,\frac{r^2}{k^2EJ} - \frac{qr}{(\cos\alpha - 1)}\,\frac{r^2}{EJ(1-k^2)}\right] + v_0\,\frac{qr\cos\alpha}{(\cos\alpha - 1)}\times$$
$$\times\,\frac{r^2}{k^2EJ}\,\varphi + v_0\,\frac{qr}{(\cos\alpha - 1)}\,\frac{r^2\operatorname{sen}\varphi}{EJ(1-k^2)}. \tag{5.41}$$

Las condiciones de frontera en el arranque del arco cuando $\varphi = \alpha$, $v = 0$ y $u = 0$ son:

$$D_1 \operatorname{sen} k\alpha + v_0 \left[1 - \frac{qr \cos \alpha}{(\cos \alpha - 1)} \frac{r^2}{k^2 EJ} - \frac{qr}{(\cos \alpha - 1)} \frac{r^2}{EJ(1-k^2)} \right] \cos k\alpha +$$

$$+ v_0 \frac{qr \cos \alpha}{(\cos \alpha - 1)} \frac{r^2}{k^2 EJ} + v_0 \frac{qr}{(\cos \alpha - 1)} \frac{r^2 \cos \alpha}{EJ(1-k^2)} = 0; \qquad (5.42)$$

$$D_1 \frac{(1 - \cos k\alpha)}{k} + \frac{\operatorname{sen} k\alpha}{k} v_0 \left[1 - \frac{qr \cos \alpha}{(\cos \alpha - 1)} \frac{r^2}{k^2 EJ} - \right.$$

$$\left. - \frac{qr}{(\cos \alpha - 1)} \frac{r^2}{EJ(1-k^2)} \right] + v_0 \frac{qr \cos \alpha}{(\cos \alpha - 1)} \frac{r^2 \alpha}{k^2 EJ} +$$

$$+ v_0 \frac{qr}{(\cos \alpha - 1)} \frac{r^2 \operatorname{sen} \alpha}{EJ(1-k^2)} = 0. \qquad (5.43)$$

La ecuación de la estabilidad la obtenemos igualando a cero el determinante del sistema de ecuaciones (5.42) y (5.43). Luego de su transformación ésta, toma la siguiente forma:

$$\frac{4(\operatorname{tg} \alpha - \alpha)}{\alpha^3} = \frac{\operatorname{tg} u - u}{u^3}, \qquad (5.44)$$

donde $u = k\alpha/2$.

Para todos los casos de los arcos examinados se pueden componer las fórmulas de las cargas críticas de la siguiente forma:

$$q_{cr} = K \frac{EJ}{r^3}; \qquad (5.45)$$

$$q_{cr} = K_1 \frac{EJ}{l^3}. \qquad (5.46)$$

Los valores de los coeficientes K y K_1 están representados en las tablas 6 y 7 [34].

Tabla 6. Valores de K

α, grad.	Arco sin articulación	Arco de dos articulaciones	Arco de tres articulaciones
15	294	143	108
30	73,3	32	27,6
45	32,4	15	12
60	18,1	8	6,75
75	11,5	4,76	4,32
90	8	3	3

Tabla 7. Valores de K_1

$f : l$	Arco sin articulación	Arco de dos articulaciones	Arco de tres articulaciones
0,1	58,9	28,4	22,2
0,2	90,4	39,3	33,5
0,3	93,4	40,9	34,9
0,4	80,7	32,8	30,2
0,5	64	24	24

ESTABILIDAD DE LOS ANILLOS SIN ARTICULACIÓN (FIG. 131)

Aplicamos la expresión general (5.28):

$$v = D_1 \operatorname{sen} k\varphi + D_2 \cos k\varphi - \frac{Ar^2}{k^2 EJ} + \frac{Br^2 \operatorname{sen} \varphi}{EJ(1-k^2)} + \frac{Cr^2 \cos \varphi}{EJ(1-k^2)}.$$

Según la condición en la que $v(\pi/2) = v(-\pi/2)$, se deduce que $D_1 = 0$ y $B = 0$. Ahora

$$v = D_2 \cos k\varphi - \frac{Ar^2}{k^2 EJ} + \frac{Cr^2 \cos \varphi}{EJ(1-k^2)}. \qquad (5.47)$$

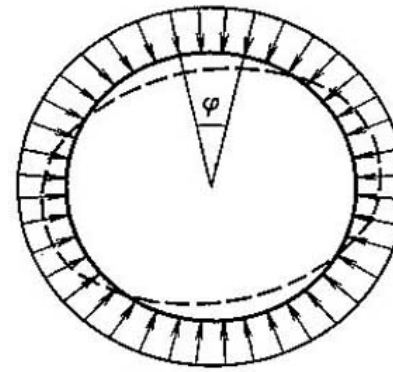


Fig. 131

La fuerza longitudinal Q de acuerdo con (5.26) es la siguiente:

$$Q = -\frac{C}{r} \operatorname{sen} \varphi + qr \frac{dv}{ds}.$$

De acuerdo a la condición de simetría, cuando $\varphi = \pi/2$, donde $dv/ds = 0$, la fuerza transversal es $Q = 0$:

$Q = -C/r = 0$, en consecuencia $C = 0$.

Ahora (5.47) será

$$v = D_2 \cos k\varphi - \frac{Ar^2}{k^2 EJ}.$$

Respectivamente

$$\frac{dv}{d\varphi} = -kD_2 \operatorname{sen} k\varphi. \qquad (5.48)$$

Cuando $\varphi = \pi/2$, donde $dv/d\varphi = 0$, según (5.48) obtenemos

$$-kD_2 \operatorname{sen} k\pi/2 = 0.$$

De aquí se deduce

$$\operatorname{sen} \frac{k\pi}{2} = \pi; \quad k = 2.$$

En consecuencia

$$q_{cr} = 3\frac{EJ}{r^3}. \qquad (5.49)$$

Este mismo valor de k lo obtenemos de la tabla 5 para el arco sin articulación, cuando $2\alpha = 180°$.

§ 25. ESTABILIDAD DE LOS ARCOS PARABÓLICOS CON UNA CARGA UNIFORME. Si despreciamos los acortamientos del eje del arco debidos a la fuerza longitudinal, entonces independientemente de su indeterminación estática, el eje del arco coincidirá con la curva funicular debida a la carga uniforme y, en consecuencia, cualquier arco con tal premisa estará solamente comprimido.

Las investigaciones analíticas de los arcos parabólicos con una carga uniforme son mucho más complejas que las de los circulares. En virtud de esto, frecuentemente tenemos que valernos de los métodos de investigación aproximados, como, por ejemplo, el cambio del arco por el pórtico formado de las cuerdas del arco, etc.

He aquí algunos de los datos obtenidos de las investigaciones de la estabilidad de los arcos parabólicos.

En todos los casos, la carga crítica la determinamos según la fórmula

$$q_{cr} = m\frac{EJ_0}{l^3}, \qquad (5.50)$$

donde J_0 es el momento de inercia en la clave del arco.

Si el arco es de sección uniforme y la carga uniforme en el momento de la pérdida de la estabilidad gira junto con el arco, entonces, el coeficiente m se determina según la tabla 8. En el caso de la carga

Tabla 8. Valor de m

$f:l$	Arco sin articulaciones	Arco de dos articulaciones	Arco de tres articulaciones
0,1	60,7	28,5	22,5
0,2	101	45,5	39,6
0,3	115	46,5	46,5
0,4	111	43,9	43,9
0,5	97,4	38,4	38,4
0,6	83,8	30,5	30,5
0,8	59,1	20	20
1	43,7	14,1	14,1

no girada, sus valores críticos son un poco más elevados [53].

Si el arco tiene una resistencia igual, cuyo $F = F_0 : \cos\varphi$, donde F_0 es la superficie de la sección en la clave del arco, entonces:

cuando la sección de forma rectangular tiene una anchura constante, es decir, cuando $J = J_0 : \cos^3 \varphi$, el coeficiente m se determina de acuerdo a la tabla 9;

Tabla 9. Valor de m para $J = J_0 : \cos^3 \varphi$

$f : l$	Arco sin articulaciones	Arco de dos articulaciones	Arco de tres articulaciones
0,1	65,5	30,7	24
0,2	134	59,8	51,2
0,3	204	81,1	81,1
0,4	277	101	—
0,6	444	142	—
0,8	587	170	—
1	700	193	—

en caso de que la sección rectangular tenga una altura constante de la misma forma, es decir, cuando $J = J_0 : \cos \varphi$, el coeficiente m se determina según la tabla 10 [53].

Tabla 10. Valor de m cuando $J = J_0 : \cos \varphi$

$f : l$	Arco sin articulaciones	Arco de dos articulaciones	Arco de tres articulaciones
0,1	62,3	29,5	23,2
0,2	112	49	43,6
0,3	—	—	59
0,4	154	57	—
0,6	152	52	—
0,8	133	44	—
1	118	37	—

§ 26. ESTABILIDAD DEL CORDÓN SUPERIOR DE LOS PUENTES ABIERTOS. Se denomina puente abierto, al puente con armaduras bajas sin arriostramientos contra viento superior. Examinemos una armadura con cordones paralelos y celosía de riostra bajo la acción de una carga uniforme q (fig. 132, *a*).

La flexión lateral del cordón superior comprimido de la armadura, en su plano, es entorpecida por los nudos de la misma, formados por montantes y riostras que trabajan para la fuerza longitudinal; y aquí no hay diferencia entre las armaduras que tienen arriostramientos contra viento en el cordón superior, y las que no los tienen. Los montantes de la armadura empotrados en las vigas transversales del puente, que trabajan en la flexión lateral del cordón y sin los enlaces de flexión, entorpecen la flexión lateral del cordón superior

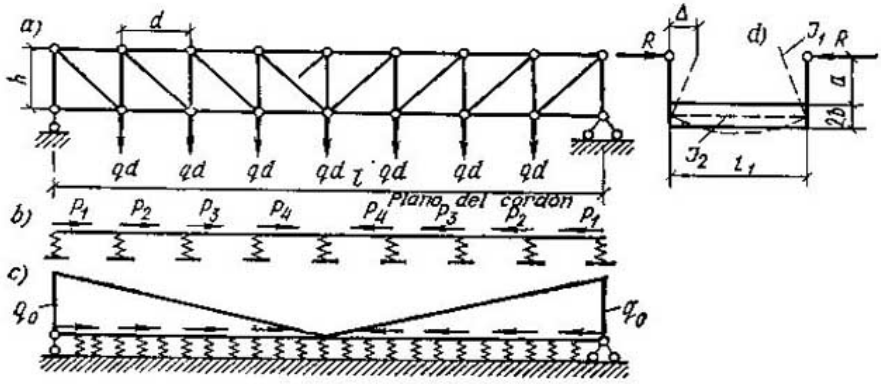


Fig. 132

del plano de la armadura. Estos montantes representan apoyos elásticos para la barra de múltiples luces en forma de un cordón superior. Las fuerzas concentradas se transmiten desde las riostras al cordón, comprimiéndolo en los extremos, y en el espacio. Así pues el esquema de cálculo del cordón superior, en la flexión lateral, será una barra de múltiples luces sobre apoyos elásticos con las fuerzas concentradas en los extremos y en la luz (fig. 132, *b*).

En virtud de que los pórticos de apoyo abiertos son generalmente rígidos, se considera, con frecuencia, como rígidos a los apoyos extremos de la barra [36].

Luego, para simplificar el problema, los apoyos concentrados se cambian por una base elástica continua (fig. 132, c), y las fuerzas concentradas por la carga continua distribuida en un triángulo. Con el mismo fin, se toma a la sección del cinturón como constante.

La reacción del apoyo elástico concentrado R, relacionada con el desplazamiento del cordón comprimido de flexión lateral Δ, a través de la igualdad $R = C\,\Delta$, se determina examinando el estado de deformación del pórtico transversal abierto del puente (fig. 132, *d*) al actuar sobre él las fuerzas R. Como resultado tenemos

$$\Delta = \frac{Ra^3}{3EJ_1\left(1-\frac{P}{P_e}\right)} + \frac{R(a+b)^2 l_1}{2EJ_2}, \qquad (5.51)$$

donde J_1 es el momento de inercia del montante cuando se flexiona del plano de la armadura; J_2 es el momento de inercia de la viga transversal; P es la fuerza comprimida en el montante; P_e es la fuerza de Euler del montante cuando se flexiona lateralmente del plano de la armadura.

En el primer sumando (5.51) se tiene en cuenta la flexión aproximada del montante, en el segundo, la flexión de la viga transversal. De la expresión (5.51) obtenemos el coeficiente de resistencia del

apoyo elástico:

$$C=\frac{R}{\Delta}=1:\left[\frac{a^3}{3EJ_1\left(1-\frac{P}{P_e}\right)}+\frac{(a+b)^2 l_1}{2EJ_2}\right]. \qquad (5.52)$$

El coeficiente de lecho de la base continua es:

$$c=\frac{C}{d}=1:d\left[\frac{a^3}{3EJ_1\left(1-\frac{P}{P_e}\right)}+\frac{(a+b)^2 l_1}{2EJ_2}\right] \qquad (5.53)$$

donde d es la longitud del panel.

Para la solución apliquemos la igualdad del método energético [véase (1.41)]:
donde

$$\delta T=\delta V=\delta V_1+\delta V_2, \qquad (5.54)$$

$$\delta V_1=\int_0^l \frac{EJ_{\text{cordón}}}{2}(y'')^2\,dz, \quad \text{es la energía de la flexión del cinturón;} \qquad (5.55)$$

$$\delta V_2=\int_0^l \frac{c}{2}(y)^2\,dz, \quad \text{es la energía de la base elástica.} \qquad (5.56)$$

Para calcular δT supongamos que un elemento infinitesimal del cordón dz girado en un ángulo y' (fig. 133), y como resultado, la

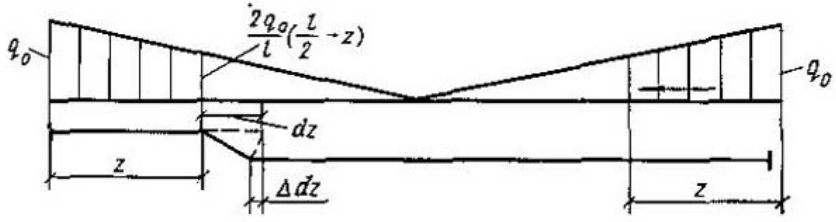


Fig. 133

parte derecha del cordón se aproxima a la izquierda en:

$$\Delta\,dz=(y')^2\frac{dz}{2}. \qquad (5.57)$$

El trabajo de la carga, en esta aproximación se puede calcular a través del trabajo de la parte sombreada de la carga, ya que su parte no sombreada, realiza un trabajo igual a cero:

$$d(\delta T)=\Delta P(\Delta\,dz)=\frac{q_0(l-z)z}{l}(y')^2\frac{dz}{2};$$

$$\delta T=\frac{q_0}{2l}\int_0^l (y')^2 z(l-z)\,dz. \qquad (5.58)$$

Supongamos que

$$y = \sum a_k \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l}. \tag{5.59}$$

Luego después de substituir (5.59) en (5.55), (5.56), (5.58) y luego en (5.54) e integrar, obtenemos:

$$\frac{q_0 l}{4} = \frac{\frac{\pi^4 EJ}{8l^2} \sum a_k^2 k^4 + \frac{cl^2}{8} \sum a_k^2}{\sum a_k^2 \left(\frac{k^2\pi^2}{12} - \frac{1}{4}\right) - 4 \sum_k \sum_n a_k a_n \frac{kn\,(k^2+n^2)}{(k^2-n^2)^2}}, \tag{5.60}$$

donde, en la suma doble $k + n$ es par y $k \neq 0$.

Luego se formulan las expresiones derivadas parciales (5.60) según los parámetros a_k y se igualan a cero, lo que se reduce al sistema de las ecuaciones algebraicas. Su solución resulta

$$\left(\frac{q_0 l}{4}\right)_{cr} = \frac{\pi^2 EJ_{cor}}{(\mu l)^2},$$

donde μ es el coeficiente de la longitud, determinado según la tabla 11

Tabla 11

$\frac{cl^4}{16\,EJ_{cor}}$	μ	$\frac{cl^4}{16\,EJ_{cor}}$	μ	$\frac{cl^4}{16\,EJ_{cor}}$	μ
0	0,696	22,8	0,363	200	0,246
5	0,524	56,5	0,324	300	0,225
10	0,443	100	0,29	500	0,204
15	0,396	162,8	0,259	1000	0,174

(véase más detalladamente en [36]).

CAPÍTULO 6 * ESTABILIDAD DE LA FORMA PLANA DE LA FLEXIÓN

§ 27. ESTABILIDAD DE UNA VIGA FINA Y ALTA DE SECCIÓN RECTANGULAR, SOBRE DOS APOYOS CON FLEXIÓN PURA (fig. 134, *a*). Si una viga fina y alta de sección rectangular se encorva en el plano principal con la máxima rigidez, entonces, la forma plana de flexión fuera de las cargas críticas se convierte en inestable y, tiene lugar la flexión lateral de la viga, cosa que hemos señalado anteriormente en la fig. 5, *d*. En nuestro caso, las cargas son los momentos aplicados en los extremos de la viga.

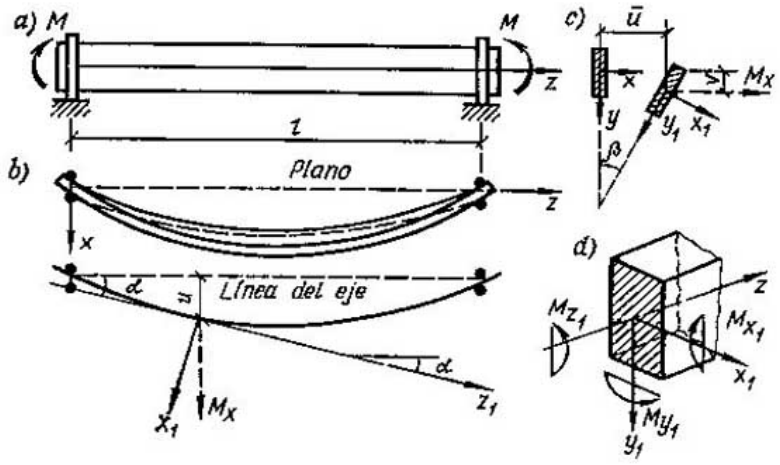


Fig. 134

Consideremos como fijaciones de los extremos de la viga a aquellas, en las cuales, las secciones de apoyo extremas pueden desplazarse sólo en el plano vertical, que pasa por el eje de la viga.

Examinemos una viga en el mismo momento inicial de la pérdida de la estabilidad, cuando ésta comienza a flexionarse lateralmente. Supongamos que una sección a la distancia de z del apoyo izquierdo, durante la flexión lateral, se desplazó en un pequeño ángulo β, es decir, su nuevo eje y_1 está inclinado hacia la vertical en este ángulo (fig. 134, *c*), y la viga en el plano, ocupó la posición representada en la fig. 134, *b*. La nueva normal, con respecto a la sección (eje z_1) forma en el plano con el eje z un pequeño ángulo α.

Tomamos las direcciones positivas de los momentos flectores M_x, M_y y, del momento torsional M_z en el estado de deformación debido y las fuerzas de la izquierda, de acuerdo a la fig. 134, *d*. Representemos en la fig. 134, *b* y *c* con una línea punteada el vector del momento $M_x = M$ y tracemos sus proyecciones en el eje x_1, y_1 y z_1. Con una exactitud infinitesimal de primer orden tendremos:

$$M_{x_1} = M_x = M; \tag{6.1}$$

$$M_{y_1} = -M\beta; \tag{6.2}$$

$$M_{z_1} = M\alpha + M\frac{du}{dz}. \tag{6.3}$$

Las ecuaciones diferenciales de torsión y flexión respectivamente son

$$\frac{d\beta}{dz} = \frac{M_{z_1}}{GJ_k} = M\frac{\partial u}{dz} : GJ_k; \tag{6.4}$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{M_{y_1}}{EJ_y} = -\frac{M\beta}{EJ_y}, \tag{6.5}$$

donde

$$J_k = \frac{hb^3}{3}\left(1 - 0{,}63\frac{b}{h}\right);\ J_y = \frac{hb^2}{12}.$$

Al diferenciar (6.4) y teniendo en cuenta (6.5) obtenemos:

$$\frac{d^2\beta}{dz^2} + k^2\beta = 0, \tag{6.6}$$

donde

$$k^2 = \frac{M_{cr}^2}{EJ_yGJ_k}.$$

El integral (6.6) será:

$$\beta = A \operatorname{sen} kz + B \cos kz.$$

La condición de frontera en el extremo izquierdo de la viga, donde $\beta = 0$ resulta $B = 0$; en el extremo derecho de la viga cuando $z = l$, $\beta = 0$,

$$A \operatorname{sen} kl = 0. \tag{6.7}$$

Cuando $A = 0$ la flexión lateral no ocurre, lo cual testimonia la probabilidad de la forma inestable inicial del equilibrio en el estado de deformación. Para sen $kl = 0$, $kl = \pi$;

$$k^2 = \frac{\pi^2}{l^2} = \frac{M_{cr}^2}{EJ_yGJ_k}.$$

De aquí obtenemos

$$M_{cr} = \frac{\pi}{l}\sqrt{EJ_yGJ_k}. \tag{6.8}$$

Si la viga sobre los apoyos estuviera empotrada, entonces

$$M_{cr} = \frac{2\pi}{l}\sqrt{EJ_yGJ_k}. \tag{6.9}$$

§ 28. ESTABILIDAD DE UNA VIGA ALTA Y FINA DE SECCIÓN RECTANGULAR CON UNA FUERZA EN EL CENTRO DE LA LUZ (fig. 135). En este caso el momento flector en la sección z del estado no deformado es

$$M_x = \frac{P}{2}z. \tag{6.10}$$

De acuerdo con esto los momentos M_{y_1} y M_{z_1} son:

$$M_{y_1} = -\frac{Pz}{2}\beta; \tag{6.11}$$

$$M_{z_1} = \frac{P}{2}z\frac{du}{dz} - \frac{P}{2}u. \tag{6.12}$$

Escribimos la ecuación (6.4):

$$\frac{d\beta}{dz} = \left(\frac{P}{2}z\frac{du}{dz} - \frac{P}{2}u\right) : GJ_k.$$

Diferenciándola y teniendo en cuenta (6.12) obtenemos:

$$\frac{d^2\beta}{dz^2} + y^2 z^2 \beta = 0, \tag{6.13}$$

donde

$$k^2 = \frac{P_{cr}^2}{4GJ_k EJ_y}. \tag{6.14}$$

Su solución puede representarse en forma de series sin límites

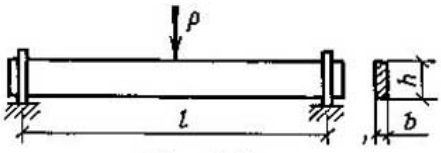


Fig. 135

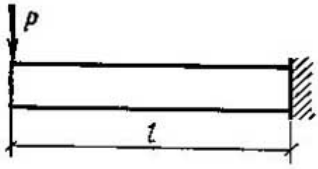


Fig. 136

$$\beta = A\left(1 - \frac{k^2}{3\cdot 4} z^4 - \frac{k^4}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8} z^8 - \frac{k^6}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12} z^{12} + \ldots\right) +$$

$$+ B\left(z - \frac{k^2}{4\cdot 5} z^5 + \frac{k^4}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9} z^9 - \frac{k^6}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13} z^{13} + \ldots\right). \tag{6.15}$$

Las condiciones de frontera son: 1) cuando $z = 0$; $\beta = 0$; 2) cuando $z = \frac{l}{2}$, $\beta' = 0$. La primera condición resulta $A = 0$. Luego tenemos

$$\beta' = B\left(1 - \frac{k^2 z^4}{4} + \frac{k^4 z^8}{4\cdot 5\cdot 8} - \frac{k^6 z^{12}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12} + \ldots\right).$$

En el caso cuando $z = l/2$,

$$B\left[1 - \frac{k^2}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^4 + \frac{k^4}{4\cdot 5\cdot 8}\left(\frac{l}{2}\right)^8 - \frac{k^6}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12}\left(\frac{l}{2}\right)^{12} + \ldots\right] = 0.$$

En consecuencia

$$\left(1 - a + \frac{a^2}{10} - \frac{a^3}{270} + \ldots\right) = 0, \tag{6.16}$$

donde

$$a = \frac{k^2 l^4}{64} = \frac{P_{cr}^2 l^4}{256\, GJ_k EJ_y}. \tag{6.17}$$

Teniendo dos sumandos: $a = 1$; $P_{cr} = \frac{16\sqrt{GJ_k EJ_y}}{l^2}$. En el caso de tres sumandos: $1 - a + \frac{a^2}{10} = 0$.

Resolviendo la ecuación tendremos que $a = 1{,}127$;

$$P_{cr} = \frac{16{,}984\sqrt{GJ_k EJ_y}}{l^2}. \tag{6.18}$$

Si sobre la viga actúa una fuerza uniforme q, entonces

$$(ql)_{cr} = \frac{28{,}3}{l^2} \sqrt{GJ_k EJ_y}. \tag{6.19}$$

Para la viga en voladizo, cargada en el extremo con una fuerza P (fig. 136) tenemos:

$$P_{cr} = \frac{4{,}01}{l^2} \sqrt{GJ_k EJ_y}. \tag{6.20}$$

§ 29. ESTABILIDAD DE UNA VIGA ALTA Y FINA DE SECCIÓN RECTANGULAR SOBRE DOS APOYOS, CON COMPRESIÓN DESCENTRADA (fig. 137). El momento respecto al eje horizontal es:

$$M_x = P_{cr}(e + v) \approx P_{cr}e = M_{cr}. \tag{6.21}$$

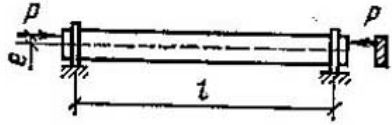


Fig. 137

El momento respecto al eje vertical es:

$$M_y = -P_{cr}u. \tag{6.22}$$

Respectivamente, con una exactitud de hasta pequeños de primer orden obtenemos:

$$M_{x_1} = M_{cr}; \tag{6.23}$$

$$M_{y_1} = -M_{cr}\beta - P_{cr}u; \tag{6.24}$$

$$M_{z_1} = M_{cr}\frac{du}{dz}. \tag{6.25}$$

Para este caso escribimos la ecuación diferencial de flexión (6.5):

$$u'' = -\frac{M_{cr}\beta + P_{cr}u}{EJ_y}. \tag{6.26}$$

Para determinar β aplicamos la ecuación (6.4), la cual teniendo en cuenta (6.25) es $\beta' = \frac{M_{cr}u'}{GJ_k}$. Su integral es $\beta = \frac{M_{cr}u}{GJ_k} + C$. Cuando $z = 0$, $\beta = 0$, $u = 0$ y, por consiguiente $C = 0$.

Ahora la ecuación (6.26) se puede escribir así:

$$u'' + k^2u = 0, \tag{6.27}$$

donde

$$k^2 = (M_{cr}^2 + P_{cr}GJ_k) : GJ_kEJ_y.$$

La integral de esta ecuación es: $u = A \operatorname{sen} kz + B \cos kz$. De las condiciones de frontera, cuando $z = 0$, $u = 0$ y, para $z = l$, $u = 0$, se deduce que $B = 0$ y $A \operatorname{sen} kl = 0$. Esto significa que

$kl = \pi$. De aquí

$$M_{cr}^2 + P_{cr} GJ_k = \frac{\pi^2 EJ_y}{l^2} GJ_k. \qquad (6.28)$$

Si $M_{cr} = 0$, entonces $P_{cr} = \pi^2 EJ_y : l^2$. Si $P_{cr} = 0$, entonces $M_{cr} = \pi/l \sqrt{EJ_y GJ_k}$ [véase (6.8)].

Para la excentricidad dada e, tenemos

$$P_{cr}^2 e^2 + P_{cr} GJ_k = \frac{\pi^2 EJ_y}{l^2} GJ_k. \qquad (6.29)$$

La expresión (6.28) se puede aplicar en caso de compresión con flexión cuando M_{cr} y P_{cr} están relacionadas con un parámetro común o no lo están en absoluto. Es evidente que en el último caso una de las magnitudes debe ser dada.

§ 30. ESTABILIDAD DE LAS VIGAS DE DOBLE T SOBRE DOS APOYOS ARTICULADOS CON FLEXIÓN PURA. El desplazamiento de la sección cuando tiene lugar la flexión lateral se puede formar de tres movimientos: de avance u y v, de su centro de gravedad y del giro en el ángulo β alrededor de este centro (fig. 138).

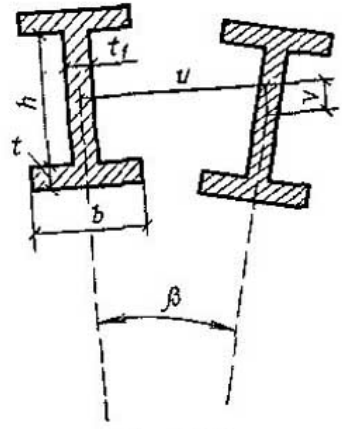


Fig. 138

Los movimientos de avance provocan flexiones, y el giro, una torsión. En la sección se desplanta, al mismo tiempo, las alas de la viga de doble T se encorvan hacia los diferentes lados y en ellas, surgen las fuerzas tangentes, las cuales provocan el momento respecto al eje de la viga.

Así, pues, el momento torsor exterior se equilibrará con dos momentos interiores: el de las tensiones tangentes provocadas por la torsión y el de las fuerzas tangentes en las alas durante su flexión

$$M_{z1} = \beta' GJ_k - Qh, \qquad (6.30)$$

donde $J_k = \frac{2bt^3}{3} + \frac{ht_1^3}{3}$; b y t son la anchura y el espesor de las alas; h y t_1 son la altura y el espesor de su alma; Q es la fuerza transversal en las alas.

El traslado del ala superior con respecto al centro de gravedad de la viga de doble T es:

$$u_1 = \frac{h}{2} \beta;$$

$$Q = EJ_y^* u_1''' = EJ_y^* \beta''' \frac{h}{2}, \qquad (6.31)$$

donde $EJ_y^* \approx E \frac{tb^3}{12}$ (aproximadamente la mitad de EJ_y).

Ahora la ecuación (6.30) teniendo en cuenta (6.3) la escribimos así:

$$M_{cr}u' = \beta' GJ_k - EJ_y^* \frac{h^2}{2}\beta'''.$$

Diferenciando la expresión obtenida y teniendo en cuenta (6.5) obtenemos:

$$\beta^{IV} - a^2\beta'' - d^4\beta = 0, \tag{6.32}$$

donde

$$a^2 = \frac{2GJ_k}{h^2 EJ_y^*}, \quad d^4 = \frac{2M_{cr}^2}{EJ_y EJ_y^* h^2}.$$

La integral (6.32) será:

$$\beta = C_1 \operatorname{sen} mz + C_2 \cos mz + C_3 \operatorname{sh} nz + C_4 \operatorname{ch} nz, \tag{6.33}$$

donde

$$m = \sqrt{-\frac{a^2}{2} + \sqrt{\frac{a^4}{4} + d^4}}; \tag{6.34}$$

$$n = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \sqrt{\frac{a^4}{4} + d^4}}. \tag{6.35}$$

Las constantes arbitrarias se determinan según las condiciones de frontera.

1) Cuando $z = 0$, $\beta = 0$ y $\beta'' = 0$, ya que $u'' = 0$;

$$\beta = C_2 + C_4 = 0; \quad \beta'' = -m^2 C_2 + n^2 C_4 = 0.$$

De estas igualdades tenemos: $C_2 = C_4 = 0$.

De acuerdo a (6.33)

$$\beta = C_1 \operatorname{sen} mz + C_3 \operatorname{sh} n\,. \tag{6.36}$$

2) Cuando $z = l$, $\beta = 0$ y $\beta'' = 0$, ya que $u'' = 0$;

$$\beta = C_1 \operatorname{sen} ml + C_3 \operatorname{sh} nl = 0;$$

$$\beta'' = -m^2 C_1 \operatorname{sen} ml + n^2 C_3 \operatorname{sh} nl = 0. \tag{6.37}$$

La ecuación de estabilidad es:

$$\operatorname{sen} ml\,(n^2 + m^2) \operatorname{sh} nl = 0. \tag{6.38}$$

Entonces, sen $ml = 0$; $ml = \pi$; $m^2 = \pi^2/l^2$ y teniendo en cuenta (6.34)

$$\frac{\pi^2}{l^2} = -\frac{a^2}{2} + \sqrt{\frac{a^4}{4} + d^4}. \tag{6.39}$$

Substituyendo aquí los valores de a^2 y d^4 obtenemos:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{l}\sqrt{EJ_y GJ_k}\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{\gamma}} = \frac{K}{l}\sqrt{EJ_y GJ_k}, \tag{6.40}$$

donde

$$\gamma = EJ_y^* h^2 : GJ_k 2l^2. \tag{6.41}$$

En la tabla 12 están representados los valores de $K = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{\gamma}}$.

Tabla 12

γ	0,1	1	2	4	8	16	32	100	∞
K	31,4	10,36	7,66	5,85	4,7	4	3,59	3,29	π

§ 31. ESTABILIDAD DE LAS VIGAS DE DOBLE T CON CIERTAS CARGAS.

Fuerza concentrada en el centro de la luz. La fuerza crítica se determina por la fórmula

$$P_{cr} = \frac{K}{l^2}\sqrt{EJ_y GJ_k}\ . \qquad (6.42)$$

Los coeficientes K se dan en la tabla 13.

Tabla 13

γ	0,4	4	8	16	32	64	160	400	∞
K	86,4	31,9	25,6	21,8	19,6	18,3	17,5	17,2	16,93

Carga uniforme en todo el tramo. La carga crítica se determina según la fórmula

$$(ql)_{cr} = \frac{K_1}{l^2}\sqrt{EJ_y CJ_k}\ . \qquad (6.43)$$

Los coeficientes de K_1 están representados en la tabla 14.

Tabla 14

γ	0,4	4	8	16	32	64	128	400	∞
K_1	143	53	42,6	36,3	32,6	30,5	29,4	28,6	28,3

CAPÍTULO 7 * ALGUNAS CUESTIONES DE LA ESTABILIDAD

§ 32. ESTABILIDAD DE LAS PLACAS RECTANGULARES CON APOYOS ARTICULADOS EN CUATRO LADOS. Examinemos una placa rectangular con apoyos articulados en cuatro lados y comprimida con las cargas uniformes en dos direcciones (fig. 139). Aplicamos el método energético:

$$\delta T = \delta V. \qquad (7.1)$$

La energía potencial de la flexión de la placa se determina con la expresión

$$\delta v = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \right.$$

$$\left. - \mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx\, dy, \qquad (7.2)$$

donde $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ es la rigidez cilíndrica; h, el espesor de la

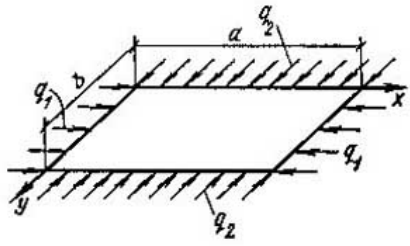


Fig. 139

placa; μ el coeficiente de Poisson.

La expresión de flexión de la placa la damos en forma que satisfaga a las condiciones de frontera

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}. \qquad (7.3)$$

Substituyendo (7.3) a (7.2) obtenemos:

$$\delta V = \frac{D}{8} ab \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \right)^2. \qquad (7.4)$$

El trabajo de las cargas exteriores resulta

$$\delta T = \int_0^b q_1 y \int_0^a \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^a q_2 x \int_0^b \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dy. \qquad (7.5)$$

Substituyendo aquí el valor de (7.3) tendremos

$$\delta T = \left(q_1 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \frac{m^2\pi^2}{a^2} + q^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \frac{n^2\pi^2}{b^2} \right) \frac{ab}{8}. \qquad (7.6)$$

Ahora (7.1) será,

$$q_1 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \frac{m^2\pi^2}{a^2} + q_2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \frac{n^2\pi^2}{b^2} =$$

$$= D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \right)^2. \qquad (7.7)$$

Si $q_2 = 0$, entonces

$$q_1 = D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \right)^2 : \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \frac{m^2\pi^2}{a^2}. \qquad (7.8)$$

No es difícil reconocer que el valor mínimo de la fuerza se obtiene con un sumando:

$$q_1 = \underset{m=1, 2 \ldots \infty;\ n=1, 2 \ldots \infty}{D \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \right)^2 : \frac{m^2\pi^2}{a^2}} = D \frac{\pi^2}{a^2} \left(m + \frac{a^2}{b^2} \frac{n^2}{m} \right)^2. \qquad (7.9)$$

Evidentemente, para obtener valores más pequeños de q_1 teniendo cualquier m, es necesario en la fórmula (7.9) poner $n = 1$. En tal caso

$$q_1 = D \frac{\pi^2}{a^2} \left(m + \frac{a^2}{b^2 m} \right)^2. \qquad (7.10)$$

Para seleccionar m, con la cual q_1 será la más pequeña, supongamos que (7.10) es una función continua, por lo tanto

$$\frac{dq_1}{dm} = D \frac{\pi^2}{a^2} 2 \left(m + \frac{a^2}{b^2 m} \right) \left(1 - \frac{a^2}{b^2 m^2} \right) = 0. \qquad (7.11)$$

De aquí obtenemos $m = a : b$. Esto significa que hay que adoptar m en forma de valores íntegros, entre los cuales está la ecuación (7.11), y luego, según (7.10), determinar dos veces q_1 y de ellos elegir a la menor. Por ejemplo, cuando $a/b = 2{,}5$ obtenemos:

$$\text{cuando } m = 2,\ q_1 = D \frac{\pi^2}{a^2} \left(2 + 2{,}5^2 \frac{1}{2} \right)^2 = 5{,}125^2 D \frac{\pi^2}{a^2};$$

$$\text{cuando } m = 3,\ q_1 = D \frac{\pi^2}{a^2} \left(3 + 2{,}5^2 \frac{1}{3} \right)^2 = 5{,}083^2 D \frac{\pi^2}{a^2}.$$

Si el tamaño de la placa b es mucho más grande que a, entonces $q_1 = D \frac{m^2\pi^2}{a^2}$. Cuando $m = 1$ obtenemos $q_1 = \frac{\pi^2 D}{a^2}$ (fórmula de Euler).

§ 33. CAPACIDAD PORTADORA LÍMITE DE UNA BARRA COMPRIMIDA Y ENCORVADA (ESTABILIDAD DE SEGUNDO GÉNERO). Examinemos una barra comprimida y encorvada (fig. 140). La forma de equilibrio de la barra en estado de deformación no cambia en principio hasta su destrucción. En la fig. 141 está

representada la dependencia aproximada del incremento de la flexión de la barra con el aumento de la carga. El estado elástico de trabajo del material se expresa con la curva $P - f$ hasta cierto punto a, cuestión que se deduce de la teoría de la flexión longitudinal y transversal. Luego la curva de dependencia $P - f$ se relacionará con el estadio elástico-plástico de trabajo del material y ade-

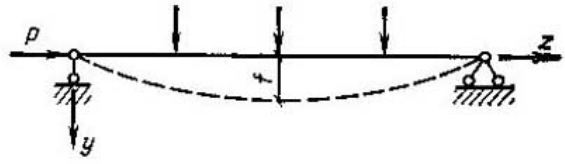


Fig. 140

más, frecuentemente con la fluidez unilateral del lado cóncavo de la barra.

La carga límite se determina de acuerdo con la condición

$$dP/df = 0. \tag{7.12}$$

Examinemos una barra de sección rectangular y determinemos su comportamiento en la fluidez unilateral y bilateral.

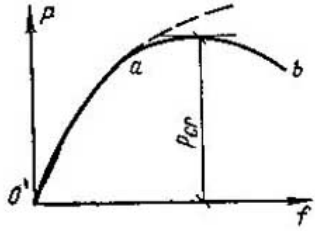


Fig. 141

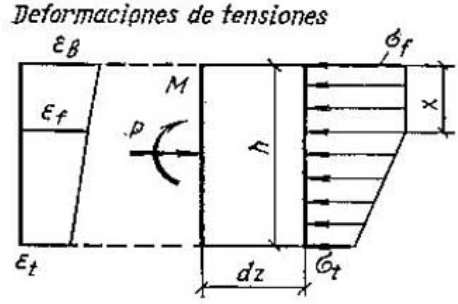


Fig. 142

Fluidez unilateral (fig. 142). Del plano tenemos:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{\varepsilon_t - \varepsilon_c}{h - x} = \frac{\sigma_t - \sigma_c}{E(h-x)}. \tag{7.13}$$

Dos condiciones de equilibrio:

$$P = bh\,\sigma_t - \frac{b(\sigma_t - \sigma_c)(h-x)}{2}, \tag{7.14}$$

$$M = b\frac{\sigma_t - \sigma_c}{2}(h-x)\left[\frac{h}{2} - \frac{1}{3}(h-x)\right]. \tag{7.15}$$

De (7.14) tenemos

$$\frac{b(\sigma_t - \sigma_c)(h-x)}{2} = bh\,\sigma_t - P. \tag{7.16}$$

Substituyendo el valor de esta expresión en (7.15) obtenemos:

$$M = (bh\,\sigma_f - P)\left(\frac{h}{6} + \frac{x}{3}\right). \tag{7.17}$$

De aquí

$$x = \frac{3M}{bh\,(\sigma_f - \sigma_0)} - \frac{h}{2}, \tag{7.18}$$

donde

$$\sigma_0 = P{:}bh.$$

De (7.16)

$$\sigma_f - \sigma_c = \frac{2h\,(\sigma_f - \sigma_0)}{h - x}.$$

Ahora la expresión (7.13) la representamos de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\rho} = 2h\,(\sigma_f - \sigma_0){:}\;\; E\,(h - x)^2.$$

Teniendo en cuenta (7.18) obtenemos finalmente:

$$\pm\frac{1}{\rho} = y'' = \frac{8}{9}\,\frac{b^2h^3\,(\sigma_f - \sigma_0)^3}{E\,[bh^2\,(\sigma_f - \sigma_0) - 2M]^2}, \tag{7.19}$$

donde

$$M = M^0 + P_y, \tag{7.20}$$

M^0 es el momento flector debido a una carga transversal.

La ecuación diferencial obtenida (7.19), teniendo en cuenta (7.20) es una ecuación no lineal complicada. Por eso, más adelante examinamos uno de los procedimientos aproximados para resolver el problema dado.

Supongamos por aproximación que la línea del eje de la barra encorvada es una sinusoide

$$y = f\,\text{sen}\,\frac{\pi z}{l}. \tag{7.21}$$

Al mismo tiempo, la curvatura del eje encorvado en el centro del tramo es

$$y'' = \frac{1}{\rho} = -\frac{\pi^2 f}{l^2}. \tag{7.22}$$

Comparando (7.19) y (7.22) para el centro del tramo obtenemos:

$$\frac{8}{9}\,\frac{b^2h^3\,(\sigma_f - \sigma_0)^3}{E\,[bh^2\,(\sigma_f - \sigma_0) - 2M_{l/2}]^2} = \frac{\pi^2 f}{l^2}, \tag{7.23}$$

donde $M_{1/2} = M^0_{1/2} + Pf$; f, es la flecha de la flexión de la barra. La igualdad (7.23) la representamos en la siguiente forma

$$\frac{8}{9E}\,b^2h^3\,(\sigma_f - \sigma_0)^3 = \frac{\pi^2 f}{l^2}\,[bh^2\,(\sigma_f - \sigma_0) - 2\sigma_0 bhf - 2M^0_{l/2}]^2. \tag{7.24}$$

Vamos a considerar que el valor de $M^{0}_{1/2}$ es constante, y que sólo cambia la fuerza P, es decir, la tensión σ_0. Entonces, en lugar de (7.12) escribimos $d\sigma_0/df = 0$.

Diferenciamos (7.24) de acuerdo con f:

$$\frac{24}{9E} b^2h^3 (\sigma_f - \sigma_0)^2 \left(- \frac{d\sigma_0}{df} \right) = \frac{\pi^2}{l^2} \times$$

$$\times [bh^2 (\sigma_f - \sigma_0) - 2\sigma_0 bhf - 2M^{0}_{1/2}]^2 + \frac{\pi^2 f}{l^2} \times$$

$$\times 2 [bh^2 (\sigma_f - \sigma_0) - 2\sigma_0 bhf - 2M^{0}_{1/2}] \times .$$

$$\times \left[bh^2 \left(- \frac{d\sigma_0}{df} \right) - 2bhf \frac{d\sigma_0}{df} - 2\sigma_0 bh \right].$$

Teniendo en cuenta que $d\sigma_0/df = 0$, al simplificar tendremos:

$bh^2 (\sigma_f - \sigma_0) - 2\sigma_0 bhf - 2M^{0}_{1/2} - 4f\sigma_0 bh = 0.$

De aquí

$$f_{cr} = \frac{bh^2 (\sigma_f - \sigma_0) - 2M^{0}_{1/2}}{6\sigma_0 bh}. \qquad (7.25)$$

Esta fórmula determina la flexión crítica, con la cual la barra pierde su capacidad portadora, o sea, cuando pierde la estabilidad de segundo género. Substituyendo (7.25) en (7.24) obtenemos la igualdad en la siguiente forma:

$$\frac{8}{9E} b^2h^3 (\sigma_f - \sigma_0)^3 = \frac{\pi^2}{l^2} \left[\frac{bh^2 (\sigma_f - \sigma_0) - 2M^{0}_{1/2}}{6\sigma_0 bh} \right] \times$$

$$\times \left[bh^2 (\sigma_f - \sigma_0) - 2\sigma_0 bh \frac{bh^2 (\sigma_f - \sigma_0) - 2M^{0}_{1/2}}{6\sigma_0 bh} - 2M^{0}_{1/2} \right]^2.$$

De aquí

$$\sigma_{0\,cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \left[\frac{\sigma_f - \sigma_{0\,cr} - 2M^{0}_{1/2} : bh^2}{\sigma_f - \sigma_{0\,cr}} \right]^3. \qquad (7.26)$$

Cuando $M^{0}_{1/2} = 0$ tendremos que $\sigma_{0\,cr} = \pi^2 E/\lambda^2$, donde $\lambda = \frac{l}{h/\sqrt{12}}$.

En el caso de la acción descentralizada de una fuerza $M_{1/2} = Pe = \sigma_0 bhe$, donde e es la excentricidad.

La ecuación (7.26) se resuelve haciendo combinaciones.

Establecemos los límites de aplicación de las expresiones obtenidas $\sigma_c = -\sigma_f$. En consecuencia (7.16) será:

$$\sigma_f (h - x) = h (\sigma_f - \sigma_0).$$

Substituyendo el valor de esta ecuación en (7.15) obtenemos

$$M = \frac{bh^2}{2} (\sigma_f - \sigma_0) - \frac{bh^2}{3} \frac{(\sigma_f - \sigma_0)^2}{\sigma_f}. \qquad (7.27)$$

Teniendo en cuenta que $M_{1/2}^{0} = M - Pf_{cr}$ y considerando (7.25), obtenemos:

$$M_{1/2}^{0} = \frac{bh^2}{2}(\sigma_t - \sigma_0)\frac{\sigma_0}{\sigma_t}. \tag{7.28}$$

Por consiguiente, todas las expresiones son útiles hasta

$$M_{1/2}^{0} \leqslant \frac{bh^2}{2}(\sigma_t - \sigma_0)\frac{\sigma_0}{\sigma_t}. \tag{7.29}$$

Fluidez bilateral (fig. 143).

$$\pm\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{2\sigma_t}{E(h-x-y)}. \tag{7.30}$$

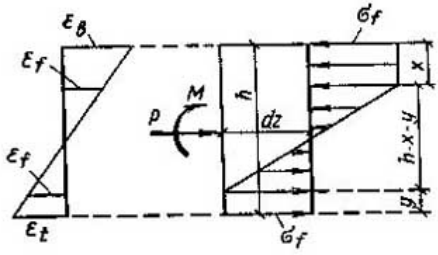


Fig. 143

Las condiciones de equilibrio son las siguientes:

$$1)\ P = \sigma_t bh - 2\sigma_t by - \frac{2\sigma_t(h-x-y)b}{2}, \tag{7.31}$$

6

$$P = \sigma_t b(x-y);\ \sigma_0 = \frac{P}{bh} = \frac{\sigma_t(x-y)}{h}\ ; \tag{7.32}$$

$$2)\ M = b\left\{2\sigma_t y\frac{h-y}{2} + \frac{2\sigma_t(h-x-y)}{2}\left[\frac{h}{2} - y - \frac{1}{3}(h-x-y)\right]\right\}. \tag{7.33}$$

De la ecuación (7.32) tenemos: $x = \frac{\sigma_0}{\sigma_t}h + y$. Ahora la ecuación (7.33) será:

$$M = 2b\sigma_t y\left(\frac{h-y}{2}\right) + b\sigma_t\left(h - 2y - \frac{\sigma_0}{\sigma_t}h\right)\times$$

$$\times\left[\frac{h}{6} - y + \frac{1}{3}\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_t}h + 2y\right)\right].$$

De aquí obtenemos:

$$y^2 - yh\left(1 - \frac{\sigma_0}{\sigma_f}\right) - \left[\frac{h^2}{2}\left(1 - \frac{\sigma_0}{\sigma_f}\right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(1 + 2\frac{\sigma_0}{\sigma_f}\right) - \frac{3M}{b\sigma_f}\right] = 0. \qquad (7.34)$$

Resolviendo esta ecuación tendremos:

$$y = \frac{h}{2}\left(1 - \frac{\sigma_0}{\sigma_f}\right) -$$
$$- h\sqrt{\frac{3}{4}\left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_f^2}\right) - \frac{3M}{bh^2\sigma_f}} \geqslant 0; \qquad (7.35)$$

$$x = \frac{\sigma_0}{\sigma_f}h + y = \frac{h}{2}\left(1 + \frac{\sigma_0}{\sigma_f}\right) -$$
$$- h\sqrt{\frac{3}{4}\left(1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_f^2}\right) - \frac{3M}{bh^2\sigma_f}}; \qquad (7.36)$$

$$h - x - y = 2h\sqrt{\frac{3}{4}\left(1 - \frac{\sigma_0^2}{\alpha_f^2}\right) - \frac{3M}{bh^2\sigma_f}}. \qquad (7.37)$$

Ahora la ecuación (7.30) la escribimos de la siguiente manera:

$$\pm\frac{1}{\rho} = \pm y'' = \sigma_f : Eh\sqrt{\frac{3}{4}\left(1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_f^2}\right) - \frac{3M}{bh^2\sigma_f}}. \qquad (7.38)$$

Igualando (7.22) y (7.38) obtenemos:

$$\frac{\pi^2 f}{l^2} = \sigma_f : Eh\sqrt{\frac{3}{4}\left(1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_f^2}\right) - \frac{3M}{bh^2\sigma_f}}. \qquad (7.39)$$

Representamos de diferente forma la ecuación (7.39):

$$\frac{\pi^2 f}{l^2}\sqrt{\frac{3}{4}\left(1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_f^2}\right) - \frac{3M}{bh^2\sigma_f}} = \frac{\sigma_f}{Eh}, \qquad (7.40)$$

donde

$$M = M^0_{l/2} + \sigma_0 bhf. \qquad (7.41)$$

Esta expresión la diferenciamos según f:

$$\frac{\pi^2}{l}\sqrt{\frac{3}{4}\left(1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_f^2}\right) - \frac{3}{bh^2\sigma_f}(bh\sigma_0 f + M^0_{l/2}) +}$$

$$+\frac{\pi^2 f}{l^2}\cdot\frac{\left[(-6\sigma_0:4\sigma_f^2)\,\frac{d\sigma_0}{df}-\frac{3}{bh^2\sigma_f}\,bh\left(\frac{b\sigma_0}{df}f+\sigma_0\right)\right]}{2\sqrt{\frac{3}{4}\left(1-\frac{\sigma_\delta^2}{\sigma_f^2}\right)-\frac{3}{bh^2\sigma_f}\,(bh\sigma_0 f+M^0_{l/2})}}=0.$$

De aquí, teniendo en cuenta que $d\sigma_0/df=0$, obtenemos

$$f_{cr}=\frac{h\sigma_f}{6\sigma_0}\left(1-\frac{\sigma_\delta^2}{\sigma_f^2}\right)-\frac{2}{3}\,\frac{M^0_{l/2}}{bh\sigma_0}. \qquad (7.42)$$

Substituyendo los valores de (7.42) en (7.39) y teniendo en cuenta (7.41) arribamos a la siguiente ecuación:

$$\sigma_{0\,cr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}\left[\left(1-\frac{\sigma_{0\,cr}^2}{\sigma_f^2}\right)-4\,\frac{M^0_{l/2}}{bh^2\sigma_f}\right]^{3/2}. \qquad (7.43)$$

Todas las expresiones de fluidez bilateral son útiles en caso en que

$$M^0_{l/2}>\frac{bh^2}{2}(\sigma_f-\sigma_0)\frac{\sigma_0}{\sigma_f}. \qquad (7.44)$$

En el caso de la acción descentralizada de la fuerza longitudinal con la excentricidad e sin la carga transversal, en las ecuaciones (7.26) y (7.43) en lugar de $M^0_{l/2}$ hay que substituir $Pe=\sigma_0 bhe$.

Fig. 144

Ejemplo 30. Determinar la fuerza límite del pilar con sección de 24 × 24 cm que actúa con la excentricidad e (fig. 144). Los datos son los siguientes: altura del pilar $H=5$ m; $E=2{,}1\cdot10^{11}$ Pa; $\sigma_f=2400\times10^5$ Pa; $\pi^2\approx10$; las excentricidades $e=2$ cm y $e=1$ cm.

Suponemos que la pérdida de la estabilidad (de la capacidad portadora) transcurre durante la fluidez unilateral.

Para la acción descentralizada de la fuerza, la ecuación (7.26) la escribimos así:

$$\sigma_{0\,cr}=\frac{\pi^2 E}{l^2}\,\frac{h^2}{12}\left[1-\frac{2e\sigma_{0\,cr}}{h(\sigma_f-\sigma_{0\,cr})}\right]^3. \qquad (7.45)$$

Para el pilar $l=2H$.

La tensión crítica para la fuerza central es:

$$\sigma_{0\,cr}=\frac{\pi^2 E}{l^2}\,\frac{h^2}{12}=\frac{10\cdot2{,}1\cdot10^{11}}{(2\cdot5)^2}\,\frac{0{,}24^2}{12}\ \text{Pa}=1008\cdot20^5\ \text{Pa}.$$

1er caso: la excentricidad $e = 2$ cm. La ecuación (7.45) será

$$\sigma_{0\,cr} = 1008 \cdot 10^5 \left[1 - \frac{2 \cdot 0{,}02 \sigma_{0\,cr}}{0{,}24\,(2400 \cdot 10^5 - \sigma_{0\,cr})}\right]^3 \text{ Pa.}$$

Esta igualdad se satisface cuando $\sigma_{0cr} = 783 \cdot 10^5$ Pa.

$$P_{cr} = 783 \cdot 10^5 \cdot 0{,}24^2 = 4\,510\,080 \text{ N.}$$

Controlamos la suposición sobre la fluidez unilateral de acuerdo a (7.29):

$$4\,510\,080 \cdot 0{,}02 < \frac{0{,}24 \cdot 0{,}24^2}{2} (2400 \cdot 10^5 - 783 \cdot 10^5) \frac{783 \cdot 10^5}{2400 \cdot 10^5} = 364\,640 \text{ N} \cdot \text{m.}$$

2º caso: la excentricidad $e = 1$ cm.
La ecuación (7.45) será:

$$\sigma_{0.cr} = 1008 \cdot 10^5 \left[1 - \frac{2 \cdot 0{,}01 \sigma_{0\,cr}}{0{,}24\,(2400 \cdot 10^5 - \sigma_{0\,cr})}\right]^3 \text{ Pa.}$$

Esta ecuación se satisface cuando $\sigma_{0cr} = 870 \cdot 10^5$ Pa. Luego el cálculo se realiza como en el primer caso.

ANEXO 1

TABLA DE LAS FUNCIONES DE INFLUENCIA PARA EL CÁLCULO DINÁMICO DE LAS VIGAS CONTINUAS SIMPLES Y DE LOS PÓRTICOS

Expresiones de las funciones:

$$A_{sz} = \frac{\operatorname{ch} sz + \cos sz}{2}\ ;\quad B_{sz} = \frac{\operatorname{sh} sz + \operatorname{sen} sz}{2}\ ;$$

$$C_{sz} = \frac{\operatorname{ch} sz - \cos sz}{2}\ ;\quad D_{sz} = \frac{\operatorname{sh} sz - \operatorname{sen} sz}{2}\ .$$

Sus derivadas:

$$\frac{dA_{sz}}{dz} = sD_{sz};\quad \frac{dC_{sz}}{dz} = sB_{sz};\quad \frac{dB_{sz}}{dz} = sA_{sz};\quad \frac{dD_{sz}}{dz} = sC_{sz}.$$

Sus integrales:

$$\int A_{sz}\,dz = \frac{1}{s}\,B_{sz};\quad \int zA_{sz}\,dz = \frac{z}{s}\,B_{sz} - \frac{C_{sz}}{s^2}\ ;$$

$$\int B_{sz}\,dz = \frac{1}{s}\,C_{sz};\quad \int zB_{sz}\,dz = \frac{z}{s}\,C_{sz} - \frac{D_{sz}}{s^2}\ ;$$

$$\int C_{sz}\,dz = \frac{1}{s}\,D_{sz};\quad \int zC_{sz}\,dz = \frac{z}{s}\,D_{sz} - \frac{A_{sz}}{s^2}\ ;$$

$$\int D_{sz}\,dz = \frac{1}{s}\,A_{sz};\quad \int zD_{sz}\,dz = \frac{z}{s}\,A_{sz} - \frac{B_{sz}}{s^2}\ .$$

Algunas dependencias:

$$A_{(\alpha+\beta)z} = A_{\alpha z}A_{\beta z} + C_{\alpha z}C_{\beta z} + B_{\alpha z}D_{\beta z} + D_{\alpha z}B_{\beta z};$$

$$B_{(\alpha+\beta)z} = A_{\alpha z}B_{\beta z} + A_{\beta z}B_{\alpha z} + C_{\alpha z}D_{\beta z} + D_{\alpha z}C_{\beta z};$$

$$C_{(\alpha+\beta)z} = A_{\alpha z}C_{\beta z} + A_{\beta z}C_{\alpha z} + B_{\alpha z}B_{\beta z} + D_{\alpha z}D_{\beta z};$$

$$D_{(\alpha+\beta)z} = A_{\alpha z}D_{\beta z} + A_{\beta z}D_{\alpha z} + B_{\alpha z}C_{\beta z} + C_{\alpha z}B_{\beta z};$$

$$C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda = \frac{1 - \operatorname{ch}\lambda\cos\lambda}{2}\ ;$$

$$A_\lambda D_\lambda - B_\lambda C_\lambda = \frac{1}{2}\,(\operatorname{sh}\lambda\cos\lambda - \operatorname{ch}\lambda\operatorname{sen}\lambda);$$

$$B_\lambda^2 - D_\lambda^2 = 2\,(A_\lambda C_\lambda - D_\lambda^2) = \operatorname{sh}\lambda\operatorname{sen}\lambda;$$

$$A_\lambda^2 - C_\lambda^2 = \operatorname{ch}\lambda\cos\lambda;$$

$$A_\lambda B_\lambda - C_\lambda D_\lambda = \frac{1}{2}\,(\operatorname{ch}\lambda\operatorname{sen}\lambda + \operatorname{sh}\lambda\cos\lambda);$$

$$A_\lambda C_\lambda - B_\lambda^2 = D_\lambda^2 - A_\lambda C_\lambda = -\frac{1}{2}\operatorname{sh}\lambda\operatorname{sen}\lambda;$$

$$2A_\lambda C_\lambda = B_\lambda^2 + D_\lambda^2;$$

$$B_\lambda D_\lambda - A_\lambda^2 = -\frac{1}{2}\,(1 + \operatorname{ch}\lambda\cos\lambda).$$

sz	A_{sz}	B_{sz}	C_{sz}	D_{sz}
0,00	1,00000	0	0	0
0,10	1,00000	0,10000	0,00500	0,00017
0,20	1,00007	0,200005	0,02000	0,001335
0,30	1,0034	0,30002	0,04500	0,00450
0,40	1,001065	0,400085	0,080005	0,010665
0,50	1,002605	0,500265	0,125025	0,020835
0,60	1,005405	0,600645	0,180065	0,036005
0,70	1,010005	0,70140	0,245165	0,05718
0,80	1,01707	0,802735	0,32036	0,085375
0,90	1,02735	0,904925	0,40574	0,121595
1,00	1,04169	1,008335	0,50139	0,166865
1,02	1,04513	1,029205	0,52176	0,177095
1,04	1,04878	1,05014	0,54256	0,18774
1,06	1,05264	1,07116	0,56377	0,19880
1,08	1,056735	1,09225	0,585405	0,21029
1,10	1,06106	1,11343	0,60746	0,22222
1,12	1,065625	1,134695	0,629945	0,234595
1,14	1,07044	1,15605	0,65285	0,24742
1,16	1,075525	1,17751	0,676185	0,26071
1,18	1,080875	1,19908	0,699955	0,27447
1,20	1,08651	1,22075	0,72415	0,28871
1,22	1,09243	1,24254	0,74878	0,30344
1,24	1,09865	1,264445	0,77385	0,318665
1,26	1,10518	1,286485	0,79936	0,334395
1,28	1,11203	1,30866	0,82531	0,35064
1,30	1,119205	1,33097	0,851705	0,36741
1,32	1,12673	1,35343	0,87855	0,38471
1,34	1,134595	1,37604	0,905845	0,40256
1,36	1,142835	1,398815	0,933595	0,420955
1,38	1,15144	1,421755	0,96180	0,439905
1,40	1,160435	1,444875	0,990465	0,459425
1,42	1,169825	1,468175	1,019595	0,479525
1,44	1,179615	1,49167	1,049195	0,50021
1,46	1,189835	1,515365	1,079265	0,521495
1,48	1,20048	1,539265	1,10981	0,543385
1,50	1,211575	1,563385	1,140835	0,565895
1,52	1,22312	1,587735	1,17235	0,589025
1,54	1,23514	1,612315	1,20435	0,612785
1,56	1,24764	1,63714	1,23684	0,63720
1,58	1,260635	1,662225	1,269835	0,662265
1,60	1,27413	1,68757	1,30333	0,68800
1,62	1,288155	1,713195	1,337335	0,714405
1,64	1,30271	1,73910	1,37186	0,74149
1,66	1,317815	1,765305	1,406905	0,769285
1,68	1,333485	1,791815	1,442475	0,797775
1,70	1,34974	1,818645	1,47858	0,826985
1,72	1,366575	1,84581	1,515225	0,85692
1,74	1,384015	1,873315	1,552415	1,887595

sz	A_{sz}	B_{sz}	C_{sz}	D_{sz}
1,76	1,40208	1,901175	1,59016	0,919025
1,78	1,420785	1,929405	1,628465	0,951205
1,80	1,440135	1,95801	1,667335	0,98416
1,82	1,460155	1,987015	1,706785	1,017905
1,84	1,43086	2,01642	1,74682	1,05244
1,86	1,502255	2,04625	1,787445	1,08778
1,88	1,524375	2,07652	1,828675	1,12394
1,90	1,54722	2,10723	1,87051	1,16093
1,92	1,570815	2,138415	1,912965	1,198765
1,94	1,59518	2,170065	1,95605	1,237455
1,96	1,62032	2,20222	1,99977	1,27701
1,98	1,646265	2,23489	2,044145	1,31745
2,00	1,673025	2,26808	2,089175	1,35878
2,02	1,70062	2,30181	2,13487	1,40102
2,04	1,72907	2,33611	2,18125	1,44418
2,06	1,758395	2,370985	2,228315	1,488275
2,08	1,78861	2,40645	2,27609	1,53332
2,10	1,81973	2,442535	2,32458	1,579325
2,12	1,851785	2,479245	2,373795	1,626305
2,14	1,884795	2,51661	2,423755	2,67428
2,16	1,918765	2,554645	2,474465	1,723265
2,18	1,95373	2,593365	2,52594	1,773265
2,20	1,989705	2,632805	2,578205	1,824305
2,22	2,02671	2,672965	2,63126	1,876395
2,24	2,064765	2,71388	2,685125	1,92956
2,26	2,10390	2,75556	2,73982	1,98381
2,28	2,144125	2,79804	2,795355	2,03916
2,30	2,18547	2,841335	2,85175	2,095625
2,32	2,227955	2,885465	2,909015	2,153235
2,34	2,27161	2,930455	2,96717	2,211995
2,36	2,31645	2,97634	3,02624	2,27193
2,38	2,362495	3,023125	3,086235	2,333055
2,40	2,40978	3,070845	3,14717	2,395385
2,42	2,45832	3,119525	3,20907	2,458945
2,44	2,50814	3,16919	3,27196	2,52375
2,46	2,559275	3,21986	3,335845	2,58983
2,48	2,611745	3,271565	3,400755	2,657195
2,50	2,665575	3,324335	3,466715	2,725865
2,52	2,72079	3,37820	3,53374	2,79587
2,54	2,777415	3,43318	3,601855	2,86722
2,56	2,835485	3,48931	3,671075	2,93995
2,58	2,895025	3,546605	3,741435	3,014075
2,60	2,95606	3,605115	3,81295	3,089615
2,62	3,018615	3,66486	3,885645	3,16660
2,64	3,08273	3,72587	3,95955	3,24505
2,66	3,14843	3,78818	4,03469	3,32499
2,68	3,215745	3,85182	4,111085	3,40645
2,70	3,28470	3,91682	4,18877	3,48944
2,72	3,35533	3,983215	4,26777	3,574005

sz	A_{sz}	B_{sz}	C_{sz}	D_{sz}
2,74	3,42767	4,051045	4,34811	3,660165
2,76	3,50175	4,12034	4,42982	3,74794
2,78	3,57760	4,191125	4,51293	3,837365
2,80	3,655255	4,263455	4,597475	3,928465
2,82	3,73475	4,33735	4,68348	4,02127
2,84	3,81612	4,412855	4,77098	4,115815
2,86	3,899395	4,49001	4,860005	4,21212
2,88	3,98461	4,568845	4,95059	4,310225
2,90	4,07181	4,649405	5,04277	4,410155
2,92	4,16103	4,73173	5,13658	4,51195
2,94	4,252305	4,81586	5,232055	4,61563
2,96	4,34567	4,90184	5,32923	4,72124
2,98	4,441165	4,98970	5,428135	4,82881
3,00	4,538835	5,079495	5,528825	4,938375
3,02	4,638715	5,17127	5,631335	5,04998
3,04	4,74085	5,26506	5,73569	5,16364
3,06	4,845275	5,360915	5,841945	5,279415
3,08	4,95204	5,458885	5,95014	5,397335
3,10	5,06118	5,559015	6,06032	5,517435
3,12	5,17275	5,66135	6,17252	5,63976
3,14	5,286785	5,76594	6,286785	5,76435
3,16	5,403345	5,87284	6,40317	5,89125
3,18	5,522455	5,98209	6,521715	6,02049
3,20	5,64418	6,093755	6,64247	6,152125
3,22	5,768555	6,207875	6,765485	6,286205
3,24	5,89564	6,324515	6,89080	6,422765
3,26	6,02548	6,443725	7,01848	5,56185
3,28	6,15813	6,56555	7,14857	6,70352
3,30	6,29364	6,690065	7,28112	6,847815
3,32	6,43206	6,81732	7,41619	6,99478
3,34	6,57345	6,94737	7,55383	7,14448
3,36	6,71786	7,080275	7,69410	7,296955
3,38	6,865345	7,21610	7,837065	7,45226
3,40	7,01597	7,35491	7,98277	7,61045
3,42	7,169785	7,496765	8,131275	7,771585
3,44	7,32685	7,641725	8,28266	7,935725
3,46	7,48723	7,78986	8,43697	8,10291
3,48	7,65099	7,941235	8,59427	8,273225
3,50	7,81818	8,095925	8,75464	8,446705
3,52	7,98888	8,253985	8,91813	8,623425
3,54	8,163145	8,41550	9,084825	8,80345
3,56	8,34104	8,580535	9,25478	8,986845
3,58	8,52264	8,749165	9,42807	9,173665
3,60	8,70801	8,921470	9,60477	9,36399
3,62	8,897225	9,09751	9,784955	9,55788
3,64	9,090345	9,27738	9,968695	9,75541
3,66	9,287465	9,461155	10,156075	9,956655

sz	A_{sz}	B_{sz}	C_{sz}	D_{sz}
3,68	9,48864	9,64891	10,34717	10,16168
3,70	9,693955	9,840725	10,542055	10,370565
3,72	9,90349	10,036695	10,74082	10,583385
3,74	10,11732	10,236895	10,94355	10,800225
3,76	10,335525	10,441415	11,150325	11,021155
3,78	10,55819	10,650345	11,36124	11,246265
3,80	10,785405	10,863775	11,576375	11,475635
3,82	11,01725	11,081795	11,79582	11,709345
3,84	11,253805	11,304495	12,019675	11,947495
3,86	11,49518	11,531975	12,24803	12,190165
3,88	11,741445	11,764335	12,480985	12,437445
3,90	11,99271	12,001665	12,71864	12,689435
3,92	12,249055	12,244075	12,961085	12,946225
3,94	12,510585	12,491665	13,208435	13,207915
3,96	12,777405	12,744535	13,460785	13,474595
3,98	13,049605	13,002795	13,718255	13,746375
4,00	13,327295	13,26656	13,980935	14,02336
4,02	13,610575	13,53593	14,248955	14,30565
4,04	13,899555	13,811015	14,522415	14,593355
4,06	14,194343	14,091945	14,801435	14,886585
4,08	14,49506	14,37883	15,08613	15,18545
4,10	14,801805	14,67179	15,376625	15,49007
4,12	15,11470	14,970945	15,67304	15,800555
4,14	15,433865	15,27642	15,975505	16,11703
4,16	15,759425	15,583345	16,284145	16,439615
4,18	16,091495	15,90684	16,599085	16,76844
4,20	16,43020	16,232045	16,92046	17,103625
4,22	16,77568	16,56409	17,24841	17,44530
4,24	17,12806	16,90312	17,58307	17,79360
4,26	17,487465	17,24926	17,924585	18,14867
4,28	17,85495	17,602665	18,27309	18,510635
4,30	18,22794	17,96347	18,62874	18,87964
4,32	18,60928	18,33183	18,99168	19,25583
4,34	18,998225	18,707895	19,362065	19,639355
4,36	19,39491	19,091815	19,74005	20,030365
4,38	19,79949	19,48374	20,12579	20,42901
4,40	20,21212	19,88385	20,51945	20,83545
4,42	20,63296	20,292285	20,92120	21,249845
4,44	21,06217	20,70922	21,33120	21,67235
4,46	21,49991	21,134825	21,74963	22,103145
4,48	21,94635	21,569275	22,17665	22,542395
4,50	22,40166	22,01274	22,61246	22,99027
4,52	22,86602	22,46540	23,05722	23,44695
4,54	23,33960	22,92744	23,51114	23,91262
4,56	23,822585	23,39905	23,974385	24,38746
4,58	24,31516	23,88041	24,44716	24,87166
4,60	24,817515	24,37172	24,929665	25,36541

sz	A_{sz}	B_{sz}	C_{sz}	D_{sz}
4,62	25,32984	24,873175	25,42210	25,868915
4,64	25,852335	25,38498	25,924665	26,38236
4,66	26,38520	25,90734	26,43757	26,90597
4,68	26,92865	26,44046	26,96103	27,43994
4,70	27,48287	26,98456	27,49526	27,98448
4,72	28,048095	27,53985	28,040485	28,53982
4,74	28,62454	28,106555	28,59693	29,106175
4,76	29,21242	28,684905	29,16483	29,683775
4,78	29,811965	29,27513	29,744405	30,27285
4,80	30,42341	29,877465	30,33591	30,873625
4,82	31,04699	30,492145	30,93959	31,486365
4,84	31,682945	31,119425	31,555685	32,111295
4,86	32,33153	31,75955	32,18445	32,74868
4,88	32,99298	32,41277	32,82615	33,39876
4,90	33,66756	33,07936	33,48105	34,06181
4,92	34,35554	33,759565	34,14942	34,738095
4,94	35,057175	34,45367	34,831525	35,42788
4,96	35,772745	35,161945	35,527655	36,131445
4,98	36,50253	35,86467	36,23810	36,84908
5,00	37,246805	36,622145	36,963145	37,581065
5,02	38,005865	37,374645	37,703085	38,327705
5,04	38,78001	38,14248	38,45823	39,08929
5,06	39,56954	38,92595	39,22889	30,86614
5,08	40,374765	39,725365	40,015375	40,658555
5,10	41,19599	40,54105	40,818010	41,46686
5,12	42,033545	41,373315	41,637125	42,291385
5,14	42,887755	42,22250	42,473055	43,13246
5,16	43,758955	43,08894	43,326145	43,99042
5,18	44,64749	43,97297	44,19673	44,86562
5,20	45,55370	44,874955	45,08518	45,758405
5,22	46,477945	45,79524	45,991855	46,66915
5,24	47,420585	46,734195	46,917115	47,598205
5,26	48,381995	47,69219	47,861345	48,54596
5,28	49,36255	48,66960	48,82493	49,51279
5,30	50,362635	49,66682	49,808265	50,49909
5,32	51,38265	50,68424	50,81174	51,50525
5,34	52,42298	51,722265	51,83577	52,531695
5,36	53,48405	52,781295	52,88077	53,578825
5,38	54,566275	53,861765	53,947165	54,647065
5,40	55,67008	54,964095	55,03539	55,736855
5,42	56,795895	56,088715	56,145875	56,848635
5,44	57,944175	57,236075	57,279085	57,982845
5,46	59,115365	58,406635	58,435475	59,139955
5,48	60,30993	59,60085	59,61551	60,32042
5,50	61,52834	60,81919	60,81967	61,52473
5,52	62,77108	62,062145	62,04844	62,753375
5,54	64,03864	63,33020	63,30232	64,00684

sz	A_{sz}	B_{sz}	C_{sz}	D_{sz}
5,56	65,33152	64,623855	64,58182	65,285635
5,58	66,65024	65,943635	65,88745	66,590285
5,60	67,99531	67,29004	67,21974	67,92131
5,62	69,36727	68,663625	68,57923	69,279255
5,64	70,766665	70,064915	69,966475	70,664665
5,66	72,19404	71,49448	71,38202	72,07810
5,68	73,649975	72,95287	72,826445	73,52014
5,70	75,13504	74,44067	74,30033	74,99136
5,72	76,64983	75,95847	75,80427	76,49235
5,74	78,19494	77,506865	77,33887	78,023735
5,76	79,770985	79,086475	78,904755	79,586115
5,78	81,378595	80,697915	80,502545	81,180135
5,80	83,018405	82,341835	82,132885	82,806435
5,82	84,69107	84,01887	83,79644	84,46567
5,84	86,397255	85,72970	85,493865	86,15852
5,86	88,137645	87,47499	87,225855	87,88566
5,88	89,91292	89,255435	88,99310	89,647785
5,90	91,72379	91,07174	90,79631	91,44562
5,92	93,570985	92,92463	92,636215	93,27988
5,94	95,455235	94,81483	94,513545	95,15132
5,96	97,37729	96,74309	96,42906	97,06068
5,98	99,33792	98,71018	98,38353	99,00874
6,00	101,337905	100,71687	100,377735	100,99629
6,01	102,352905	101,735315	101,389985	102,005115
6,02	103,37804	102,76396	102,41247	103,02412
6,03	104,41342	103,80291	103,44530	104,05340
6,04	105,459145	104,852265	104,488565	105,093065
6,06	107,582045	106,982605	106,606845	107,203945
6,07	108,65943	108,06381	107,68207	108,27538
6,08	109,747585	109,15583	108,768155	109,35762
6,09	110,84662	110,25879	109,86522	110,45078
6,10	111,95664	111,37280	110,97337	111,55496
6,11	113,077755	112,497965	112,092715	112,670285
6,12	114,21008	113,634395	113,22337	113,796855
6,13	115,35373	114,78220	114,36544	114,93479
6,14	116,508815	115,941505	115,519045	116,084205
6,16	118,853755	118,295055	117,861335	118,417925
6,17	120,04385	119,489535	119,05025	119,602475
6,18	121,245845	120,69597	120,251165	120,79897
6,19	122,45987	121,91449	121,46421	122,00754
6,20	123,68604	123,14521	122,68950	123,22830
6,21	124,924475	124,38825	123,927155	124,46137
6,22	126,175305	125,64374	125,177305	125,70688
6,23	127,43866	126,91180	126,44007	126,96496
6,24	128,71465	128,192555	127,71558	128,235725
6,26	131,30508	130,792665	130,30535	130,815815
6,27	132,619775	132,11228	131,619865	132,12546
6,28	133,94763	133,445105	132,94764	133,448295

ANEXO 2

TABLA PARA EL CÁLCULO DINÁMICO DE LOS PÓRTICOS Y VIGAS CONTINUAS

λ	$\mu_1(\lambda)$ según (6.89)	$\mu_2(\lambda)$ según (6.90)	$\mu_3(\lambda) = \varepsilon_1(\lambda)$ según (6.91)	$\mu_4(\lambda) = \varepsilon_2(\lambda)$ según (6.92)	$\mu_5(\lambda)$ según (6.122)	$\mu_6(\lambda) = \varepsilon_5(\lambda)$ según (6.123)
0,00	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
0,10	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
0,20	1,00000	1,00001	0,99999	1,00001	0,99999	0,99995
0,30	0,99998	1,00003	0,99993	1,00004	0,99994	0,99977
0,40	0,99994	1,00009	0,99978	1,00013	0,99984	0,99927
0,50	0,99985	1,00022	0,99945	1,00032	0,99960	0,99821
0,60	0,99969	1,00046	0,99887	1,00067	0,99918	0,99630
0,70	0,99943	1,00086	0,99790	1,00124	0,99847	0,99314
0,80	0,99902	1,00146	0,99642	1,00211	0,99739	0,98828
0,90	0,99844	1,00235	0,99427	1,00339	0,99582	0,98121
1,00	0,99761	1,00358	0,99126	1,00517	0,99363	0,97133
1,10	0,99650	1,00525	0,98719	1,00758	0,99065	0,95796
1,20	0,99504	1,00744	0,98184	1,01075	0,98673	0,94034
1,30	0,99317	1,01026	0,97496	1,01483	0,98167	0,91762
1,40	0,99079	1,01384	0,96627	1,02000	0,97525	0,88882
1,50	0,98784	1,01828	0,95547	1,02643	0,96723	0,85289
1,60	0,98422	1,02375	0,94223	1,03433	0,95734	0,80859
1,70	0,97983	1,03039	0,92618	1,04394	0,94525	0,75455
1,80	0,97455	1,03838	0,90692	1,05551	0,93060	0,68920
1,90	0,96826	1,04791	0,88400	1,06933	0,91298	0,61071
2,00	0,96083	1,05922	0,85694	1,08572	0,89188	0,51698
2,10	0,95210	1,07255	0,82519	1,10507	0,86671	0,40552
2,20	0,94189	1,08819	0,78815	1,12778	0,83678	0,27334
2,30	0,93000	1,10646	0,74512	1,15436	0,80120	0,11685
2,40	0,91622	1,12776	0,69533	1,18536	0,75891	—0,06838
2,50	0,90027	1,15252	0,63789	1,22146	0,70855	—0,28792
2,60	0,88187	1,18127	0,57178	1,26345	0,64838	—0,54885
2,70	0,86064	1,21465	0,49582	1,31227	0,57610	—0,86042
2,80	0,83618	1,25340	0,40859	1,36906	0,48864	—1,23499
2,90	0,80797	1,29844	0,30844	1,43520	0,38175	—1,68954
3,00	0,77540	1,35089	0,19336	1,51241	0,24937	—2,24817
3,10	0,73772	1,41217	0,06090	1,60282	0,08256	—2,94636
3,20	0,69399	1,48404	—0,09197	1,70914	—0,13252	—3,83880
3,30	0,64300	1,56877	—0,26908	1,83484	—0,41847	—5,01472
3,40	0,58322	1,66931	—0,47534	1,98444	—0,81502	—6,63059
3,50	0,51261	1,78959	—0,71717	2,16396	—1,39906	—8,98897
3,60	0,42845	1,93491	—1,00321	2,38160	—2,34150	—12,7620
3,70	0,32694	2,11269	—1,34530	2,64874	—4,11481	—19,8068
3,80	0,20271	2,33351	—1,76031	2,98173	—8,68383	—37,8450
3,90	0,04780	2,61310	—2,27304	3,40484	—47,5553	—190,688
4,00	—0,15008	2,97580	—2,92177	3,95573	19,4676	72,5892
4,10	—0,41099	3,46151	—3,76880	4,69608	9,17015	32,0149
4,20	—0,77004	4,14023	—4,92322	5,73426	6,39342	20,9844
4,30	—0,29502	5,14721	—6,59517	7,27962	5,09273	15,7435
4,40	—2,13568	6,78170	—9,24895	9,79564	4,33068	12,6074

λ	$\mu_1(\lambda)$ según (6.89)	$\mu_2(\lambda)$ según (6.90)	$\mu_3(\lambda) = \varepsilon_1(\lambda)$ según (6.91)	$\mu_4(\gamma) = \varepsilon_2(\lambda)$ según (6.92)	$\mu_5(\lambda)$ según (6.122)	$\mu_6(\lambda) = \varepsilon_5(\lambda)$ según (6.123)
4,50	—3,70212	9,86350	—14,1553	14,5521	3,82358	10,4603
4,60	—7,66550	17,7346	—26,4922	26,7259	3,45603	8,84763
4,70	—37,9477	78,2382	—120,374	120,430	3,17211	7,54805
4,80	18,3048	—34,3328	53,8390	—53,9758	2,94125	6,43993
4,90	8,34376	—14,4830	22,9053	—23,2523	2,74520	5,44965
5,00	5,74862	—9,37158	14,7866	—15,3625	2,57221	4,52887
5,10	4,54448	—7,04949	10,9712	—11,7966	2,41419	3,64239
5,20	3,84172	—5,73831	8,70237	—9,80006	2,26523	2,76656
5,30	3,37489	—4,90802	7,15699	—8,55222	2,12066	1,87670
5,40	3,03685	—4,34539	6,00243	—7,72326	1,97654	0,95373
5,50	2,77590	—3,94830	5,07780	—7,15559	1,82925	—0,02214
5,60	2,56393	—3,66194	4,29505	—6,76502	1,67518	—1,07206
5,70	2,38420	—3,45455	3,60123	—6,50316	1,51046	—2,22019
5,80	2,22596	—3,30668	2,96183	—6,34091	1,33058	—3,49580
5,90	2,08186	—3,20607	2,35258	—6,26051	1,13003	—4,93603
6,00	1,94654	—3,14497	1,75508	—6,25142	0,90164	—6,59010
6,10	1,81579	—3,11863	0,15419	—6,30816	0,63564	—8,52590
6,20	1,68609	—3,12451	0,53635	—6,42908	0,31810	—10,8411

λ	$\mu_7(\lambda)$ según (6.124)	$\varepsilon_3(\lambda)$ según (6.96)	$\varepsilon_4(\lambda)$ según (6.97)	$\varepsilon_6(\lambda)$ según (6.127)	$\varepsilon_7(\lambda)$ según (6.128)	$\varepsilon_8(\lambda)$ según (6.131)
0,00	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
0,10	1,00000	1,00000	1,00000	0,99998	1,00000	0,99999
0,20	1,00002	0,99995	1,00002	0,99974	1,00007	0,99987
0,30	1,00011	0,99975	1,00009	0,99869	1,00038	0,99936
0,40	1,00034	0,99921	1,00027	0,99585	1,00119	0,99799
0,50	1,00082	0,99806	1,00067	0,98988	1,00290	0,99509
0,60	1,00170	0,99599	1,00139	0,97901	1,00602	0,98981
0,70	1,00315	0,99257	1,00257	0,96111	1,01116	0,98112
0,80	1,00537	0,98732	1,00439	0,93362	1,01906	0,96779
0,90	1,00862	0,97968	1,00704	0,89361	1,03057	0,94837
1,00	1,01316	0,96902	1,01074	0,83772	1,04667	0,92125
1,10	1,01931	0,95462	1,01575	0,76214	1,06850	0,88458
1,20	1,02743	0,93569	1,02234	0,66264	1,09733	0,83630
1,30	1,03792	0,91135	1,03083	0,53448	1,13462	0,77412
1,40	1,05125	0,88064	1,04157	0,37238	1,18201	0,69549
1,50	1,06794	0,84252	1,05495	0,17050	1,24142	0,59757
1,60	1,08859	0,79583	1,07141	—0,07768	1,31504	0,47721
1,70	1,11391	0,73933	1,09144	—0,37944	1,40540	0,33090
1,80	1,14470	0,67165	1,11557	—0,74297	1,51549	0,15468
1,90	1,18194	0,59133	1,14442	—1,17151	1,64887	—0,05590
2,00	1,22675	0,49673	1,17870	—1,69362	1,80980	—0,30593

λ	$\mu_7(\lambda)$ según (6.124)	$e_3(\lambda)$ según (6.96)	$e_4(\lambda) =$ según (6.97)	$e_6(\lambda) =$ según (6.127)	$e_7(\lambda)$ según (6.128)	$e_8(\lambda) =$ según (6.131)
2,10	1,28054	0,38609	1,21920	—2,30348	2,00346	—0,60126
2,20	1,34499	0,25746	1,26683	—3,02127	2,23621	—0,94869
2,30	1,42221	0,10867	1,32266	—3,86381	2,51603	—1,35628
2,40	1,51486	—0,06265	1,38794	—4,85132	2,85300	—1,83370
2,50	1,62631	—0,25921	1,46412	—6,00856	3,26008	—2,39277
2,60	1,76099	—0,48401	1,55296	—7,36650	3,75427	—3,04824
2,70	1,92479	—0,74051	1,65655	—8,96474	4,35821	—3,81896
2,80	2,12566	—1,03267	1,77743	—10,8553	5,10279	—4,72963
2,90	2,37473	—1,36510	1,91871	—13,1085	6,03118	—5,81363
3,00	2,68795	—1,74324	2,03425	—15,8228	7,20554	—7,11762
3,10	3,08906	—2,17360	2,27887	—19,1416	8,71851	—8,70949
3,20	3,61495	—2,66408	2,50373	—23,2841	10,7144	—10,6929
3,30	4,32616	—3,22447	2,78172	—28,6053	13,4304	—13,2357
3,40	5,32940	—3,86709	3,10821	—35,7248	17,2849	—16,6306
3,50	6,83166	—4,60787	3,50200	—45,8366	23,0905	—21,4416
3,60	9,29380	—5,46784	3,98191	—61,5871	32,6572	28,9184
3,70	13,9908	—6,47565	4,57418	—90,2796	50,9940	—42,5096
3,80	26,2273	—7,67158	5,31656	—162,264	98,9448	—76,5449
3,90	131,076	—9,11447	6,26517	—764,081	510,816	—360,744
4,00	—50,0202	—10,8945	7,50722	269,204	—200,997	127,061
4,10	—22,3504	—13,1577	9,18569	108,347	—92,4486	51,0506
4,20	—15,0017	—16,1590	11,5520	63,4671	—63,7764	29,7927
4,30	—11,6541	—20,3881	15,0923	41,2098	—50,8504	19,2100
4,40	—9,77808	—26,9254	20,8829	27,0861	—43,7338	12,4612
4,50	—8,60964	—38,7254	31,8739	16,7007	—39,4279	7,47032
4,60	—7,83952	—67,8215	60,0939	8,25542	—36,7214	3,38788
4,70	—7,31942	—286,431	277,755	0,86832	—35,0365	—0,20327
4,80	—6,96999	117,832	—127,584	—5,95313	—34,0673	—3,53645
4,90	—6,74570	45,4706	—56,2845	—12,5144	—33,6417	—6,75683
5,00	—6,61931	26,0348	—33,0519	—19,0240	33,6611	—9,96338
5,10	—6,57441	16,5563	—29,8773	—25,6331	—34,0712	—13,2326
5,20	—6,60156	10,6284	—25,3614	—32,4852	—34,8473	—16,6251
5,30	—6,69622	6,33368	—22,5990	—39,6311	—35,9372	—20,1978
5,40	—6,85771	2,89632	—20,8258	—47,3393	—37,5073	—24,0068
5,50	—7,08377	—0,06147	—19,6777	—55,5320	—39,4429	—28,1115
5,60	—7,39562	—2,74869	—18,9619	—64,5440	—41,8496	—32,5797
5,70	—7,78837	—5,29338	—18,5690	—74,3878	—44,8078	—37,4921
5,80	—8,28201	—7,78152	—18,4354	—85,3146	—48,4303	—42,9490
5,90	—8,89804	—10,2762	—18,5245	—97,5837	—52,8743	—49,0801
6,00	—9,66722	—12,8279	—18,8176	—111,542	—58,3610	—56,0589
6,10	—10,6340	—12,4813	—19,3091	—127,670	—65,2074	—64,1260
6,20	—11,8642	—18,2790	—20,0042	—146,659	—73,8813	—73,6279

ANEXO 3

TABLA PARA EL CÁLCULO DE LOS PÓRTICOS Y DE LAS VIGAS CONTINUAS A LA ESTABILIDAD POR EL MÉTODO DE FUERZAS

λ	$f_1^*(\lambda)$ según (4.18)	$f_2^*(\lambda)$ según (4.19)	$f_3^*(\lambda)$ según (4.28)	$f_4^*(\lambda)$ según (4.29)	$f_6^*(\lambda)$ según (4.30)
0,00	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
0,10	1,00067	1,00117	1,00151	1,00402	1,00452
0,20	1,00268	1,00469	1,00609	1,01626	1,01830
0,30	1,00605	1,01060	1,01395	1,03736	1,04205
0,40	1,01083	1,01899	1,02547	1,06843	0,07705
0,50	1,01707	1,02996	1,04122	1,11126	1,12533
0,60	1,02485	1,04366	1,06211	1,16857	1,19000
0,70	1,03427	1,06028	1,08951	1,24451	1,27580
0,80	1,04545	1,08806	1,12552	1,34554	1,39009
0,90	1,05853	1,10330	1,17358	1,48213	1,54482
1,00	1,07372	1,13037	1,23955	1,67222	1,76045
1,10	1,09124	1,16172	1,33431	1,94912	2,07500
1,20	1,11138	1,19792	1,48049	2,38221	2,56768
1,30	1,13450	1,23964	1,73417	3,14352	3,43486
1,40	1,16102	1,28777	2,28276	4,80818	5,33310
1,50	1,19150	1,34338	4,37255	11,2013	12,6290
1,60	1,22665	1,40785	—7,82006	—26,2445	—30,1214
1,70	1,26735	1,48295	—1,13050	—5,73780	—6,71394
1,80	1,31477	1,57100	—0,27203	—3,13079	—3,74095
1,90	1,37045	1,67505	0,07009	—2,11128	—2,58054
2,00	9,43649	1,79925	0,25755	—1,56939	—1,96572
2,10	1,51577	1,94936	0,37872	—1,23416	—1,58720
2,20	1,61242	2,13360	0,46586	—1,00690	—1,33236
2,30	1,73252	2,36408	0,53362	—0,84307	—1,15039
2,40	1,88544	2,65950	0,58966	—0,71962	—1,01506
2,50	2,08638	3,05021	0,63843	—0,62343	—0,91143
2,60	2,36176	3,58902	0,68276	—0,54647	—0,83044
2,70	2,76195	4,37660	0,72459	—0,48357	—0,76627
2,80	3,39626	5,63151	0,76538	—0,43124	—0.71506
2,90	4,55501	7,93430	0,80628	—0,38703	—0,67416
3,00	7,34859	13,5057	0,84835	—0,34917	—0,64173
3,10	23,5659	45,9234	0,89260	—0,31637	—0,61651
3,20	—15,7399	—32,7064	0,94008	—0,28761	—0,59765
3,30	—5,41538	—12,0770	0,99199	—0,26215	—0,58462
3,40	—3,07872	—7,42479	1,04977	—0,23934	—0,57720
3,50	—2,04334	—5,37682	1,11521	—0,21869	—0,57545
3,60	—1,45725	—4,22927	1,19070	—0,19975	—0,57972
3,70	—1,07871	—3,49889	1,27945	—0,18214	—0,59078
3,80	—0,81282	—2,99609	1,38607	—0,16546	—0,60991
3,90	—0,61468	—2,63137	1,51735	—0,14932	—0,63924
4,00	—0,46027	—2,35702	1,68385	—0,13323	—0,68225
4,10	—0,33555	—2,14534	1,90297	—0,11650	—0,74487

λ	$f_1^*(\lambda)$ según (4.18)	$f_2^*(\lambda)$ según (4.19)	$f_3^*(\lambda)$ según (4.28)	$f_4^*(\lambda)$ según (4.29)	$f_5^*(\lambda)$ según (4.30)
4,20	—0,23172	—1,97920	2,20568	—0,09808	—0,83776
4,30	—0,14297	—1,84753	2,65291	—0,07510	—0,98213
4,40	—0,06524	—1,74291	3,38354	—0,04591	—1,22650
4,50	0,00439	—1,66028	4,79798	0,00452	—1,71095
4,60	0,06817	—1,59618	8,72151	0,13130	—3,07445
4,70	0,12790	—1,54831	75,9109	2,19640	—26,5889
4,80	0,18511	—1,51523	—10,2704	—0,43904	3,59390
4,90	0,24118	—1,49626	—4,57420	—0,25927	1,60847
5,00	0,29749	—1,49140	—2,83552	—0,20113	1,00834
5,10	0,35550	—1,50142	—1,99117	—0,17074	0,72109
5,20	0,41690	—1,52796	—1,49076	—0,15118	0,55407
5,30	0,48384	—1,57383	—1,15853	—0,13705	0,44580
5,40	0,55917	—1,64360	—0,92092	—0,12608	0,37058
5,50	0,64705	—1,74455	—0,74171	—0,11713	0,31579
5,60	0,75384	—1,88859	—0,60098	—0,10957	0,27450
5,70	0,89011	—2,09617	—0,48682	—0,10302	0,24262
5,80	1,07503	—2,40496	—0,39168	—0,09725	0,21755
5,90	1,34756	—2,89238	—0,31052	—0,09207	0,19762
6,00	1,80151	—3,74557	—0,23979	—0,08738	0,18166
6,10	2,73526	—5,56086	—0,17693	—0,08307	0,16889
6,20	5,88141	—11,8031	—0,11998	—0,07909	0,15873
6,30	—28,2414	56,4909	—0,06740	—0,07538	0,15079
6,40	—3,92125	7,89732	—0,01790	—0,07190	0,14480
6,50	—2,02426	4,14898	0,02966	—0,06860	0,14060
6,60	—1,31754	2,78030	0,07636	—0,06545	0,13811
6,70	—0,94447	2,07833	0,12332	—0,06241	0,13734
6,80	—0,71138	1,65597	0,17179	0,05946	0,13840
6,90	—0,55013	1,37727	0,22330	0,05654	0,14154
7,00	—0,43057	1,18221	0,27990	0,05360	0,14718

ANEXO 4

TABLA PARA EL CÁLCULO DE LOS PÓRTIPOS Y DE LAS VIGAS CONTINUAS A LA ESTABILIDAD POR EL MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS

λ	$\mu_1^*(\lambda)$ según (4.50)	$\mu_2^*(\lambda)$ según (4.51)	$\mu_3^*(\lambda)$ según (4.52)	$\mu_4^*(\lambda)$ según (4.56)	$\mu_7^*(\lambda)$ según (4.62)	$\mu_8^*(\lambda)$ según (4.64)
0,00	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
0,10	0,99967	1,00017	0,99983	0,99900	0,99933	0,99600
0,20	0,99867	1,00067	0,99933	0,99600	0,99733	0,98400
0,30	0,99700	1,00150	0,99850	0,99000	0,99398	0,96398
0,40	0,99465	1,00268	0,99733	0,98400	0,98928	0,93595
0,50	0,99164	1,00420	0,99583	0,97499	0,98321	0,89988

λ	$\mu_1^*(\lambda)$ según (4.50)	$\mu_2^*(\lambda)$ según (4.51)	$\mu_3^*(\lambda)$ según (4.52)	$\mu_4^*(\lambda)$ según (4.56)	$\mu_7^*(\lambda)$ según (4.62)	$\mu_8^*(\lambda)$ según (4.64)
0,60	0,98794	1,00607	0,99399	0,96398	0,97575	0,85575
0,70	0,98356	1,00829	0,99180	0,95097	0,96687	0,80353
0,80	0,97849	1,01088	0,98929	0,93595	0,95653	0,74320
0,90	0,97271	1,01385	0,98642	0,91892	0,94470	0,67470
1,00	0,96622	1,01720	0,98321	0,89988	0,93134	0,59801
1,10	0,95901	1,02095	0,97966	0,87882	0,91639	0,51305
1,20	0,95107	1,02511	0,97575	0,85575	0,89978	0,41978
1,40	0,93292	1,03476	0,96687	0,80353	0,86131	0,20798
1,50	0,92268	1,04029	0,96188	0,77438	0,83928	0,08928
1,60	0,91164	1,04631	0,95653	0,74320	0,81523	—0,03810
1,70	0,89978	1,05286	0,95081	0,70997	0,78905	—0,17428
1,80	0,88708	1,05996	0,94470	0,67470	0,76059	—0,31941
1,90	0,87350	1,06765	0,93822	0,63738	0,72969	—0,47365
2,00	0,85903	1,07596	0,93134	0,59801	0,69614	—0,63719
2,10	0,84362	1,08495	0,92406	0,55657	0,65973	—0,81027
2,20	0,82726	1,09465	0,91639	0,51305	0,62019	—0,99315
2,30	0,80988	1,10511	0,90829	0,46746	0,57719	—1,18614
2,40	0,79147	1,11640	0,89978	0,41978	0,53038	—1,38962
2,50	0,77196	1,12858	0,89083	0,37000	0,47930	—1,60403
2,60	0,75131	1,14172	0,88145	0,31811	0,42341	—1,82992
2,70	0,72946	1,15591	0,87161	0,26411	0,36206	—2,06794
2,80	0,70635	1,17123	0,86131	0,20798	0,29444	—2,31889
2,90	0,68191	1,18780	0,85054	0,14970	0,21954	—2,58380
3,00	0,65605	1,20573	0,83928	0,08927	0,13608	—2,86392
3,10	0,62869	1,22515	0,82751	0,02668	0,04243	—3,16090
3,20	0,59974	1,24621	0,81523	—0,03810	—0,06353	—3,47687
3,30	0,56907	1,26910	0,80242	—0,10508	—0,18466	—3,81466
3,40	0,53657	1,29401	0,78905	—0,17428	—0,32481	—4,17814
3,50	0,50208	1,32118	0,77512	—0,24572	—0,48939	—4,57273
3,60	0,46546	1,35086	0,76059	—0,31941	—0,68622	—5,00622
3,70	0,42650	1,38338	0,74546	—0,39538	—0,92703	—5,49036
3,80	0,38499	1,41909	0,72969	—0,47365	—1,23028	—6,04362
3,90	0,34068	1,45842	0,71326	—0,55424	—1,62687	—6,69687
4,00	0,29328	1,50187	0,69614	—0,63719	—2,17165	—7,50598
4,10	0,24244	1,55006	0,67831	—0,72252	—2,98023	—8,58356
4,20	0,18775	1,60369	0,65973	—0,81027	—4,31561	—10,1956
4,30	0,12874	1,66364	0,64037	—0,90046	—6,99473	—13,1581
4,40	0,06480	1,73096	0,62012	—0,99315	—15,3271	—21,7805
4,50	—0,00477	1,80698	0,59914	—1,08836	+227,932	+221,182
4,60	—0,08086	1,89330	0,57719	—1,18614	14,6693	7,61598
4,70	—0,16455	1,99197	0,55429	—1,28654	7,81862	0,45529
4,80	—0,25723	2,10559	0,53038	—1,38962	5,40232	—2,27768
4,90	—0,36067	2,23754	0,50540	—1,49543	4,14630	—3,85703
5,00	—0,47718	2,39226	0,47930	—1,60403	3,36148	—4,97185
5,10	—0,60985	2,57570	0,45200	—1,71551	2,81297	—5,85703
5,20	—0,76290	2,79604	0,42341	—1,82992	2,39864	—6,61469
5,30	—0,94221	3,06482	0,39347	—1,94737	2,06681	—7,29653

λ	$\mu_1^*(\lambda)$ según (4.50)	$\mu_2^*(\lambda)$ según (4.51)	$\mu_3^*(\lambda)$ según (4.52)	$\mu_4^*(\lambda)$ según (4.56)	$\mu_7^*(\lambda)$ según (4.62)	$\mu_8^*(\lambda)$ según (4.64)
5,40	—1,15634	3,39886	0,36206	—2,06794	1,78835	—7,93165
5,50	—1,41816	3,82360	0,32909	—2,19174	1,54548	—8,53785
5,60	—1,74806	4,37945	0,29444	—2,31889	1,32655	—9,12678
5,70	—2,18035	5,13461	0,25797	—2,44953	1,12346	—9,70654
5,80	—2,77765	6,21392	0,21954	—2,58380	0,93021	—10,2831
5,90	—3,66787	7,87265	0,17897	—2,72186	0,74208	—10,8613
6,00	—5,15938	10,7270	0,13608	—2,86392	0,55509	—11,4449
6,10	—8,23363	16,7392	0,09065	—3,01018	0,36560	—12,0377
6,20	—18,5906	37,3084	0,04243	—3,16090	0,17003	—12,6433

BIBLIOGRAFÍA

1. **Бабаков И. М.** Теория колебаний. М., 1958. (Babakov I. M. Teoría de las oscilaciones).
2. **Безухов Н. И.** Некоторые обобщения методов строительной механики в динамике сооружений.— В кн.: Исследования по теории сооружений, вып. 3., М., 1939. (Bezujov N. I. Algunas generalizaciones de los métodos de la mecánica de construcción en la dinámica de las obras).
3. **Безухов Н. И.** Динамика сооружений в примерах и задачах. М., 1974. (Bezujov N. I. Dinámica de las obras en ejemplos y problemas).
4. **Белоус А. А.** Метод деформации в динамике рамных конструкций.— Вкн.: Исследования по теории сооружений, вып. 3. М., 1939. (Belous A. A. Método de deformación en la dinámica de las estructuras de los pórticos).
5. **Бернштейн С. А.** Очерки по истории строительной механики. М., 1957. (Bernshtein S. A. Ensayos de historia de la mecánica de construcción).
6. **Бернштейн С. А.** Основы динамики сооружений. М., 1941. (Bernshtein S. A. Fundamentos de la dinámica de las obras).
7. **Болотин В. В.** Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., 1961. (Bolotin V. V. Problemas no conservativos de la teoría de la estabilidad elástica).
8. **Власов В. З.** Тонкостенные упругие стержни. М., 1959. (Vlasov V. Z. Barras de paredes finas y elásticas).
9. **Гогенемзер К., Прагер В.** Динамика сооружений. М., 1936. (Gogenemzer K., Prager V. Dinámica de las obras).
10. **Динник А. Н.** Устойчивость упругих систем. М. 1935. (Dinnik A. N. Estabilidad de los sistemas elásticos).
11. **Динник А. Н.** Устойчивость арок. М., 1946. (Dinnik A. N. Estabilidad de los arcos).
12. **Завриев К. С.** Динамика сооружений. М., 1946. (Zavriev K. S. Dinámica de las obras).
13. **Киселев В. А.** О приближенных формулах продольного изгиба за критической силой в упругой стадии.— Науч. тр./МАДИ, 1957, вып. 20. (Kiseliov V. A. Acerca de las fórmulas aproximadas de la flexión longitudinal tras la fuerza crítica en el estadio elástico).
14. **Киселев В. А.** К вопросу о динамических линиях влияния изгибающего момента и поперечной силы в балках.— Науч. тр./МИИТ, 1952, вып. 76. (Kiseliov V. A. Acerca de la cuestión de las líneas dinámicas de influencia del momento flector y de la fuerza transversal en las vigas).
15. **Киселев В. А.** Проектирование и возведение сооружений в сейсмических районах.— В кн.: Материалы проектирования ирригационных гидротехнических сооружений. Л., 1936. (Kiseliov V. A. Proyección y edificación de las obras en las regiones sísmicas).
16. **Киселев В. А.** Уравнение упругой линии продольно-поперечного изгиба.— Научн. тр./Московский гидромелиоративный ин-т, 1939, т. VII

(вып. 14). (Kiseliov V. A. Ecuación de la línea elástica de la flexión longitudinal y transversal).

17. **Киселев В. А.** Общее уравнение упругой линии поперечного изгиба с растяжением.— Научн. тр./Московский гидромелиоративный ин-т. 1941, т. X (вып. 29). (Kiseliov V. A. Ecuaciones generales de la línea elástica de la flexión transversal con extensión).

18. **Киселев В. А.** Динамические линии влияния перемещений и внутренних сил в балках, рамах и плитах простых и на упругом основании, от груза, движущегося с равномерной скоростью.— Научн. тр./МАДИ, 1956, вып. 18. (Kiseliov V. A. Líneas dinámicas de influencia de los traslados y de las fuerzas interiores en las vigas, pórticos y placas simples y en el fundamento elástico debidas a la carga que se mueve con una velocidad uniforme).

19. **Киселев В. А.** Динамические поверхности влияния перемещений и внутренних сил ортотропных пластин с двумя коэффициентами постели.— В кн.: Исследования по теории сооружений, вып. 12. М., 1963. (Kiseliov V. A. Superficies dinámicas de influencia de los desplazamientos y fuerzas interiores de las placas ortotrópicas con dos coeficientes de lecho).

20. **Киселев В. А.** Расчет прямоугольных ортотропных пластин на упругом основании с двумя характеристиками на статическую и вибрационную нагрузку.— В кн. Строительная механика. М., 1966. (Kiseliov V. A. Cálculo de las placas rectangulares ortotrópicas sobre fundamento elástico con dos características para la carga estática y de vibración).

21. **Киселева И. В.** К вопросу о развитии метода перемещений в динамике сооружений.— Науч. тр./МАДИ, 1957, вып. 20. (Kiseliova V. A. Sobre el problema del desarrollo del método de los desplazamientos en la dinámica de las obras).

22. **Корноухов Н. В.** Прочность и устойчивость стержневых систем. М., 1949. (Kornoújov N. V. Solidez y estabilidad de los sistemas de barras).

23. **Корчинский И. Л., Поляков С. В.** и др. Основы проектирования зданий в сейсмических районах. М. 1961. (Korchinski I. L., Poliakov S. V. y otros. Fundamentos de la proyección de edificios en las regiones sísmicas).

24. **Крылов А. Н.** Вибрация судов. Собрание трудов, т. 10. АН СССР, 1948. (Krilov A. N. Vibración de los barcos).

25. **Крылов А. Н.** О расчете балок, лежащих на упругом основании. АН СССР, 1931. (Krilov A. N. Sobre el cálculo de las vigas colocadas sobre un fundamento elástico).

26. **Лейтес С. Д.** Устойчивость сжатых стальных стержней. М., 1954. (Leytes S. D. Estabilidad de las barras de acero comprimidas).

27. **Лейтес С. Д.** Общий метод определения Эйлеровой критической силы для сжатых стержней рамных конструкций.— Проект и стандарт, 1937, № 7. (Leytes S. D. Método general para la determinación de la fuerza crítica de Euler para las barras comprimidas de las estructuras de pórticos).

28. **Лейтес С. Д.** О применении метода сил к исследованию устойчивости статически неопределимых систем.— В кн.: Исследования по теории сооружений, вып. 4, М., 1949 г. (Leytes S. D. Sobre la aplicación del método de fuerzas para la investigación de la estabilidad de los sistemas estáticamente indeterminados).

29. **Макушин В. М.** Теория упругой линии при продольно-поперечном изгибе.— Научн. тр./Московский механико-машиностроительный ин-т им. Баумана, 1939, вып. 56/3. (Makúshin V. M. Teoría de la línea elástica en la flexión longitudinal y transversal).

30. **Нудельман Я. Л.** Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем. М., 1949. (Nudelman Ya. L. Métodos de

determinación de las frecuencias propias y de las fuerzas críticas para los sistemas de barras).

31. **Пашкович П. Ф.** Строительная механика корабля, ч. II. Л., 1941. (Parkovich P. F. Mecánica de construcción del barco).
32. **Пановко Я. Г.** Основы прикладной теории упругих колебаний М., 1957. (Panovko Ya. G. Fundamentos de la teoría aplicada de las oscilaciones elásticas).
33. **Пратусевич Я. А.** Вариационные методы в строительной механике. М., 1948. (Pratusévich Ya. A. Métodos de variaciones en la mecánica de construcción).
34. **Пиковский А. А.** Статика стержневых систем со сжатыми элементами. М., 1961. (Pikovski A. A. Estática de los sistemas de barras con elementos comprimidos).
35. **Прокофьев И. П., Смирнов А. Ф.** Теория сооружений, ч. 3. М., 1948. (Prokófiev I. P., Smirnov A. F. Teoría de las obras).
36. **Рабинович И. М.** Курс строительной механики, ч. 2. М., 1954. (Rabinovich I. M. Curso de mecánica de la construcción).
37. **Рабинович И. М.** Основы строительной механики стержневых систем. М., 1960. (Rabinovich I. M. Fundamentos de la mecánica de la construcción de los sistemas de barras).
38. **Рабинович И. М.** Основы динамического расчета сооружений на действие кратковременных и мгновенных сил, ч. I., М., 1952. (Rabinovich I. M. Fundamentos del cálculo dinámico de las obras a la acción de las fuerzas efímeras e instantáneas).
39. **Рабинович И. М.** Достижения строительной механики стержневых систем. М., 1949. (Rabinovich I. M. Logros de la mecánica de construcción de los sistemas de barras).
40. **Рабинович И. М.** Строительная механика в СССР 1917—1957 гг. М., 1957. (Rabinovich I. M. Mecánica de la construcción en la URSS en los años 1917—1957).
41. **Рабинович И. М.** Строительная механика в СССР 1917—1967 гг. М., 1969. (Rabinovich I. M. Mecánica de la construcción en la URSS en los años 1917—1967).
42. **Рабинович И. М., Синицын А. П., Теренин Б. М.** Расчет сооружений на действие кратковременных и мгновенных сил, ч. I, М., 1956; ч. 2, 1958. (Rabinovich I. M., Sinitsin A. P., Terenin B. M. Cálculo de las obras a la acción de las fuerzas efímeras e instantáneas).
43. **Раевский А. Н.** Основы расчета сооружений на устойчивость М., 1962. (Raevski A. N. Fundamentos del cálculo de la estabilidad de las obras).
44. **Ржаницын А. Р.** Устойчивость равновесия упругих систем. М., 1955. (Rzhanitsin A. P. Estabilidad del equilibrio de los sistemas elásticos).
45. **Рэлей.** Теория звука, т. I и II. М., 1940 и 1944 гг. (Reley. Teoría del sonido).
46. **Смирнов А. Ф.** Устойчивость и колебания сооружений. М., 1958. (Smirnov A. F. Estabilidad y vibraciones de las obras).
47. **Смирнов А. Ф.** Таблицы функций для расчета упругих систем на устойчивость и колебания. М., 1966. (Smirnov A. F. Tablas de funciones para el cálculo de los sistemas elásticos a la estabilidad y a las oscilaciones).
48. **Снитко Н. К.** Расчет сжато-изогнутых стержней при применении общего уравнения упругой линии.— Проект и стандарт. 1938, N° 1. (Snitko N. K. Cálculo de las barras comprimidas y encorvadas en la aplicación de la ecuación general de la línea elástica).
49. **Снитко Н. К.** Устойчивость стержневых систем. М., 1952. (Snitko N. K. Estabilidad de los sistemas de barras).

50. **Снитко Н. К.** Методы расчета сооружений на вибрацию и удар. М., 1953. (Snitko N. K. Métodos de cáculo de las obras a la vibración y al golpe).
51. **Снитко Н. К.** Устойчивость сжатых и сжато-изогнутых стержневых систем. М., 1956. (Snitko N. K. Estabilidad de los sistemas comprimidos y de los comprimidos y encorvados).
52. **Снитко Н. К.** Динамика сооружений М., 1960. (Snitko N. K. Dinémica de las obras).
53. Справочник инженера-проектировщика. Том расчетно-теоретический. М., 1960. (Guía del ingeniero proyectista).
54. **Сорокин Е. С.** К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М., 1960. (Sorokin E. S. Teoría de la fricción interior en las vibraciones de los sistemas elásticos).
55. **Стрелецкий Н. С.** Работы сжатых стоек. М., 1959. (Streletski N. S.Trabajos de los montantes comprimidos).
56. **Тимошенко С. П.** Устойчивость упругих систем. М., 1946. (Timoshenko S. P. Estabilidad de los sistemas elásticos).
57. **Тимошенко С. П.** История науки о сопротивлении материалов. М., 1957. (Timoshenko S. P. Historia de la ciencia sobre la resistencia de los materiales).
58. **Филоненко-Бородич М. М.** Новые вопросы строительной механики.— В кн.: Механика в СССР за 30 лет. М., 1950. (Filonenko-Borodich M. M. Nuevos problemas de la mecánica de construcción).
59. **Филиппов А. П.** Колебания упругих систем. Киев, 1956. (Filippov A. P. Las oscilaciones de los sistemas elásticos).
60. **Чудновский В. Г.** Методы расчета колебаний и устойчивости стержневых систем. Киев, 1952. (Chudnovski V. G. Métodos de cálculo de las oscilaciones y la estabilidad de los sistemas de barra).
61. **Яблонский А. А., Норейко С. С.** Курс теории колебаний. М., 1966. (Iablonski A. A., Noreyko S. S. Curso de la teoría de las oscilaciones).
62. **Koloušek V.** Baudinamik der Durchlauftrager und Rahmen, Leipzig, 1953.
63. **Koloušek V.** Dynamika stavebnich konstrukci, Iobecna čast. Praha, 1954.
64. **Koloušek V.** Dynamika stavebnich konstrukci III čast. Praha, 1961.
65. **Яблонский А. А.** Курс теоретической механики, ч. 2, М., 1977. (Iablonski A. A. Curso de teoría mecánica).
66. **Дмитриев Ф. Д.** Крушения инженерных сооружений. М., 1953. (Dmitriev F. D. Derrumbamiento de las obras ingenieriles).
67. **Эйлер Л.** Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума. М., 1934. (Euler L. Método de determinación de las líneas curvas poseedoras de las propiedades máximas o mínimas).

A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

SOBOL I.

MÉTODO DE MONTECARLO (2ª EDICIÓN)

El método de Montecarlo, llamado a veces método de pruebas estadísticas, surgió después de la segunda guerra mundial y se difundió ampliamente debido al desarrollo impetuoso de las máquinas computadoras. En el folleto se exponen las ideas más sencillas y, al mismo tiempo, más importantes de este método que permite resolver problemas muy diversos.

En la introducción se ofrece una visión panorámica del método de Montecarlo destacando sus rasgos peculiares relacionados con el empleo de variables aleatorias.

El capítulo 1 está dedicado a la simulación de las variables aleatorias. Se explican, de una forma sencilla, los principales conceptos de la teoría de las probabilidades (valor medio, variancia, teorema límite central) y se describen tanto las posibilidades de obtener variables aleatorias en las máquinas computadoras como los métodos de simulación de diferentes variables aleatorias.
En el capítulo 2 se explica, a base de ejemplos sencillos, cómo se emplea el método de Montecarlo para analizar los sistemas de servicios, para estimar la calidad y la seguridad de los aparatos, para analizar el proceso de radiación, así como para calcular aproximadamente las integrales definidas.

El apéndice contiene las demostraciones de algunas proposiciones empleadas y la descripción del método más difundido para obtener números seudoaleatorios por medio de las máquinas computadoras.

El folleto está destinado para los científicos, ingenieros, diseñadores e investigadores que trabajan en las ramas más diversas de la economía nacional (ciencia, industria, técnica, agricultura, comercio, etc.). Tiene por objeto sugerir a los especialistas qué tareas conviene resolver por el método de Montecarlo en sus esferas respectivas. También puede ser empleado por los escolares para su primer contacto con el método.

En cuanto al lector, le basta con tener una noción de la integral y de la derivada.

YAGLOM I.

ALGEBRA EXTRAORDINARIA (2ª EDICIÓN)

En 1854 Georges Boole, destacado matemático inglés, publicó su obra "Investigación de las leyes del pensamiento" que además de desempeñar un papel importantísimo en el desarrollo de las Matemáticas, en general, y de la Lógica Matemática, en particular, influyó notoriamente en el desarrollo de todas las direcciones de las Matemáticas modernas relacionadas con las máquinas computadoras y la Cibernética. Es curioso que teniendo tanta importancia, las ideas de Boole sean sencillas y, de hecho, estén vinculadas estrechamente con las cuestiones del Algebra elemental referentes a la definición de las operaciones algebráicas y a las propiedades de las mismas. Esta es la razón por la cual las ideas de Boole suelen exponerse, de una u otra forma, en el curso elemental de las Matemáticas. Sin embargo, un estudio más profundo de las llamadas álgebras de Boole tiene indudablemente su importancia, pues además de ampliar los conocimientos matemáticos, estimula en el alumno el don del razonamiento lógico y la aptitud de descubrir relaciones entre fenómenos aparentemente muy alejados.

El folleto brinda una magnífica oportunidad para ello. En él se da la definición del álgebra de Boole, se exponen sus propiedades fundamentales y se consideran numerosos ejemplos de esta materia. Se estudia, en particular, el álgebra de las proposiciones y se señalan las posibilidades de su empleo para la automatización de las demostraciones matemáticas. Además, contiene numerosos ejercicios que permiten al lector profundizar en el tema.

Sobrepasando ampliamente todo cuanto se expone en la escuela sobre el álgebra de Boole, el folleto puede utilizarse con éxito en los círculos matemáticos. Estando al alcance de los alumnos de los grados medios no deja de tener interés para los alumnos de grados superiores e, incluso, para maestros.

KUDRIAVTSEV L.

CURSO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

El libro que ofrecemos es uno de los mejores manuales de análisis matemático. La exposición del material se realiza en forma clara pero rigurosa. La obra ha sido, escrita por un pedagogo experto, que en el transcurso de muchos años dio conferencias sobre las distintas partes del curso en el Instituto Físico-técnico de Moscú.

En la primera parte de este libro el autor desarrolla el cálculo diferencial e integral para funciones de una variable, da los conocimientos básicos sobre las funciones de dos y más variables y acerca de la teoría de series. Se presta especial atención al desarrollo de métodos cualitativos y analtíicos. En el manual se exponen ejemplos de aplicación del análisis.

La segunda parte del libro trata del cálculo diferencial e integral de funciones de dos y más variables, de la teoría de las transformaciones diferenciales, la teoría de las series y las transformaciones de Fourier, los elementos del análisis funcional y la teoría de las funciones generalizadas.

En este manual se presta gran atención a la resolución de problemas por métodos, basados en la teoría desarrollada; además, para el trabajo individual del lector se exponen ejercicios y problemas.

El libro está destinado a los estudiantes de universidades y facultades de ingeniería y física de los centros de enseñanza superior.